УДК 532.516

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

В. И. Найденов

(*Москва*)

Исследована система дифференциальных уравнений для скорости и температуры жидкости в плоском канале и круглой трубе в области стабилизированного теплообмена.

На стенках трубы заданы граничные условия второго рода, а для зависимости вязкости от температуры принята экспоненциальная функция. Рассмотрены условия возникновения одномерных неизотермических течений.

1. Большинство задач гидродинамики и теплообмена при течении жидкости в трубах усложняются тем обстоятельством, что за счет изменения вязкости по длине возникает поперечная компонента скорости [1,2]. Представляет интерес отыскание такого класса неизотермических течений, в котором одномерность потока не нарушается, несмотря на продольный градиент вязкости. Задача о теплообмене и гидравлическом сопротивлении, рассмотренная в [3], относится к указанному классу; цель настоящей работы — выявить некоторые общие закономерности, присущие упомянутым течениям.

Предположим, что вдали от входа в цилиндрическую трубу с достаточно гладким контуром поперечного сечения установился режим течения со следующими свойствами: 1) в направлении оси x поле скоростей одномерно, т. е. $v_x = v\,(y,\ z)$; 2) профили температур в каждом сечении $x = \mathrm{const}$ подобны друг другу, т. е. $t\,(x,\ y,\ z) = Ax + t_1(y,\ z)$ $(A \neq 0)$.

Далее примем, что вязкость потока аппроксимируется экспоненциальной функцией температуры

$$\mu / \mu_0 = e^{-\beta(t-t_0)} \qquad (\mu_0,\ \beta - \mathrm{const}) \tag{1.1}$$

Система уравнений движения и теплопередачи без учета диссипации имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y}\left[e^{-\alpha(X+\theta)}\frac{\partial U}{\partial Y}\right] + \frac{\partial}{\partial Z}\left[e^{-\alpha(X+\theta)}\frac{\partial U}{\partial Z}\right] \\
\frac{\partial P}{\partial Y} = -\alpha e^{-\alpha(X+\theta)}\frac{\partial U}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial Z} = -\alpha e^{-\alpha(X+\theta)}\frac{\partial U}{\partial Z} \\
\Delta\theta = \mathrm{Pe}\ U \qquad (\Delta = \partial^2 / \partial Y^2 + \partial^2 / \partial Z^2) \\
X = x / l, \qquad Y = y / l, \qquad Z = z / l, \qquad U = v / U_0 \\
\theta = t_1 / Al, \qquad P = pl / \mu_0 U_0, \qquad \mathrm{Pe} = U_0 l / a, \qquad \alpha = \beta A l
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь p — давление жидкости, a — коэффициент температуропроводности, U_0 — средняя по расходу скорость жидкости, l — характерный размер поперечного сечения.

Из первых трех уравнений системы (1.2) можно исключить скорость и получить уравнение для давления

$$\Delta P = -\alpha \partial P / \partial X \tag{1.3}$$

Выделяя экспоненциальный множитель $P\,(X,\ Y,\ Z) = F\,(Y,\ Z) \exp\,(-\alpha X)$, для функции $F\,(Y,\ Z)$ имеем

$$\Delta F = \alpha^2 F \tag{1.4}$$

Из второго и третьего уравнений системы (1.2) получаем

$$\frac{D\,(F,\ U)}{D\,(Y,\ Z)} = \frac{D\,(\theta,\ U)}{D\,(Y,\ Z)} \tag{1.5}$$

Так как скорость жидкости на границе области течения обращается в нуль, то из (1.5) следует, что по периметру контура и на изотермах функция $F\,(Y,\ Z)$ постоянна. Другими словами, для осуществления неизотермического течения со свойствами 1), 2) необходимо постоянство давления и скорости жидкости на изотермах потока.

После преобразований с учетом уравнений (1.3), (1.4) приведем систему (1.2) к виду

$$\frac{dU}{dF} = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha\theta}, \quad \frac{d^2\theta}{dF^2}\,|\,\mathrm{grad}\,F\,|^2 + \alpha^2 F \frac{d\theta}{dF} = \mathrm{Pe}\,U \tag{1.6}$$

Чтобы удовлетворялось второе уравнение системы (1.6), необходимо считать

$$|\operatorname{grad} F|^2 = \xi(F) \tag{1.7}$$

так как остальные члены зависят только от F.

Таким образом, для определения $F(Y, Z)$ имеем уравнение (1.4) с условием постоянства $F(Y, Z)$ на контуре поперечного сечения трубы и дополнительным условием (1.7). Решение этой задачи известно [4,5]: граничный контур и изотермы потока должны быть линиями постоянной кривизны.

На основании этих результатов можно утверждать, что одномерное неизотермическое течение жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры с учетом конвективного переноса тепла существует в плоском канале, в круглой трубе и между соосными круглыми трубами.

2. Уравнение (1.4) для течения жидкости в плоском канале и круглой трубе имеет точное решение, в связи с этим легко получить следующие системы уравнений: для плоского канала

$$\frac{dU}{dY} = -(B \operatorname{ch} \alpha Y + C \operatorname{sh} \alpha Y) e^{\alpha\theta}, \quad \frac{d^2\theta}{dY^2} = \mathrm{Pe}\, U \tag{2.1}$$

$$P(X, Y) = (C \operatorname{ch} \alpha Y + B \operatorname{sh} \alpha Y) e^{-\alpha X}$$

для круглой трубы

$$\frac{dU}{dR} = (BI_1(\alpha R) + CK_1(\alpha R)) e^{\alpha\theta} \tag{2.2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\theta}{dR} = \mathrm{Pe}\, U \qquad (R = \sqrt{X^2 + Y^2})$$

$$P(X, R) = (BI_0(\alpha R) + CK_0(\alpha R)) e^{-\alpha X}$$

Здесь $I_0(\alpha R)$, $I_1(\alpha R)$, $K_0(\alpha R)$, $K_1(\alpha R)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента.

Отметим некоторые следствия систем уравнений (2.1), (2.2).

Для напряжения силы трения потока в плоском канале и круглой трубе имеем соответственно

$$G / G_c = \operatorname{sh} \alpha Y / \operatorname{sh} \alpha, \quad G / G_c = I_1(\alpha R) / I_1(\alpha) \tag{2.3}$$

где G_c — напряжения силы трения на стенке.

Интересно, что зависимости (2.3) не содержат параметра Pe и полностью определяются заданием параметра α, пропорционального тепловой нагрузке стенки. При $\alpha \to 0$ из (2.3) получаются хорошо известные линейные зависимости.

При малых значениях α предположение, сделанное в [2], о замене действительного касательного напряжения линейным хорошо оправдывается, если тепловая нагрузка стенки не очень велика.

Для системы уравнений (2.1) можно указать имеющее физический смысл частное точное решение[1]. При $B = 0$, $|C| = -C$ непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функции

$$\theta = \frac{1}{\chi} \ln \frac{6\alpha^2}{\mathrm{Pe}\,|C|\operatorname{ch}^3 \alpha Y}, \qquad U = -\frac{3\alpha}{\mathrm{Pe}\operatorname{ch}^2 \alpha Y}$$

удовлетворяют (2.1).

Поступила 1 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Янг Ван-цзу.* Конвективный теплообмен при вынужденном ламинарном течении жидкости в трубах в случае переменной вязкости. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., «Теплопередача», 1962, № 4.
2. *Петухов Б. С., Попов В. П.* Теоретический расчет теплообмена и сопротивления трения при ламинарном течении в трубах несжимаемой жидкости с переменными физическими свойствами. Теплофизика высоких температур, 1963, т. 1, № 2.
3. *Найденов В. И.* Движение и теплопередача в трубах с учетом зависимости вязкости жидкости от температуры. ПМТФ, 1974, № 1.
4. *Регирер С. А.* Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
5. *Слезкин Н. А.* О геометрически подобных плоских потоках идеальной и вязкой жидкости. ПММ, 1936, т. 3, вып. 1.

[1] Найденов В. И. Некоторые задачи о движении несжимаемой жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры. Канд. дисс. М., ИПМ АН СССР, 1973.