

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ
И ПОЛЕЙ В ПОТОКАХ С УЗКИМИ СЛОЯМИ
ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА**

Е. К. Холщевникова

(Москва)

На основании решения, полученного методом Фурье, анализируется влияние узкого слоя, обладающего более высокой проводимостью, чем основная масса потока, на джоулеву диссипацию и распределение токов в концевой зоне плоского магнитогидродинамического канала с непроводящими стенками. Предполагается, что параметр МГД-взаимодействия, магнитное число Рейнольдса и параметр Холла малы. Показано, что узкий хорошо проводящий слой можно в ряде случаев заменить поверхностью разрыва, на которой выполняются вполне определенные соотношения между электрическими величинами. Наличие такого слоя приводит к увеличению джоулевой диссипации и к уменьшению длины линий тока.

Одной из перспективных схем магнитогидродинамических преобразователей энергии является схема с использованием неоднородного потока, представляющего собой непрерывный ряд последовательно чередующихся очень горячих и менее горячих зон [1,2]. Для такой схемы интересно выяснить влияние слоистого распределения проводимости рабочего тела на джоулеву диссипацию и электрические токи в канале. Существует значительное число работ, посвященных изучению электрических характеристик МГД-устройств в случае неоднородной проводимости. Общее решение стационарной задачи об электрическом поле в плоском МГД-канале с непроводящими стенками при произвольной зависимости магнитного поля и проводимости от продольной координаты было получено в работе [3]. В работе [4], где изучалось торможение недеформируемых проводящих сгустков, вычислялась джоулева диссипация, связанная с возникновением замкнутых вихревых токов в сгустке при его входе и выходе из магнитного поля. Соотношения между электрическими величинами при переходе через узкий слой плохо проводящей жидкости рассматривались в работе [5].

1. Рассмотрим плоский канал $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq h$ с непроводящими стенками (фиг. 1), по которому движется электропроводная среда, обладающая слоистой проводимостью: в областях 1 и 3 (менее горячие зоны) проводимость равна σ_1 , в области 2 (более горячая зона) проводимость равна σ_2 . Течение происходит в поперечном магнитном поле $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x))$ при слабом магнитогидродинамическом взаимодействии. В этом случае гидродинамические величины можно считать известными и решать только уравнения электродинамики. Пусть для простоты скорость движения среды постоянна $\mathbf{V} = V_x = \text{const}$. Кроме того, будем считать, что магнитное число Рейнольдса R_m и параметр Холла ωt малы. При сделанных предположениях распределения электрического тока \mathbf{j} и потенциала ϕ описываются уравнениями

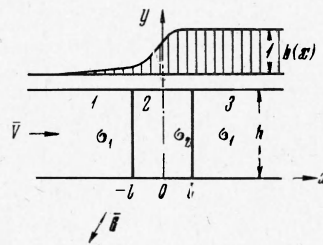
$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla\phi + c^{-1}\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (1.1)$$

Из (1.1) следует, что для ϕ справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.2)$$

В качестве граничных условий на стенках будем иметь условия непротекания нормального тока

$$j_y = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{1}{c} V_x B_z(x) \quad \text{при } y = 0, h \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} x &= x^{\circ}h, & y &= y^{\circ}h, & l &= l^{\circ}h, & V &= vV^* \\ v &= 1, & B &= bB^*, & \sigma &= \sigma^{\circ}\sigma_1, & \varepsilon &= \sigma_1/\sigma_2 \\ \varphi &= \varphi^{\circ} \frac{V^*B^*h}{c}, & j &= j^{\circ} \frac{\sigma_1 V^*B^*}{c}, & Q &= Q^{\circ} \frac{\sigma_1 V^{*2} B^{*2} h^2}{c^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь V^* и B^* — характерные скорость и индукция магнитного поля, а Q — джоулева диссипация. Для удобства градус у безразмерных величин опустим. Введем вспомогательный потенциал

$$\psi = \varphi + b(x)y \quad (1.5)$$

Для функции ψ граничное условие (1.3) на стенках однородно. Решение задачи нетрудно найти методом Фурье, представляя искомую функцию $\psi(x, y)$ в каждой из областей 1, 2, 3 в виде ряда

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y) &= \sum_{v=1}^{\infty} \psi_{vi}(x) \cos(2r_v y) + \frac{b(x)}{2} \quad (i = 1, 2, 3) \\ r_v &= \frac{1}{2}\pi(2v - 1) \quad (v = 1, 2, \dots, n, \dots) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.2), для функций $\psi_{vi}(x)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, которые вместе с граничными условиями, следующими из ограниченности потенциала на $\pm\infty$ и неразрывности нормального тока j_x и касательной составляющей напряженности электрического поля $E_y = -\partial\varphi/\partial y$ на линиях разрыва $x = -l$ и $x = +l$, позволяют найти решение задачи.

Полученное решение позволяет проанализировать характер изменения электрических величин при переходе через полосу $(-l, l)$ в том случае, когда ширина полосы мала $l \rightarrow 0$, а проводимость σ_2 достаточно велика ($\varepsilon \rightarrow 0$) при различных значениях отношения l/ε .

2. Выделим в полосе $(-l, l)$ элементарный объем единичной ширины длиной $2l$ и высотой dy . Для этого объема справедливо интегральное уравнение

$$\int_v \operatorname{div} \mathbf{j} dv = 0$$

или по теореме Гаусса — Остроградского

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j} ds = 0 \quad (2.1)$$

Из (2.1) можно получить соотношение

$$j_x(-l, y) - j_x(+l, y) = \frac{d}{dy} \int_{-l}^{+l} j_y(x, y) dx = \frac{dI}{dy} \quad (2.2)$$

где I — ток, протекающий через поперечное сечение полосы. Подставляя в (2.2) выражение для j_y , полученное из (1.1), будем иметь

$$\frac{dI}{dy} = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-l}^{+l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dx \quad (2.3)$$

Если функция $b(x)$, определяющая зависимость магнитного поля от продольной координаты, всюду непрерывна и ограничена вместе со своими производными $b'(x)$ и $b''(x)$, то из решения, найденного в п. 1, в результате

предельного перехода при $l \rightarrow 0$ получим

$$j_y(0, y) = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{K \sin(2r_v y)}{r_v^2 (1 + 2r_v l / \varepsilon)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, y) = -\varepsilon j_y(0, y) - b(0) \quad (2.4)$$

$$j_x(-l, y) - j_x(l, y) = \frac{2l}{\varepsilon} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{K \cos(2r_v y)}{r_v (1 + 2r_v l / \varepsilon)}, \quad I = 2l j_y(0, y) \quad (2.5)$$

$$K = 4r_v \left[r_v \left(\int_{-\infty}^0 b(x) \exp(2r_v x) dx + \int_0^{\infty} b(x) \exp(-2r_v x) dx \right) - b(0) \right] \quad (2.6)$$

Из предельного перехода также следует, что разность $\partial \varphi / \partial y(l, y) - \partial \varphi / \partial y(-l, y) \sim l$ и стремится к нулю при $l \rightarrow 0$. Такой же вывод можно сделать относительно разности значений потенциала φ на границах полосы, так как задача симметрична относительно линии $y = 1/2$.

Сопоставляя выражения (2.4) и (2.5), приходим к соотношению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(l, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-l, y) = -\frac{2l}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, y) \quad (2.7)$$

Заметим, что согласно второму равенству (2.5) плотность тока $j_y(x, y)$ слабо меняется вдоль полосы. Отсюда следует, что соотношение (2.7) можно получить непосредственно из равенств (2.2) и (2.3), заменяя стоящие в них интегралы произведениями подынтегральных функций, взятых в центре полосы, на ширину полосы. В тех случаях, когда $j_y(x, y)$ сильно меняется вдоль полосы (например, в случае разрыва магнитного поля во внутренней точке полосы), такой замены сделать нельзя, и соотношение (2.7) может не выполняться. Аналогичное условие было ранее получено Шерклифом (см. [6]) при анализе граничных условий на тонких хорошо проводящих неподвижных стенках, контактирующих с одной стороны с проводящей жидкостью, а с другой — с неподвижным непроводящим пространством. Рассматривалось влияние контактного сопротивления между жидкостью и стенкой. Так как условие (2.7) имеет ту же структуру, что и условие, полученное Шерклифом, будем называть условием Шерклифа.

Как видим, при наличии узкой полосы, обладающей очень высокой проводимостью, одно из обычных соотношений на разрыве — непрерывность касательной составляющей напряженности электрического поля — остается справедливым во всех случаях, а второе соотношение — непрерывность нормальной к разрыву составляющей плотности тока — нарушается, когда отношение l / ε конечно или стремится к бесконечности. Этот результат в данном случае не должен вызывать недоумения, так как традиционный вывод условия $\{j_n\} = 0$ предполагает ограниченность величины j_x на поверхности разрыва, а в рассматриваемом примере j_y во внутренних точках полосы неограниченно возрастает.

Полагая $l / \varepsilon \rightarrow \infty$, из (2.4) будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, y) + b(0) = 0 \quad (2.8)$$

Так как координата $x = 0$ совпадает со средней линией полосы, то из (2.8) следует, что для полосы находится вне магнитного поля на ней

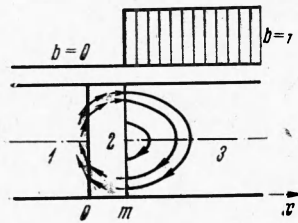
$$\varphi = \text{const} \quad (2.9)$$

Такое граничное условие обычно задается на электродах.

Итак, при решении магнитогидродинамических задач о течениях потоков с узкими слоями хорошо проводящей среды можно поступать следующим образом: если $l / \varepsilon \rightarrow 0$, то расчет производится как обычно, без учета этих слоев; если отношение l / ε конечно или стремится к бесконечности, то такие слои заменяются поверхностями разрыва, на которых выполняются условия $\{\partial \varphi / \partial y\} = 0$ и одно из условий (2.7), (2.8) или (2.9) в зависимости от величины отношения l / ε и значения $b(0)$. Из изложенного выше ясно, что данные рекомендации можно использовать только в тех случаях, когда функции $b(x)$, $b'(x)$ и $b''(x)$ непрерывны и ограничены во внутренних точках слоев с высокой проводимостью.

Отметим следующее обстоятельство. Как указывалось в п. 1, решение задачи было получено без учета индуцированных магнитных полей. Однако проводимость σ_2 полосы $(-l, l)$ считается достаточно высокой, так что $R_m(\sigma_2)$ может быть, вообще говоря, значительно больше единицы. Поэтому было необходимо произвести оценку индуцированного магнитного поля B_i , которое может быть вызвано токами, протекающими по полосе. Непосредственная оценка индуцированного магнитного поля по вычисленным токам показала, что независимо от проводимости σ_2 полосы во всех рассмотренных случаях $B_i \ll B$ и, следовательно, его можно не учитывать при расчетах. Это связано со следующими особенностями протекания токов в концевых зонах магнитного поля. Величина тока I , протекающего по полосе, зависит от положения полосы по отношению к приложенному полю. Если полоса находится в центре концевых токов ($K = 0$), то по ней ток не протекает. Если полоса находится слева от центра ($K > 0$) или справа от него ($K < 0$), то ток, протекающий по хорошо проводящей полосе, проходит также по смежным областям со значительно меньшей проводимостью, и суммарное сопротивление на пути тока оказывается достаточно большим.

3. Оценим влияние хорошо проводящего слоя, расположенного в среде с меньшей проводимостью, на величину джоулевой диссипации Q .



Фиг. 2

Известно, что величина Q в канале с непроводящими стенками определяется формулой [3]

$$Q = -2a \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j_y b dx dy \quad (3.1)$$

где $2a$ — ширина канала.

Подставляя в (3.1) выражения (1.1), (1.5) и (1.6), получаем

$$Q = -4a\sigma \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\nu}(x) b(x) dx \quad (3.2)$$

В ряде работ, выполненных ранее, было показано, что чем круче спадает магнитное поле в зонах входа и выхода, тем большие концевые токи протекают в канале. Поэтому представляется целесообразным в качестве примера рассмотреть модельную задачу со ступенчатой зависимостью магнитного поля от продольной координаты. Пусть полоса $(-l, l)$ находится на некотором расстоянии m от места скачка магнитного поля (фиг. 2). Разобьем канал на три области, как показано на фиг. 2. Так же как и раньше, решение для функции $\psi(x, y)$ в каждой из областей ищем в виде ряда (1.6). Для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые получаются в процессе решения, используем условия на разрывах и условия ограниченности потенциала на $\pm \infty$. При этом на линии $x = m$ используются обычные соотношения на разрывах, а на линии $x = 0$ используются условия $\{\partial\psi / \partial y\} = 0$ и условие Шерклифа (2.7). В результате для джоулевой диссипации будем иметь

$$Q = 2a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_{\nu}^3} - a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(2r_{\nu}m)(1 + 4r_{\nu}l/\varepsilon) + \text{ch}(2r_{\nu}m)}{r_{\nu}^3(1 + 2r_{\nu}l/\varepsilon)[\text{sh}(2r_{\nu}m) + \text{ch}(2r_{\nu}m)]} \quad (3.3)$$

Рассмотрим предельные случаи.

Первый предельный случай

$$\frac{l}{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad Q = a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_{\nu}^3}$$

Полученное решение совпадает с решением соответствующей задачи при отсутствии хорошо проводящей полосы.

Второй предельный случай

$$\frac{\varepsilon}{l} \rightarrow 0, \quad Q = 2a \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_{\nu}^3 [1 + \text{th}(2r_{\nu}m)]}$$

В этом случае при $m \rightarrow 0$ величина Q будет максимальна и равна

$$Q = 2a \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^3}$$

Заметим, что предельный переход $m \rightarrow 0$ соответствует такому бесконечно близкому положению полосы $(-l, l)$ к месту скачка магнитного поля, при котором магнитное поле во внутренних точках полосы не терпит разрыва.

Третий предельный случай

$$m \rightarrow \infty, \quad Q = a \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{r_v^3}$$

Как видим, хорошо проводящий слой приводит к увеличению джоулевой диссипации; его влияние тем больше, чем ближе он расположен к месту скачка магнитного поля. При $m \rightarrow \infty$ слой не оказывает никакого влияния на Q , так как концевые токи существенно отличны от нуля на расстояниях порядка калибра (h) от места резкого изменения магнитного поля.

4. Проанализируем влияние хорошо проводящего узкого слоя на распределение токов в канале. Пусть, например, слой $(-l, l)$ расположен слева от центра концевых токов, где $K > 0$, и по нему протекает ток I в положительном направлении оси y . Замечая, что функция $\cos(2r, y)$ — нечетная относительно линии $y = 1/2$, из (2.5) получим

$$\begin{aligned} j_x(-l, y) - j_x(l, y) &> 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < 1/2 \\ j_x(-l, y) - j_x(l, y) &< 0 \quad \text{при} \quad 1/2 < y < 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как $j_x \leq 0$ при $0 < y < 1/2$, $|x| < \infty$ и $j_x \geq 0$ при $1/2 < y < 1$, $|x| < \infty$, то из неравенств (3.4) и из непрерывности величин $\partial\phi/\partial y$ и b при переходе через узкий слой следует, что деформация линий тока будет такой, как показано на фиг. 2. Из фигуры видно, что хорошо проводящий слой приводит к уменьшению длины линии тока, так как линия тока как бы поджимается к слою.

Решения задач, рассмотренных в п. 1 и в п. 3, показывают, что при $\varepsilon/l \rightarrow 0$ концевые токи замыкаются по слою, т. е. в данном случае в области I токи протекать не будут. Если $l/\varepsilon \rightarrow 0$, то картина линий тока будет такой же, как и при отсутствии хорошо проводящего слоя. Обычная картина течения токов в канале не будет нарушаться и в том случае, когда слой находится достаточно далеко от области изменения магнитного поля.

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина за ценные советы и обсуждения.

Поступила 13 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Девим Р., Лекроар Г., Зетвуг П. Преобразование энергии в неоднородном потоке. Опыты по модуляции температуры путем использования эффекта Джоуля в продуктах сгорания. В сб. «Магнитогидродинамическое преобразование энергии», Тр. междунар. симпоз., Париж, 1964, ч. 1, М., ВИНТИ, 1966, стр. 417.
2. Фрайденрайх Н., Медин С. А., Тринг М. В. Возможности МГД-генератора со «слоевым» потоком рабочего тела. В сб.: «Магнитогидродинамическое преобразование энергии», Тр. междунар. симпоз., Париж, 1964., ч. 1, М., ВИНТИ, 1966, стр. 425.
3. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Электрические поля в каналах магнитогидродинамических устройств. В кн. Дж. Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода», М., «Мир», 1965.
4. Ватажин А. Б. Торможение проводящих сгустков, движущихся по каналам в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. Регирер С. А., Руткевич И. М. Электрическое поле в магнитогидродинамическом канале при движении среды с переменной электропроводностью. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
6. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965, стр. 30, 47.