ПМТФ, № 2, 1963

ВЫПУЧИВАНИЕ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ МГНОВЕННЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

С. А. Шестериков

(*Москва*)

За последнее десятилетие появилось большое количество работ, посвященных проблеме выпучивания при ползучести. Имеется ряд принципиально различных подходов к указанной проблеме, одним из которых является метод исследования, основанный на попытках распространить обычные методы, используемые в упругости и пластичности. Это направление развивалось в работах А. Р. Ржаницына [1,2], Ю. Н. Работнова и С. А. Шестерикова [3-6], Л. М. Куршина [7,8], Хоффа [9], Джерарда [10], Г. В. Иванова [11] и других. Отметим, что этот подход в известной степени ограничен и, как показывают последние исследования [10], его согласование с опытными данными приводит к большим трудностям.

Более перспективным оказывается подход, основанный на исследовании прогибов во времени и определении времени, в течение которого конструкция может нести заданную нагрузку. Развитие этого подхода идет по пути усложнения используемых для описания поведения материала зависимостей напряжение-деформации-время. Простейшие зависимости, при использовании которых можно достаточно эффективно решить задачу выпучивания, слишком грубо описывают реальное поведение материала. С другой стороны, если использовать зависимости, достаточно хорошо представляющие характеристики реальных материалов, то простейшая задача выпучивания стержня приводит к пока непреодолимым математическим трудностям. Первые исследования в этом направлении относятся к изучению выпучивания шарнирно-опертого стержня, сжатого постоянной продольной силой. Материал стержня предполагался линейным вязко-упругим. Было показано, что такой стержень разрушается (т. е. при линеаризованной геометрической постановке задачи его прогиб обращается в бесконечность) за бесконечное время. Так как практически такое положение не может реализоваться, то рядом авторов были предложены различные ограничения для того, чтобы получить конечное время разрушения (например, изгибающий момент принимает некоторое заданное предельное значение [12]). Далее, была учтена нелинейность зависимости от напряжений для установившейся скорости ползучести [13] и было получено конечное время для разрушения (т. е. обращения прогиба в бесконечность). Необходимо отметить, что решение получено для идеализированного двутаврового стержня. Эта идеализация была использована и в последующих рассмотренных здесь задачах.

В 1954 году Одквист [14] предложил учитывать неустановившуюся ползучесть введением мгновенных пластических деформаций. Это привело к тому, что Хоффом [15] было показано существование критической амплитуды, т. е. такой амплитуды прогиба стержня, что при достижении этой величины скорость нарастания прогиба обращается в бесконечность (естественно, что задача ставится и решается в квазистатической постановке). Так как здесь критическая амплитуда для достаточно больших нагрузок оказывается сравнимой с толщиной стержня и много меньшей длины стержня, то в этом случае оправдана геометрическая линеаризация, используемая в задаче. Попутно отметим, что проблемам учета геометрической нелинейности посвящена работа Жичковского [16]. Введение геометрической нелинейности естественно приводит к определению критического времени как времени полного сближения концов стержня (для случая ползучести без наличия мгновенных пластических деформаций). В работе Фреийса де-Вёбека [17] было отмечено, что задача выпучивания при ползучести с учетом мгновенных пластических деформаций (т. е. при наличии конечной критической амплитуды) распадается на два этапа. Сначала определяется критическая амплитуда для чисто упруго-пластической задачи и далее определяется время достижения этой амплитуды с учетом ползучести. Этот вывод верен только для идеализированного стержня и неверен в общем случае. Целью настоящей работы является исследование выпучивания неидеализированного стержня в условиях ползучести.

В последних работах Фреийс де-Вёбек [17] и Хофф [9] отметили одну особенность решения задачи выпучивания при ползучести стержня, сжатого продольной силой. На примере идеализированного двутавра было показано, что в случае, когда учитываются мгновенные пластические деформации, разрушение происходит при конечном прогибе. При этом значение критического прогиба можно определить, не решая задачу ползучести, а исследуя только случай упруго-пластического продольного изгиба. Под разрушением понимается стремление скорости прогиба к бесконечности при параметре времени, стремящемся к конечному значению.

§ 1. Общие соотношения. Остановимся на идеализированной схеме. Для идеализированного двутаврового стержня напряженное состояние полностью определяется прогибом и приложенной продольной силой. Возможны и другие случаи, когда напряженное состояние определяется этими двумя параметрами. Такие системы, в которых прогиб и приложенные нагрузки полностью определяют напряженное состояние, будем называть однопараметрическими. Очевидно, что отмеченная выше особенность — возможность определения критического прогиба из решения только упруго-пластической задачи — имеет место, вообще говоря, только для однопараметрических систем. Ниже будут рассмотрены два частных примера, на которых будут выяснены указанные особенности.

Рассмотрим случай однопараметрической системы, следуя обычным предположениям о процессе деформирования стержня. Уравнения равновесия запишем для середины. Из условия равновесия имеем

$$P = \int_S \sigma \, dS \tag{1.1}$$

Здесь σ — напряжение, P — внешняя нагрузка и S — площадь стержня. Уравнение для момента, записанное для середины стержня, имеет вид

$$-P(a + a_{00}) = \int_S \sigma z \, dS \tag{1.2}$$

где z — координата по сечению S в плоскости изгиба, отсчитываемая от середины стержня; a — приращение прогиба в середине стержня; a_{00} — начальный прогиб. Для деформаций ε примем гипотезу плоских сечений, на основании которой для середины стержня получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - a\rho z \tag{1.3}$$

Здесь ε_0 — деформация центральной оси стержня и ρ — геометрическая характеристика, не зависящая от времени; для шарнирноопертого стержня длиной l, когда прогиб аппроксимируется одной полуволной синусоиды, $\rho = \pi^2 / l^2$.

Связь между напряжениями и деформациями примем в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{df(\sigma)}{dt} + \psi(\sigma) \qquad \begin{pmatrix} f(-\sigma) = -f(\sigma) \\ \psi(-\sigma) = -\psi(\sigma) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

где f и ψ—нелинейные функции напряжений. Отметим, что (1.4) описывает нелинейную упругость и установившуюся ползучесть. Соотношение (1.4) легко видоизменить так, чтобы оно описывало не нелинейную упругость, а пластичность (ввести линейную разгрузку). Такое видоизменение не вносит ничего принципиально нового, но очень сильно затрудняет исследование. Подчеркнем, что соотношениями типа (1.4) учесть первичную ползучесть принципиально невозможно.

Система уравнений (1.1)—(1.4) является полной. Из нее можно найти прогиб a как функцию времени. Исследуем случай, когда мгновенно приложена нагрузка P, которая затем сохраняется постоянной. Для определения мгновенного прогиба a_0 имеем уравнения (1.1), (1.2) и (1.3). В этом случае уравнение (1.4) преобразуется к виду $\varepsilon = f(\sigma)$. Из этого соотношения и уравнения (1.3) получим

$$f(\sigma) = \varepsilon_0 - a_0\rho z \tag{1.5}$$

Из этой системы легко получить два уравнения для определения прогиба a_0 и деформации ε_0.

Рассмотрим предельный случай, соответствующий условию

$$\partial P / \partial a_0 = 0 \tag{1.6}$$

т. е. найдем предельную нагрузку для данного a_{00}. Условие (1.6) соответствует системе

$$\int_S \frac{\partial \sigma}{\partial a_0} dS = 0, \qquad \int_S \frac{\partial \sigma}{\partial a_0} z dS = -P, \qquad \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial a_0} - \rho z = f'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial a_0} \tag{1.7}$$

Из (1.7) легко получить

$$P = \rho \left(C_2 - \frac{C_1^2}{C_0} \right) \qquad \left(C_k = \int_S \frac{z^k}{f'(\sigma)} dS \right) \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) дополняет исходную систему (1.1) — (1.3) до полной.

Перейдем к общему случаю. Из системы уравнений (1.1) — (1.4) легко получить следующие уравнения:

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} - \rho z \frac{da}{dt} = f'(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} + \psi(\sigma), \qquad \int_S \frac{d\sigma}{dt} dC = 0, \qquad \int_S \frac{d\sigma}{dt} z dS = -P \frac{da}{dt} \tag{1.9}$$

Очевидно, что критическое состояние (обращение в бесконечность скоростей) определяется равенством нулю определителя при производных $d\varepsilon_0 / dt$ и da / dt, когда первое из уравнений (1.9) подставляется в остальные два. Из этого условия легко получить уравнение для критического состояния

$$P = \rho \left(C_2 - \frac{C_1^2}{C_0} \right) \tag{1.10}$$

которое совпадает с (1.8). Параметры C_0, C_1, C_2 являются функциями напряжений, соответствующих критическому состоянию. Отсюда следует, что если рассматривается однопараметрическая система, как, например, идеализированный двутавр, то уравнение (1.8), а следовательно, и (1.10) достаточно для определения критического значения прогиба, так как в этом случае, как было указано выше, все напряжения полностью определяются через внешние нагрузки и одну неизвестную, как, например, прогиб. Поэтому для нахождения этой переменной достаточно одного уравнения. Для неоднопараметрической системы одного уравнения (1.8) недостаточно для нахождения критического прогиба. Так как остальные уравнения, характеризующие критическое состояние, различны для случаев учета и неучета ползучести, то и критический прогиб будет, вообще говоря, разным. Исключение может представлять случай, когда в процессе ползучести прогибы нарастают, но напряженное состояние видоизменяется таким образом, что оно соответствует изменению начального прогиба для решения, не учитывающего ползучесть.

В общем случае влияние ползучести на систему напряжений в стержне сводится к наложению на поле напряжений, получаемой из решения нелинейной задачи без учета ползучести, самоуравновешенной системы напряжений. Так, если принять

$$f = A\sigma^k, \qquad \psi = B\sigma^n \qquad (n > k)$$

то истинное поле напряжений лежит между двумя полями, определяемыми по первой и второй функциям отдельно. Очевидно, что при одинаковых условиях критическая амплитуда меньше для больших значений показателя степени. Поэтому при $n > k$ истинная критическая амплитуда меньше, чем для случая, когда ползучесть не учитывается. При этом расхождение тем больше, чем больше начальная амплитуда отличается от критического значения начальной амплитуды a_{00} (под последним понимается a_{00}, соответствующее мгновенному выпучиванию при заданной нагрузке).

Все указанные особенности можно оценить, если исследовать поведение не идеализированного двутавра, а стержня, состоящего из трех полок.

§ 2. Пример неоднопараметрической системы. Рассмотрим один простейший случай неоднопараметрической системы. Примем в качестве аппроксимирующей схемы не обычный двутавр, а стержень, состоящий из трех отдельных полок, расположенных на расстоянии h одна от другой. На других гипотезах относительно поведения такого стержня останавливаться не будем, так как они аналогичны случаю идеализированного двутавра. Тогда, приняв соотношения (1.1) и (1.4), получим систему уравнений для определения прогиба a и других параметров

$$\dot{\varepsilon}_0 + \dot{a}\rho h = \frac{d}{dt} f(x_1) + \psi(x_1), \quad \dot{\varepsilon}_0 = \frac{d}{dt} f(x_2) + \psi(x_2)$$

$$\dot{\varepsilon}_0 - \dot{a}\rho h = \frac{d}{dt} f(x_3) + \psi(x_3) \tag{2.1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = P, \qquad x_1 h - x_3 h = P(a + a_{00})$$

Здесь x_i — напряжения в полках; P — продольное усилие, отнесенное к площади полки (все полки предполагаются равновеликими).

Перейдем к безразмерным параметрам

$$a = hu, \qquad \rho h^2 = k \tag{2.2}$$

Примем, как это сделано в работе Стоувелла [18], что функции f и ψ представимы в виде

$$f = A \operatorname{sh}\frac{\sigma}{k_1}, \qquad \psi = B \operatorname{sh}\frac{\sigma}{k_2} \tag{2.3}$$

Тогда, исключая из системы (2.1) переменные ε_0, x_1 и x_3, получим для определения x_2 и u систему вида

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sh}\frac{P-x_2}{2k_1}\operatorname{ch}\frac{P(u+u_{00})}{2k_1} - \operatorname{sh}\frac{x_2}{k_1}\right) = -\frac{B}{A}\left(\operatorname{sh}\frac{P-x_2}{2k_2}\operatorname{ch}\frac{P(u+u_{00})}{2k_2} - \operatorname{sh}\frac{x_2}{k_2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(ku - A\operatorname{sh}\frac{P(u+u_{00})}{2k_1}\operatorname{ch}\frac{P-x_2}{2k_1}\right) = B\operatorname{sh}\frac{P(u+u_{00})}{2k_2}\operatorname{ch}\frac{P-x_2}{2k_2} \tag{2.4}$$

От этой системы легко перейти к одному дифференциальному уравнению, связывающему переменные u и x. При этом отметим, что в это уравнение не войдет параметр B, который можно считать масштабом времени. Таким образом, он не влияет на распределение напряжений по сечению стержня. Критическое состояние определится из условия обращения в бесконечность производных по времени от прогиба и x_2. Из этого условия получим

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}\frac{P(u+u_{00})}{2k_1}\operatorname{ch}\frac{P-x_2}{2k_1} - \frac{2kk_1}{PA} & \operatorname{sh}\frac{P(u+u_{00})}{2k_1}\operatorname{sh}\frac{P-x_2}{2k_1} \\ \operatorname{sh}\frac{P(u+u_{00})}{2k_1}\operatorname{sh}\frac{P-x_2}{2k_1} & \operatorname{ch}\frac{P(u+u_{00})}{2k_1}\operatorname{ch}\frac{P-x_2}{2k_1} - 2\operatorname{ch}\frac{x_2}{k_1} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

Очевидно, что уравнения (2.4) с условием (2.5) можно проинтегрировать лишь численно для конкретных значений параметров. Отметим лишь, что в отличие от случая однопараметрической системы в уравнение (2.5) входят, кроме u_{00}, другие параметры. Поэтому критическое состояние определяется не только значением критической амплитуды, но и системой распределения напряжений по сечению стержня в момент разрушения.

§ 3. Выпучивание вязко-упругого идеально пластического стержня. Случай вязко-упругого идеально пластического стержня интересен сам по себе, так как при определенных условиях такая схема описывает поведение некоторых реальных материалов (например, пластмасс). Кроме того, такой стержень представляет собой нетривиальную однопараметрическую систему. Таким образом, связь между напряжениями σ и деформациями ε можно представить в форме

$$E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + n\sigma \quad \text{при} \ \sigma < \sigma_T \tag{3.1}$$

и при $\sigma = \sigma_T$ деформации произвольны. Это означает, что мгновенные упругие деформации и вязкое течение имеют место до определенного предела, а далее возникает течение при постоянном напряжении.

Рассмотрим шарнирноопертый стержень, сжатый продольной постоянной силой P. Сечение стержня для простоты будем считать прямоугольным. Предположим, что начальный прогиб a_{00} и сила P таковы, что при мгновенном приложении нагрузки сразу образуются пластические области как сжатия, так и растяжения. Тогда легко записываются уравнения равновесия (принимаются те же гипотезы, что и в первом параграфе, и уравнения равновесия записываются для середины стержня), из которых получаются соотношения

$$\frac{P}{b} = \sigma_T (z_1 + z_2), \qquad \frac{P}{b} (a + a_{00}) = \sigma_T \left[h^2 - \frac{1}{3} (z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2)\right] \tag{3.2}$$

Здесь $z = z_1$ — граница области, в которой $\sigma = \sigma_T$, а $z = z_2$ — граница области, в которой $\sigma = -\sigma_T$, другие границы этих областей соответственно будут $z = -h$ и $z = h$.

Из условий деформирования при $z = z_1$ и $z = z_2$ получим еще два уравнения для определения прогиба a_0 сразу после приложения нагрузки

$$E\varepsilon_0 - E\rho a_0 z_1 = \sigma_T, \qquad E\varepsilon_0 - E\rho a_0 z_2 = -\sigma_T \tag{3.3}$$

Из уравнений (3.2) и (3.3) легко получить одно уравнение для определения a_0 в зависимости от приложенной нагрузки

$$a_0 \left[12h^2 - \frac{12P}{b\sigma_T} (a_0 + a_{00}) - 3 \left(\frac{P}{b\sigma_T}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{2\sigma_T}{E\rho} \tag{3.4}$$

Критическое состояние определится условием

$$dP / da_0 = 0 \tag{3.5}$$

Это соответствует максимальной нагрузке, которую может выдержать стержень при заданном a_{00}. Из (3.4), согласно (3.5), получим, что критический прогиб a^* определяется из условия

$$12h^2 - \frac{18P}{b\sigma_T} a^* - \frac{12P}{b\sigma_T} a_{00} - 3 \left(\frac{P}{b\sigma_T}\right)^2 = 0 \tag{3.6}$$

На основе (3.4) и (3.6) легко построить кривую P в зависимости от a_{00}, определяющую критические состояния.

Перейдем теперь к общему случаю. Вместо (3.3), используя уравнение (3.1), получим

$$E\dot{\varepsilon}_0 - E\rho (az_1)^{\cdot} = n\sigma_T, \qquad E\dot{\varepsilon}_0 - E\rho (az_2)^{\cdot} = -n\sigma_T \tag{3.7}$$

Из (3.2) и (3.7) легко получить уравнение для a, которое имеет вид

$$\frac{2n}{E\rho} \sigma_T = \frac{d}{dt} \left\{a \left[12h^2 - \frac{12P}{b\sigma_T} (a + a_{00}) - 3 \left(\frac{P}{b\sigma_T}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \tag{3.8}$$

Очевидно, что начальное условие будет определяться соотношением (3.4). Следовательно, решение уравнения (3.8) имеет вид

$$a\left[12h^2 - \frac{12P}{b\sigma_T}(a + a_{00}) - 3\left(\frac{P}{b\sigma_T}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{2\sigma_T}{E\rho}(tn + 1) \tag{3.9}$$

Критическое состояние, вернее, критическая амплитуда, определится из условия

$$da / dt = \infty \tag{3.10}$$

Если выполнить дифференцирование, то получим условие, совпадающее с (3.6). Таким образом, видно, что критическая амплитуда может быть определена и без решения задачи ползучести, как это и было указано выше для однопараметрических систем.

Условие (3.10) эквивалентно определению границы области, в которой существует решение уравнения (3.8). Действительно, из (3.9) следует, что при $t > t_1$, определяемым по уравнению (3.10), решения не существует. Заметим, что наложенное условие о наличии сразу после приложения нагрузки двух пластических областей по сечению стержня не сужает общности полученного решения.

Действительно, как это легко проверить выкладками, для случая, когда имеется только одна пластическая область, не говоря уже о чисто упругом состоянии, разрушения при конечной амплитуде может не быть. Решение в чисто упруго-вязкой области или при наличии одной пластической области получается совершенно аналогичными методами и при необходимости легко может быть воспроизведено и сопряжено с полученным решением для случая наличия двух пластических областей.

Поступила 3 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А. Р. Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких элементов. ДАН СССР, 1946, т. 52, вып. 25.
2. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., ИЛ, 1954.
3. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, № 3.
4. Rabotnov Y. N. The theory of creep and applications. «Plasticity». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, pp. 338—346.
5. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. 23, № 6.
6. Шестериков С. А. Выпучивание при ползучести. ПММ, 1961, т. 25, № 4.
7. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, 1961, № 6.
8. Куршин Л. М. Устойчивость пластинок в условиях ползучести. ПМТФ, 1962, № 2.
9. Hoff N. J. A survey of the theories of creep buckling. Proc. Third Nat. congr. Appl. Mech., 1958, pp. 29—49.
10. Gerard G. Classical columns and creep. J. Aero/Space Sci., 1962, т. 29, No 6.
11. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при неупругих деформациях. ПМТФ, 1961, № 3.
12. Hilton H. Creep collapse of viscoelastic colums with initial curvatures J. Aero Sci., 1952, т. 19, No 12.
13. Libov C. Creep buckling of columns. J. Aero, Sci. 1952, т. 19, № 7.
14. Odqvist F. K. G. Influence of primary creep on column buckling. J. Appl. Mech., 1954, т. 21, No 3.
15. Hoff N. J. Creep buckling. Aero Quart., 1956, т. 7, No 1.
16. Życzkowski M. Geometrically non — linear creep buckling of bars. Arch. Mech., 1960, т. 12, No 3.
17. Фрейис де-Вёбек В. Влияние высоких температур на авиационные конструкции. Оборонгиз, 1961.
18. Stowell E. Z. A inified theory for creep buckling under normal loads. J. Aero/space Sci., 1962, т. 29, No 6.