

К РАСЧЕТУ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОДУГОВОГО ПОДОГРЕВА ГАЗА

И. И. Суксов (Новосибирск)

Имеется ряд теоретических работ, в которых получены электрические и энтальпийные характеристики цилиндрической дуги (например [1,2]) При исследовании электродугового подогрева газодинамические характеристики также необходимы наряду с электрическими и энтальпийными.

Ниже исследуется электродуговой подогрев газа в круглой трубке для случая, когда местные энтальпия и удельный расход газа не зависят от продольной координаты (стабилизированный электродуговой подогрев). Приведены соотношения для численного определения электрических и энтальпийных характеристик методом последовательных приближений, а также соотношения для последующего нахождения газодинамических характеристик. Представлены результаты расчетов для воздуха при давлениях (1—100)·1, 01325·10⁵ н/м² и температуре на оси столба 6000° К.

1. Рассмотрим ламинарное течение газа в цилиндрической трубке кругового поперечного сечения при наличии положительного столба электрической дуги для случая независимости местных энтальпии h и удельного расхода ρv_z от продольной координаты z ¹. Излучение не учитывается. Тогда функции

$$\Psi = \int_0^r \rho v_z r dr, \quad \Phi = \int_0^r \rho v_z h r dr$$

не зависят от z . Давление падает вдоль трубки, а поэтому температура T и функция

$$s = \int_0^T \lambda dT$$

(λ — коэффициент теплопроводности) будут несколько изменяться в зависимости от z , хотя практически можно считать их постоянными. За счет возможного изменения v_z вдоль трубки функция

$$\Lambda = \int_0^r \rho v_z^2 r dr$$

тоже будет зависеть от z .

Для этого случая приближенные уравнения количества движения и энергии, приведенные в работе [3], принимают вид

$$\mu r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} + \frac{\partial \Lambda}{\partial z}, \quad r \frac{\partial s}{\partial r} = -E^2 \int_0^r \sigma r dr \quad (1.1)$$

Граничные условия

$$v_z = 0, \quad h = h_w = \text{const} \quad \text{при } r = r_w \quad (1.2)$$

Индекс w относится к параметрам на стенке.

Имея в виду термохимическое равновесие, считаем величины ρ , h , λ , μ , σ известными функциями температуры и давления.

Совместно с уравнениями (1.1) необходимо рассмотреть выражения для полного тока в трубке и расхода газа соответственно

$$I = 2\pi E \int_0^{r_d} \sigma r dr, \quad G = 2\pi \int_0^{r_w} \rho v_z r dr \quad (1.3)$$

Индекс d соответствует границе проводящей области. Для проводящей области ($0 \leq r \leq r_d$) уравнение энергии (1.1) представляется в интегральной форме

$$s^{\circ} = s_d^{\circ} + \frac{\sigma_0(Er_w)^2}{S_0} [F_2(\eta_d) - F_2(\eta)], \quad s^{\circ} = \frac{s}{s_0}, \quad \sigma^{\circ} = \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (1.4)$$

$$F_2(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{F_1(\eta) d\eta}{\eta}, \quad F_1(\eta) = \int_0^{\eta} \sigma_0 \eta d\eta, \quad \eta = \frac{r}{r_w} \frac{E}{\sigma_0}$$

Нижний индекс 0 соответствует значению $\eta = 0$.

¹ Этот случай отмечается в работе автора [3], однако допущена опечатка: вместо ρv_z напечатано ρ , v_z .

При $\eta = 0$ из уравнения (1.4) следует

$$Er_w = \left(\frac{s_0 - s_d}{\sigma_0 F_2(\eta_d)} \right)^{1/2} \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.3) с учетом (1.5)

$$\frac{I}{r_w} = 2\pi F_1(\eta_d) \left(\frac{\sigma_0 (s_0 - s_d)}{F_2(\eta_d)} \right)^{1/2} \quad (1.6)$$

Уравнение энергии (1.1) для непроводящей области ($r_d \ll r \ll r_w$) при помощи (1.2) и (1.3) приводится к виду

$$s^\circ = s_w^\circ - EI \ln \eta / 2\pi s_0 \quad (1.7)$$

Отсюда при $\eta = \eta_d$ получаем

$$\eta_d = \exp[-2\pi (s_d - s_w) / EI] \quad (1.8)$$

причем, согласно (1.5), (1.6)

$$EI = \frac{2\pi (s_0 - s_d) F_1(\eta_d)}{F_2(\eta_d)} \quad (1.9)$$

Величине s_d соответствует определенное значение температуры T_d , при которой электропроводность σ практически равна нулю, так что вклад в величину I от области $T_d \gg T \gg T_w$ пренебрежимо мал. Для воздуха принимаем $T_d = 4000^\circ \text{K}$.

Задавая для данного газа значения T_0 , T_w и p , можно на основании (1.4) — (1.9) численно методом последовательных приближений определить распределения $s^\circ = s^\circ(\eta, p)$, а также величины Er_w , I/r_w , EI , η_d . После этого нетрудно найти энтальпийную $h^\circ = h/h_0$ (или температурную $T^\circ = T/T_0$) характеристику.

2. Для приближенного получения профиля скорости и других газодинамических характеристик в случае стабилизированного электродугового подогрева будем считать отношение давления к скоростному напору на оси достаточно большим. Тогда, как выяснится дальше, можно не учитывать второй член в правой части уравнения (1.1).

Уравнение (1.1) запишем в безразмерной форме

$$\frac{\partial v_z^\circ}{\partial \eta} = \alpha \frac{\eta}{\mu^\circ} + \frac{1}{\mu_0 v_{z0}} \frac{1}{\mu^\circ \eta} \frac{\partial \Lambda}{\partial z}, \quad \alpha = \frac{r_w^2}{2\mu_0 v_{z0}} \frac{dp^\circ}{dz}, \quad v_z^\circ = \frac{v_z}{v_{z0}}, \quad \mu^\circ = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2.1)$$

После формального интегрирования уравнения (2.1) по η с выполнением граничного условия $v_z^\circ(0) = 1$ получим

$$v_z^\circ = 1 + \alpha F_3(\eta) + \beta F_5(\eta), \quad \beta = \frac{r_w^2 \rho_0}{\mu_0} \frac{dv_{z0}}{dz}, \quad (2.2)$$

$$F_3(\eta) = \int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{\mu^\circ}, \quad F_5(\eta) = \int_0^\eta \frac{E_4(\eta) d\eta}{\mu^\circ \eta}, \quad F_4(\eta) = \int_0^\eta \rho^\circ (v_z^\circ)^2 \eta d\eta, \quad \rho^\circ = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Зависимостью интегралов F_3 , F_5 от z пренебрегаем (обоснование дается дальше). Учитываем, что $\rho_0 v_{z0} = \text{const}$. При $\eta = 1$ имеем $v_z^\circ = 0$, и уравнение (2.2) дает

$$1 + \alpha F_3(1) + \beta F_5(1) = 0 \quad (2.3)$$

Пренебрегая изменением температуры, можно считать плотность пропорциональной давлению, так как молекулярный вес газа слабо зависит от давления. Следовательно,

$$\rho_{01}/\rho_0 = v_{z0}/v_{z01} = 1/p^\circ, \quad p^\circ = p/p_1 \quad (2.4)$$

При помощи (2.4) приведем уравнение (2.3) к виду

$$k_1 p^\circ dp^\circ - dp^\circ/p^\circ + 4k_2 z^\circ = 0 \quad (2.5)$$

$$k_1 = \frac{p_1 F_3(1)}{2\rho_{01} v_{z01}^2 F_5(1)}, \quad k_2 = \frac{1}{R F_5(1)}, \quad R = \frac{2r_w \rho_{01} v_{z01}}{\mu_{01}}, \quad z^\circ = \frac{z}{2r_w}$$

Величины α и β с учетом (2.5) будут равны

$$\alpha = - \frac{k_1 (p^\circ)^2}{[k_1 (p^\circ)^2 - 1] F_3(1)}, \quad \beta = \frac{1}{[k_1 (p^\circ)^2 - 1] F_5(1)} \quad (2.6)$$

Величины $F_3(1)$, $F_5(1)$ имеют одинаковый порядок. Так, в частности, при $\rho^\circ = \mu^\circ = 1$ будет $d\Lambda/dz = 0$ и тогда получаем течение Пуазейля, для которого, как известно (например [4]), $dp/dz = \text{const}$, $v_z^\circ = 1 - \eta^2$.

В этом случае $F_3(1)/F_5(1) \approx 3.3$.

Из (2.6) видно, что при достаточно больших k_1 действительно можно не считаться с теми членами уравнений (1.1), (2.1) — (2.3), которые обусловлены продольным градиентом скорости.

Можно оценить зависимость давления от z , интегрируя уравнение (2.5), причем можно либо совсем отбросить второй член, либо заменить $\ln p^\circ$ на $-(1 - p^\circ)$. В последнем случае получаем

$$p^\circ = [1 + \sqrt{1 + k_1(k_1 - 2 - 8k_2 z^\circ)}] k_1^{-1} \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что при достаточно больших k_1 и сравнительно небольших z° давление вдоль трубки будет уменьшаться незначительно. Вследствие (2.4) осевая скорость будет увеличиваться также незначительно. Вместе с отмеченной ранее малостью продольного изменения температуры это дает оправдание допущению о независимости интегралов F_3 , F_5 от z при получении уравнения (2.2).

После подстановки в уравнение (1.3) значения v_z° из (2.2) получаем

$$\gamma = F_6(1) + \alpha F_5(1) + \beta F_8(1) \quad (2.8)$$

$$\gamma = \frac{G}{2\pi\rho_0 v_{z0} r_w^2}, \quad F_6(1) = \int_0^1 \rho^\circ \eta d\eta, \quad F_7(1) = \int_0^1 \rho^\circ F_3(\eta) \eta d\eta, \quad F_8(1) = \int_0^1 \rho^\circ F_5(\eta) \eta d\eta$$

Так как на основании (2.2)

$$\tau_w = -\mu_w (\partial v_z / \partial r)_w = -\mu_0 v_{z0} r_w^{-1} [\alpha + \beta F_4(1)]$$

то коэффициент сопротивления трения

$$\zeta = 8\tau_w / \rho_0 v_{z0}^2 = -8\mu_0 [\alpha + \beta F_4(1)] / r_w \rho_0 v_{z0}$$

Учитывая (2.8), получим

$$\delta = -\gamma [\alpha + \beta F_4(1)] \quad (\delta = G\zeta / 16\pi r_w \mu_{01}) \quad (2.9)$$

Наибольший интерес представляет начало стабилизированного электродугового подогрева, т. е. случай $p^\circ = 1$. Тогда на основании (2.6)

$$\alpha = -k_1 / (k_1 - 1) F_3(1), \quad \beta = 1 / (k_1 - 1) F_5(1) \quad (2.10)$$

При больших k_1 величины α , γ , δ будут выражаться формулами

$$\alpha = -\frac{1}{F_3(1)}, \quad \gamma = \frac{F_3(1) F_6(1) - F_7(1)}{F_3(1)}, \quad \delta = -\alpha\gamma \quad (2.11)$$

Распространенной характеристикой электродугового подогрева является средне-массовая энтальпия. Исходя из выражения

$$\langle h \rangle = \int_0^{r_w} \rho v_z h r dr \left(\int_0^{r_w} \rho v_z r dr \right)^{-1}$$

приходим к следующей формуле для $\langle h^\circ \rangle = \langle h \rangle / h_0$:

$$\langle h^\circ \rangle = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \rho^\circ v_z^\circ h^\circ \eta d\eta \quad (2.12)$$

3. Рассмотрим применительно к данному случаю допущение

$$\rho v_z = \text{const} \quad (3.1)$$

Из уравнения (1.3) следует $\gamma = 1/2$. В силу (3.1) и того, что величина ρ_w ограничена, условие $v_z^\circ(1) = 0$ выполняться не будет; вместо него согласно (3.1) получим

$$v_z^\circ(1) = 1/\rho_w^\circ.$$

Поэтому правая часть уравнения, аналогичного (2.3), будет равна $1/\rho_w^\circ$.

При больших k_1 членами с β можно пренебречь, и тогда

$$\alpha = -(\rho_w^\circ - 1) / \rho_w^\circ F_3(1), \quad \delta = -1/2 \alpha$$

В этом случае средне-массовая энтальпия выразится на основании (2.12)

$$\langle h^\circ \rangle = 2 \int_0^1 h^\circ \eta d\eta \quad (3.2)$$

Таблица 1

$10^{-5}p/1.01325, \text{ н/м}^2$	1	2	5	10	20	50	100
s_0	2554	2275	2032	1893	1787	1674	1598
σ_0	120.2	103.5	85.11	73.28	57.54	46.77	36.73
s_d	0.3560	0.3800	0.3925	0.3930	0.3890	0.3827	0.3810
s_w	0.0094	0.0105	0.0118	0.0127	0.0135	0.0143	0.0150
Исходные значения							
Er_w	20.2	21.2	22.8	24.1	25.6	27.9	30.0
I/r_w	458	375	305	269	237	207	189
$10^{-3}EI$	9.25	7.96	6.95	6.48	6.11	5.76	5.62
η_d	0.548	0.518	0.500	0.498	0.502	0.511	0.519
Окончательные значения							
Er_w	15.9	17.6	20.3	22.9	25.7	29.9	33.5
I/r_w	732	538	380	298	243	190	165
$10^{-3}EI$	11.62	9.30	7.71	6.90	6.30	5.78	5.55
η_d	0.618	0.567	0.533	0.518	0.510	0.511	0.517

4. Были проведены расчеты для воздуха при осевой температуре 6000°K и давлениях (1—100) $\cdot 1.01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$, причем использовались известные данные о зависимости коэффициентов теплопроводности и вязкости [5], электропроводности [6], энтальпии и плотности [7] от температуры и давления.

В качестве исходного приближения для σ° бралось аппроксимирующее выражение $\sigma^\circ = 1 - 6(\eta/\eta_d)^2 + 8(\eta/\eta_d)^3 - 3(\eta/\eta_d)^4$, удовлетворяющее условиям

$$\sigma^\circ(0) = 1, \quad \sigma^\circ(\eta_d) = 0, \quad (d\sigma^\circ/d\eta)_{\eta=0} = (d\sigma^\circ/d\eta)_{\eta=\eta_d} = (d^2\sigma^\circ/d\eta^2)_{\eta=\eta_d} = 0$$

Эта аппроксимация позволила определить в конечной форме функции $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$, подсчитать по формулам (1.5), (1.6), (1.9), (1.8), (1.4) характеристики Er_w , I/r_w , EI , η_d , s° в исходном приближении и определить $\sigma^\circ = \sigma^\circ(s^\circ)$ в первом приближении. Затем проводился численный подсчет упомянутых функций и характеристик в первом приближении. Аналогично находились приближения более высокого порядка.

Для непроводящей области распределение $s^\circ = s^\circ(\eta, p)$ подсчитывается по формуле (1.7)

В табл. 1 приведены некоторые данные, необходимые для проведения расчетов.

Расчеты указанных характеристик показывают, что практически можно ограничиться вторым приближением. Однако при расчетах определялись приближения до четвертого порядка.

Исходные и окончательные значения величин Er_w , I/r_w , EI , η_d представлены в табл. 1.

На фигуре даны профили энтальпии $h_0 = h_0(\eta, p)$, найденные по распределениям $s^\circ = s^\circ(\eta, p)$.

Были получены соответствующие распределения $\rho^\circ = \rho^\circ(\eta, p)$, $\mu^\circ = \mu^\circ(\eta, p)$, что дало возможность численно определить функции $F_3(\eta, p)$, $F_6(\eta, p)$, $F_7(\eta, p)$ и подсчитать в первом приближении ($\beta = 0$) газодинамические характеристики α , γ , δ по формулам (2.11). Определялись также профили скорости $v_z^\circ = v_z^\circ(\eta, p)$ по формуле (2.2) (при $\beta = 0$).

Значения α , γ , δ приведены в табл. 2

Оказалось, что профиль скорости не зависит от давления с точностью до двух-трех знаков после запятой. Зависимость v_z° от η приведена на фигуре.

Полученные значения γ показывают, что при постоянных расходе G и радиусе r_w произведение $\rho_0 v_{z0}$ слабо уменьшается с ростом давления. Так как плотность почти пропорциональна давлению, то скорость v_{z0} будет резко уменьшаться, а коэффициент k_1 — резко возрастать с ростом давления. Таким образом, можно ожидать, что при $G = \text{const}$, $r_w = \text{const}$ величина β будет быстро стремиться к нулю с увеличением давления; это подтверждается расчетом (табл. 2).

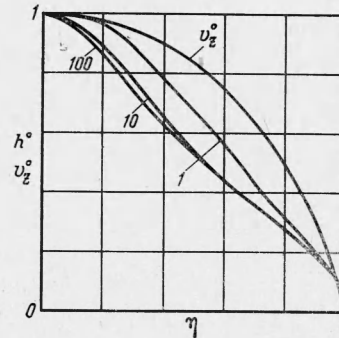


Таблица 2

$10^{-5} p/1.01325, \text{н/м}^2$		1	2	5	10	20	50	100
Первое приближение ($\beta = 0$)	$-\alpha$	1.202	1.160	1.116	1.086	1.066	1.055	1.050
	γ	0.537	0.569	0.594	0.609	0.618	0.626	0.629
	δ	0.647	0.655	0.659	0.660	0.660	0.660	0.660
Второе приближение	$-\alpha$	1.320	1.184	1.120	1.086	1.066	1.055	1.050
	β	0.271	0.059	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000
	γ	0.554	0.575	0.596	0.609	0.618	0.626	0.629
$\rho v_z = \text{const}$	δ	0.680	0.665	0.664	0.661	0.660	0.660	0.660
	$\langle h^\circ \rangle$	0.475	0.446	0.420	0.413	0.410	0.409	0.408
	$-\alpha$	1.085	1.042	0.998	0.971	0.953	0.941	0.935
$\beta = 0$	δ	0.542	0.521	0.499	0.486	0.476	0.470	0.468
	$\langle h^\circ \rangle$	0.466	0.425	0.411	0.399	0.395	0.394	0.394

Далее были подсчитаны функции $F_4(\eta, p)$, $F_5(\eta, p)$ и проведено вычисление параметров α , β , γ и δ во втором приближении по формулам (2.10), (2.8) и (2.9). Результаты также представлены в табл. 2.

Хотя при $G = \text{const}$, $r_w = \text{const}$ величина $\rho_0 v_{z0}$ несколько уменьшается с ростом давления (в рассматриваемом диапазоне давлений уменьшение не превышает 12%), при расчетах коэффициента k_1 было принято $\rho_0 v_{z0} = \text{const} = 21,59$. Это значение получено при $T_0 = 6000^\circ \text{K}$, $p = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$, $v_{z0} = 482 \text{ м/сек}$ (что соответствует числу $M_0 = 0.3$, при котором еще можно пренебрегать кинетической энергией по сравнению с энтальпией).

Сравнение результатов расчета по первому и второму приближениям показывает, что для рассматриваемых условий влияние зависимости v_{z0} от z несущественно и практически исчезает при давлениях $p \geq 2 \cdot 1.01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$.

Так как для первых двух давлений в табл. 2 значения α во втором приближении возросли, то соответствующие профили скорости $v_z^\circ = v_z^\circ(\eta, p)$ (с учетом β) практически не отличаются от профилей, полученных в первом приближении ($\beta = 0$).

В табл. 2 для сравнения даны значения α и β ($\beta = 0$) при допущении $\rho v_z = \text{const}$ (п. 4). Как отмечалось, в этом случае $\gamma = 0.5$, независимо от давления.

Эти значения α , γ , δ отличаются от значений в первом приближении соответственно в пределах 9.7 — 10.9%, 6.9 — 20.5%, 15.2 — 29.0%, причем разница увеличивается с возрастанием давления.

В табл. 2 приведены также значения безразмерной среднemasсовой энтальпии $\langle h^\circ \rangle$, подсчитанной по формулам (2.12) и (3.2). Разница между соответствующими значениями составляет 1.9 — 4.5%.

В заключение оценим изменения давления при $r_w = 0.001 \text{ м}$, $p_1 = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$, $T_0 = 6000^\circ \text{K}$. В этом случае $k_1 = 11.2$, $k_2 = 0.00985$. Подсчет по формуле (2.7) при $z^\circ = 5$ дает $p^\circ = 0.985$.

Автор благодарит М. П. Левина за участие в проведении расчетов.

Поступила 0X1 1966

ЛИТЕРАТУРА

- Schmitz G., Patt H. J., Uhlenbusch J. Eigenschaften und Parameterabhängigkeit der Temperaturverteilung und der Charakteristik eines Zylindersymmetrisch Stickstoffbogens. Z. Phys., 1963, В. 173, Н. 5.
- Ветлужкий В. Н., Онуфриев А. Т., Севастьяненко В. Г. Расчет электрической дуги в аргоне, стабилизированной стенками, с учетом переноса энергии излучением. ПМТФ, 1965, № 4.
- Суксов И. И. Приближенная зависимость для теплового потока к стенкам при электродуговом подогреве в круглой трубке. ПМТФ, 1966, № 4.
- Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.
- Севастьянов Р. М., Здункевич М. Д. Таблицы теплофизических свойств воздуха и азота в диапазоне температур от 100 до 5000—15000° К. Госэнергоиздат, 1964.
- Viegas J. R., Peng T. C. Electrical conductivity of ionized air in thermodynamic equilibrium. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 5.
- Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Плешанов А. С., Самуйлов Е. В., Рождественский И. Б. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000° К и давлений от 0.00001 до 100 атмосфер). ВЦ АН СССР, 1962.