

УДК 551.466.81

ГЕНЕРАЦИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики РАН, 117126 Москва

Спектральным методом построено точное решение линеаризованной граничной задачи генерации монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной вязкой жидкости. Источником волн служит часть плоскости, совершающая продольные колебания. Полное решение задачи представляет два типа движений: уходящие одномодальные или бимодальные пучки внутренних волн и пограничные течения на излучающей поверхности. Проведено сравнение точного решения с решением модельной задачи генерации волн силовыми источниками, построенными по теории однородной жидкости. Фазовые картины волн в обоих случаях совпадают везде, за исключением критических углов, когда волна распространяется вдоль излучающей поверхности. Амплитуды излучаемых волн согласуются только при некоторых углах наклона плоскости.

Введение. Задача генерации течений и волн периодическим источником, которая является традиционной как для однородной, так и для стратифицированной идеальной [1] или вязкой жидкости [2, 3], изучается экспериментально и теоретически [4, 5]. Традиционно в теории излучения внутренних волн реальное тело заменяется распределением силовых [6] или массовых [7] источников, характеристики которых находятся из решения задачи о движении данного тела в однородной жидкости. При этом предполагается, что поскольку стратификация является слабой (размеры тела много меньше масштаба плавучести), рассчитанные параметры источников будут сохраняться в неоднородной среде. Структуры волнового пучка в этих моделях качественно согласуются с наблюдениями, абсолютные значения смещений в рамках такого подхода зависят от эмпирических констант [8].

Особо следует выделить статьи [9, 10], которые явились развитием более ранних работ [11, 12] одного из авторов. В них проводится вычисление периодических внутренних волн, излучаемых колеблющимся эллиптическим цилиндром в идеальной и вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости. В идеальной жидкости решения, удовлетворяющие условию непротекания на поверхности тела, расходятся на характеристиках. Полученные результаты берутся за основу при построении приближенного решения в вязкой среде. При этом в точном решении для идеальной жидкости, представленном в виде интеграла Фурье, производится замена корней дисперсионного уравнения идеальной жидкости на корни дисперсионного уравнения вязкой жидкости. Построенное решение не удовлетворяет условиям прилипания и не описывает пограничный слой на поверхности тела. Рассчитанная волновая картина [10] удовлетворительно согласуется с измерениями [7]. Между сформировавшимся волновым пучком и колеблющимся телом наблюдаются пограничные течения и более сложные вихревые движения [7].

Целью данной работы является построение точного решения задачи возбуждения движений однородной и экспоненциально стратифицированной вязкой жидкости. В качестве источника движений жидкости выбирается бесконечная плоскость, часть которой совершает продольные колебания. Рассматривается линеаризованная задача, учитывающая существование только пограничных течений вблизи тела и периодических движений в тол-

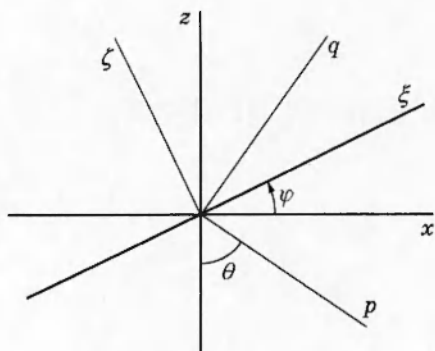


Рис. 1. Системы координат задачи:
 (x, z) — лабораторная; (ξ, ζ) — локальная, связанная с излучающей плоскостью;
 (p, q) — сопутствующая, связанная с излучаемым пучком

ще жидкости. Точное решение сравнивается с решением, полученным на основе замены колеблющегося тела совокупностью силовых источников.

1. Уравнения движения и граничные условия. Система линеаризованных гидродинамических уравнений, описывающая излучение и распространение двумерных внутренних волн, возбуждаемых силовыми источниками, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_0 \nu \Delta v_x + f_x, & \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 \nu \Delta v_z - \rho g + f_z, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_z \frac{d\rho_0}{dz} &= 0, & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x и z — горизонтальная и вертикальная координаты; $\rho_0(z)$ — невозмущенное распределение плотности; ρ , P и (v_x, v_z) — переменные плотность, давление и скорость соответственно; ν — кинематическая вязкость; g — ускорение свободного падения в отрицательном направлении оси z ; (f_x, f_z) — распределение возбуждающих волны силовых источников; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ — двумерный оператор Лапласа. Для функции тока Ψ такой, что $v_x = -\partial\Psi/\partial z$, $v_z = \partial\Psi/\partial x$, в приближении Буссинеска система (1) сводится к уравнению

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta + \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 - N^2(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right),$$

где $N^2(z) = -g[d \ln \rho_0(z)/dz]$ — квадрат частоты плавучести.

В дальнейшем будет использоваться система координат (ξ, ζ) , связанная с излучающей поверхностью (ось ξ находится в этой плоскости, составляющей угол φ с горизонтом, ось ζ нормальна к ней (рис. 1)). Ниже везде предполагается, что движение источника монохроматическое, так что $v(\xi, t) = v_0(\xi) e^{-i\omega t}$, общий множитель $e^{-i\omega t}$ далее опускается. Кроме того, считается, что жидкость стратифицирована экспоненциально и частота плавучести N не зависит от z . Учитывая сказанное, получим уравнение внутренних волн в координатах (ξ, ζ)

$$\left[\omega^2 \Delta - N^2 \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 - i\omega \nu \Delta^2 \right] \Psi(\xi, \zeta) = -\frac{i\omega}{\rho_0} \left(\frac{\partial f_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_\zeta}{\partial \xi} \right), \quad (2)$$

где лапласиан $\Delta = \partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \zeta^2$.

Возбуждающая движение бесконечная плоскость составляет произвольный угол φ с горизонтом (рис. 1) и обладает анизотропными механическими свойствами: бесконечно жесткая в поперечном направлении и деформируемая в продольном. В целом плоскость покоится, но некоторая ее часть совершает продольные осцилляции по заданному закону $v(\xi, t)$, где t — время. Граничные условия для скорости (v_ξ, v_ζ) есть

$$v_\xi \Big|_{\zeta=\pm 0} = v(\xi, t), \quad v_\zeta \Big|_{\zeta=\pm 0} = 0. \quad (3)$$

Далее уравнение (2) решается для однородной жидкости ($N = 0$) с граничным условием (3) в отсутствие силовых источников ($f_\xi = f_\zeta = 0$). Затем находится его решение при наличии силовых источников, распределение которых подбирается из условия совпадения полученных результатов. Рассчитанное распределение силовых источников подставляется в уравнение (2) для стратифицированной жидкости ($N \neq 0$). Наконец, это уравнение решается с граничными условиями (3) для стратифицированной жидкости и производится сравнение построенного точного решения с результатом расчета при наличии силовых источников.

2. Периодическое движение плоскости в однородной жидкости. В однородной жидкости уравнение (2) приводится к виду

$$(\omega - i\nu\Delta)\Delta\Psi = 0. \quad (4)$$

Его ограниченное на бесконечности решение ищется в форме разложения Фурье по плоским волнам

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \{A^\pm(k) \exp[\pm ik_1(k)\zeta] + B^\pm(k) \exp[\pm ik_2(k)\zeta]\} e^{ik\xi} dk, \quad (5)$$

при этом знак «+» в (5) соответствует положительным ζ , а знак «-» — отрицательным и должны выполняться условия затухания возмущений на бесконечности $\text{Im } k_1(k) > 0$, $\text{Im } k_2(k) > 0$. Подставляя (5) в (4), получим дисперсионные уравнения, связывающие k_1 , k_2 и k :

$$k_1^2 + k^2 = 0, \quad k_2^2 + k^2 = i\omega/\nu,$$

решения которых есть

$$k_1(k) = i|k|, \quad k_2(k) = \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + \nu^2 k^4} - \nu k^2}{2\nu}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + \nu^2 k^4} + \nu k^2}{2\nu}}. \quad (6)$$

Корню $k_2(k)$ при не слишком больших значениях k (приближение малой вязкости) соответствует пограничное течение с характерным поперечным масштабом $\sqrt{2\nu/\omega}$. Вследствие отсутствия действительной части у корня $k_1(k)$ в соответствующей компоненте возмущения не происходит переноса энергии, т. е. это периодическое движение не носит волновой характер. Наличие ненулевых мнимых частей в k_1 и k_2 обеспечивает сходимость интегралов в (5) и аналитичность получаемых решений во всем пространстве.

Выражая через функцию тока (5) компоненты скорости и подставляя их в граничные условия (3), получим систему линейных уравнений относительно $A^\pm(k)$ и $B^\pm(k)$, решение которой есть

$$A^\pm(k) = -B^\pm(k) = \mp \frac{iV(k)}{k_2 - k_1}, \quad (7)$$

где

$$V(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (8)$$

Если плоскость колеблется как целое, когда v_0 от ξ не зависит, из (8) имеем $V(k) = v_0\delta(k)$, где δ — дельта-функция Дирака. Подстановка этого соотношения в (6), (7) дает выражения для компонент скорости быстро затухающего пространственно-периодического течения

$$v_\xi = v_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\zeta\right] \exp\left[i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\zeta - \omega t\right)\right], \quad v_\zeta = 0,$$

с точностью до обозначений совпадающего с классическими решениями Стокса и Рэлея [2].

Если возбуждение движений жидкости производится осциллирующей тонкой пластиной шириной a , то

$$v_0(\xi) = \begin{cases} v_0, & |\xi| < a/2, \\ 0, & |\xi| > a/2 \end{cases} \quad (9)$$

и спектральная плотность

$$V(k) = \frac{v_0}{\pi k} \sin \frac{ka}{2}. \quad (10)$$

Подстановка (10) в (7) дает выражения для компонент скорости в виде интегралов, которые не могут быть взяты аналитически и должны считаться численно. Если ширина пластины $a \rightarrow \infty$, то, как следует из (10), $V(k) \rightarrow v_0 \delta(k)$ и получается решение, соответствующее плоскости, осциллирующей как целое.

Таким образом, задача о возбуждении инфинитезимальных периодических течений в вязкой однородной жидкости колеблющейся частью плоскости допускает точное решение в квадратурах, в частных случаях совпадающее с известными результатами [2].

3. Силовые источники в однородной жидкости. Поскольку в данной задаче взаимодействие осциллирующей плоскости с жидкостью происходит только за счет компоненты сил вязкого трения, параллельных плоскости, структура силовых источников задается выражением

$$f_\xi = F(\xi)\delta(\zeta), \quad f_\zeta = 0, \quad (11)$$

где δ — дельта-функция; $F(\xi)$ — искомое распределение силовых источников вдоль плоскости.

С учетом (2) и (11) для функции тока получим уравнение

$$\rho_0[\omega - i\omega\nu\Delta]\Delta\Psi(\xi, \zeta) = -iF(\xi)\delta'(\zeta),$$

где штрих означает производную по аргументу. Его решение можно представить в виде

$$\Psi = -i \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi') \frac{\partial G_0(\xi - \xi', \zeta)}{\partial \zeta} d\xi', \quad (12)$$

где $G_0(\xi, \zeta)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\rho_0[\omega - i\omega\nu\Delta]\Delta G_0(\xi, \zeta) = \delta(\xi)\delta(\zeta). \quad (13)$$

Функцию Грина будем искать в форме

$$G_0 = \Theta(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} [G_1^+(k) e^{ik_1\zeta} + G_2^+(k) e^{ik_2\zeta}] e^{ik\xi} dk + \\ + \Theta(-\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} [G_1^-(k) e^{-ik_1\zeta} + G_2^-(k) e^{-ik_2\zeta}] e^{ik\xi} dk, \quad (14)$$

где Θ — единичная функция Хевисайда. Подставляя (14) в (13) и приравнивая коэффициенты при производных соответствующего порядка от $\delta(\zeta)$, получим систему уравнений, которая имеет решение

$$G_m^+(k) = G_m^-(k) = -\frac{(-1)^m}{4\pi\rho_0\nu(k_2^2 - k_1^2)k_m}, \quad (15)$$

где k_1 и k_2 задаются формулами (6).

Введем спектральную плотность силовых источников $D(k)$ формулами

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(k) e^{ik\xi} dk, \quad D(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi,$$

с помощью которых можно найти функцию тока Ψ , подставляя их вместе с (14) в (12):

$$\Psi = 2\pi\Theta(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} D(k) [k_1 G_1^+ e^{ik_1\zeta} + k_2 G_2^+ e^{ik_2\zeta}] e^{ik\xi} dk - \\ - 2\pi\Theta(-\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} D(k) [k_1 G_1^- e^{-ik_1\zeta} + k_2 G_2^- e^{-ik_2\zeta}] e^{ik\xi} dk.$$

Сравнивая это выражение с общим решением (5), учитывая соотношения (7) и (15), получаем, что выражения для функций тока совпадают, если спектральная плотность силовых источников имеет вид

$$D(k) = -2i\rho_0\nu(k_1 + k_2)V(k), \quad (16)$$

где $V(k)$ — спектральное представление распределения скоростей плоскости (8).

Таким образом, в однородной вязкой жидкости описание движений, индуцируемых колеблющейся пластиной, может быть проведено как с помощью точного решения уравнения (4) с граничными условиями (3), так и с помощью решения задачи с силовыми источниками, плотность которых определяется формулой (16), т. е. в однородной жидкости эти описания являются эквивалентными.

В соответствии с общепринятым подходом [4, 6] полученные выражения для плотности силовых источников будут использованы в п. 4 для вычисления возмущений в стратифицированной жидкости, включающих поле внутренних волн и пограничные течения.

4. Силовые источники в стратифицированной жидкости. Движения, возбуждаемые силовыми источниками в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости, в соответствии с (2) и (11) описываются неоднородным уравнением

$$\left[\omega^2 \Delta - N^2 \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 - i\omega\nu \Delta^2 \right] \Psi = -\frac{i\omega}{\rho_0} F(\xi) \delta'(\zeta),$$

а пространственный спектр функции $F(\xi)$ задается формулой (16). Решение этого уравнения есть

$$\Psi = -\frac{i\omega}{\rho_0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi') \frac{\partial G(\xi - \xi', \zeta)}{\partial \zeta} d\xi', \quad (17)$$

где функция Грина $G(\xi, \zeta)$ ищется в форме

$$G = \Theta(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} [G_w^+(k) e^{i\alpha_w^+ \zeta} + G_b^+(k) e^{i\alpha_b^+ \zeta}] e^{ik\xi} dk + \\ + \Theta(-\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} [G_w^-(k) e^{i\alpha_w^- \zeta} + G_b^-(k) e^{i\alpha_b^- \zeta}] e^{ik\xi} dk. \quad (18)$$

Здесь волновые числа $\alpha(k)$ есть решения дисперсионного уравнения внутренних волн, которое в системе координат, связанной с излучающей плоскостью (рис. 1), имеет вид

$$\omega^2(\alpha^2 + k^2) - N^2(\alpha \sin \varphi - k \cos \varphi)^2 + i\omega\nu(\alpha^2 + k^2)^2 = 0. \quad (19)$$

Индексация корней выбирается таким образом, что $\text{Im } \alpha_w^+ > 0$, $\text{Im } \alpha_b^+ > 0$, $\text{Im } \alpha_w^- < 0$, $\text{Im } \alpha_b^- < 0$. В случае малой вязкости приближенные выражения для α_j можно записать в форме [13]

$$\alpha_w^\pm(k) = \mp |k| \text{ctg}(\theta \mp \lambda\varphi) \pm \frac{i\nu |k|^3}{2N \cos \theta \sin^4(\theta \mp \lambda\varphi)}, \quad (20)$$

$$\alpha_b^\pm(k) \approx -\alpha_b^\mp = (\mu + i) \sqrt{\frac{N |\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi|}{2\nu \sin \theta}},$$

где $\lambda = \text{sign}(k)$; $\mu = \text{sign}(\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi)$; $\theta = \arcsin(\omega/N)$ — угол, который составляют с горизонтом линии центров пучков внутренних волн.

Из выражений (20) следует, что корням α_w^\pm соответствуют бегущие внутренние волны [3], а корням α_b^\pm — пограничные течения с масштабом $\lambda_b = \sqrt{2\nu \sin \theta / (N |\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi|)}$ [13].

Асимптотические решения (20) расходятся на критических углах $\varphi = \pm\theta$, когда излучаемая волна распространяется вдоль плоскости. Как показано в [13], решения дисперсионного уравнения остаются конечными и в окрестности критических углов. Соответствующие выражения будут приведены ниже.

Спектральные компоненты функции Грина (18) имеют вид

$$G_w^\pm(k) = \pm \frac{1}{2\pi\omega\nu(\alpha_w^\pm - \alpha_w^\mp)(\alpha_w^\pm - \alpha_b^+)(\alpha_w^\pm - \alpha_b^-)}, \quad (21)$$

$$G_b^\pm(k) = \mp \frac{1}{2\pi\omega\nu(\alpha_b^\pm - \alpha_b^\mp)(\alpha_b^\pm - \alpha_w^+)(\alpha_b^\pm - \alpha_w^-)}.$$

Подставляя (18) и (21) в (17), с учетом (16) получим, что функция тока имеет такой же вид, что и функция Грина (18) со спектральными плотностями:

$$A_w^+(k) = \frac{2i\alpha_w^+(k_1 + k_2)V(k)}{(\alpha_w^+ - \alpha_w^-)(\alpha_w^+ - \alpha_b^+)(\alpha_w^+ - \alpha_b^-)}.$$

Остальные компоненты имеют аналогичный вид. Здесь k_1 и k_2 определены формулами (6).

Внутренние волны от локализованного источника образуют четыре пучка, составляющих угол θ с горизонтом. Далее рассматривается один пучок, идущий вправо и вверх, с которым связана сопутствующая система координат (p, q) , показанная на рис. 1. Переходя к этой системе координат, для волнового поля получим выражение

$$\Psi_w = (1 + i) \frac{\cos(\theta - \varphi)}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\nu \sin \theta}{2N}} \int_0^\infty V[k \sin(\theta - \varphi)] \exp\left[ikp - \frac{\nu k^3 q}{2N \cos \theta}\right] dk, \quad (22)$$

справедливое при $\theta - \pi < \varphi < \theta$. Аналогичным образом для пограничного течения получаем

$$\Psi_b = \frac{(1 + i) \sin \theta}{\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi} \sqrt{\frac{2\nu \sin \theta}{N}} v_0(\xi) \exp\left(-\frac{i\mu\xi}{\lambda_b} - \frac{\xi}{\lambda_b}\right) \quad (23)$$

с введенным ранее масштабом λ_b . Движения в пространственно осциллирующем пограничном течении экспоненциально убывают с удалением от плоскости. Их пространственная структура вдоль излучающей плоскости повторяет зависимость $v_0(\xi)$. Полученные решения справедливы не для всех углов φ , поскольку, как следует из (20), волновые числа α_j имеют особенности при $\sin \varphi = \pm \sin \theta$.

Случаи $\varphi = \pi - \theta$ и $\varphi = \theta$, когда рассматриваемый пучок распространяется вдоль плоскости и не является свободным, далее рассматриваться не будут. При $\varphi = -\theta$ пучок отрывается от плоскости и распространяется свободно. В такой ситуации для волновых чисел α_j можно записать выражения [13]

$$\begin{aligned} \alpha_w^+(k) &= -2k \operatorname{ctg} 2\theta + \frac{i\nu k^3}{2N \cos \theta \sin^4 \theta}, & \alpha_i^+(k) &= i \left(\frac{2kN \cos \theta}{\nu} \right)^{1/3}, \\ \alpha_w^-(k) &= -\frac{\sqrt{3} + i}{2} \left(\frac{2kN \cos \theta}{\nu} \right)^{1/3}, & \alpha_b^-(k) &= \frac{\sqrt{3} - i}{2} \left(\frac{2kN \cos \theta}{\nu} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом этих выражений описание волнового поля пучка совпадает с (22), если в последнем положить $\varphi = -\theta$.

Полученное решение описывает как поле внутренних волн, структура которого совпадает с известными решениями [3, 5], так и пограничные течения (23). Аналогичные эффекты наблюдаются не только при генерации, но и при отражении внутренних волн от жесткой плоскости, когда пограничные течения вносят заметный вклад в энергетику процесса [14].

5. Периодическое движение плоскости в стратифицированной жидкости.

При описании движений, возбуждаемых в стратифицированной жидкости осциллирующей плоскостью, необходимо решить уравнение (2) с нулевой правой частью и граничными условиями (3). Его решение также ищется как разложение по плоским волнам (18) со спектральными функциями $B_w^\pm(k)$ и $B_b^\pm(k)$, определяемыми из граничных условий

$$B_w^+(k) = -B_b^+(k) = \frac{iV(k)}{\alpha_w^+ - \alpha_b^+}, \quad B_w^-(k) = -B_b^-(k) = \frac{iV(k)}{\alpha_w^- - \alpha_b^-}. \quad (25)$$

Спектральные функции и внутренних волн, и пограничных течений одинаковы, что свидетельствует о сопоставимости этих форм движения, по крайней мере около тела, и необходимости учета вклада пограничных течений в потери энергии.

В невырожденном случае $\varphi \neq \pm\theta$ выражение для излучаемых внутренних волн имеет наиболее простой вид в сопутствующей системе координат (p, q) , в которой ось q совпадает с линией центров излучаемого пучка:

$$\Psi_{i,j} = -(1 + i\mu) \sqrt{\frac{\nu \sin \theta}{2N} \left| \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)} \right|} \int_0^\infty V[k \sin(\theta - \varphi)] \exp \left[ikp - \frac{\nu k^3 q}{2N \cos \theta} \right] dk. \quad (26)$$

В особом случае $\varphi = -\theta$, используя (24) и (25), получим

$$\Psi_w = - \left(\frac{\nu \sin^2 2\theta}{2N \cos \theta} \right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{V(k \sin 2\theta)}{k^{1/3}} \exp \left[ikp - \frac{\nu k^3 q}{2N \cos \theta} \right] dk. \quad (27)$$

Волновое поле уходящего пучка также остается конечным.

Таким образом, в невырожденном случае $\varphi \neq \pm\theta$ пространственная структура волнового пучка и пограничного течения совпадает с решением для силовых источников. Для сравнения точного решения с модельным вводятся функции $\beta_w(\varphi)$ и $\beta_b(\varphi)$, равные отношениям соответствующих амплитуд в выражениях для волновых пучков и пограничных течений

$$\beta_w(\varphi) = \frac{\cos(\theta - \varphi)}{\cos \theta} \sqrt{\left| \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} \right|}, \quad \beta_b(\varphi) = \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{|\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi|}}. \quad (28)$$

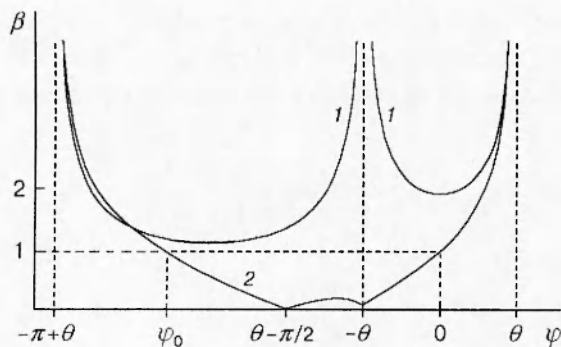


Рис. 2. Модули отношений амплитуд пограничного течения (1) и волнового поля (2) в модели силовых источников и точного решения граничной задачи

Графики соответствующих зависимостей $\beta_w(\varphi)$ и $\beta_b(\varphi)$ показывают, что эти отношения расходятся на критических углах $\varphi = \theta$ и $\varphi = -\pi + \theta$, которым соответствуют сингулярности в корнях дисперсионного уравнения (рис. 2). В точной теории решения не являются сингулярными.

Волновое поле в модели силовых источников совпадает с точным решением только в двух случаях: для горизонтальной осциллирующей пластины и пластины, наклоненной под некоторым углом $\varphi_0(\theta)$, определяемым из условия $\beta_w(\varphi_0) = 1$. В области $\varphi_0 < \varphi < \theta$ модельное решение дает заниженные значения амплитуд волнового поля. В двух особых случаях $\varphi = -\theta$ и $\varphi = \theta - \pi/2$ (при этом $\beta_w(\varphi) = 0$) волны не возбуждаются в модели силовых источников, хотя существуют в точном решении. При $\varphi = -\theta$ сравнение амплитуд пучков теряет смысл, поскольку их пространственная структура, описываемая формулами (26) и (27), становится различной.

Пограничные течения в модели силовых источников во всех случаях рассчитываются неверно.

6. Пространственная структура излученного пучка. Рассмотрим частный случай, когда в плоскости колеблется полоса шириной a с амплитудой b (в эксперименте пучки внутренних волн возбуждаются колеблющейся тонкой жесткой пластиной). Из (26) для вертикальных смещений h частиц в пучке следует выражение

$$h = -(1 + i\mu) \frac{\alpha b \sin \theta}{6\pi} \sqrt{\frac{\nu \sin \theta}{2N} \left| \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)} \right|} \left[F\left(p + \frac{a'}{2}, q\right) - F\left(p - \frac{a'}{2}, q\right) \right],$$

где $\alpha = (2N \cos \theta / (\nu q))^{1/3}$; $a' = a \sin(\theta - \varphi)$ — проекция ширины пластины на ось p , перпендикулярную оси пучка, и

$$F(p, q) = \int_0^{\infty} y^{-2/3} \exp(i\alpha p y^{1/3} - y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha p)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right), \quad (29)$$

где Γ — гамма-функция.

Огибающая пучка пропорциональна функции $\Phi(p, q) = |F(p + a'/2, q) - F(p - a'/2, q)|$. На небольших расстояниях пучок имеет бимодальную структуру, а также минимум при $p = 0$ и $\partial^2 \Phi(p, q) / \partial p^2|_{p=0} > 0$. На больших расстояниях пучок одномодален: $\partial^2 \Phi(p, q) / \partial p^2|_{p=0} < 0$. На расстоянии L , где происходит трансформация структуры пучка, выполняется соотношение $\partial^2 \Phi(p, L) / \partial p^2|_{p=0} = 0$. Используя выражение (29) для $F(p, q)$, найдем, что величина L определяется соотношением

$$L = a^3 N \cos \theta \sin^3(\theta - \varphi) / (4y^3 \nu), \quad (30)$$

где y — корень уравнения

$$S^2(y, 3) - S(y, 2)S(y, 4) = 0, \quad S(y, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^m}{(2m+1)!} \Gamma\left(\frac{2m+n}{3}\right).$$

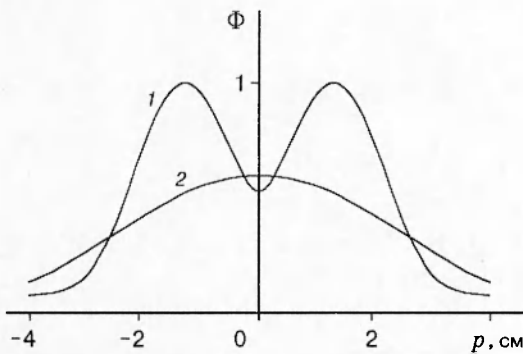


Рис. 3. Огибающие волнового пучка на различных расстояниях от источника. Источник — полоса шириной $a = 3$ см, наклоненная под углом $\varphi = 30^\circ$, осциллирующая с частотой $\omega = 1/\sqrt{2}$ с $^{-1}$ в жидкости с частотой плавучести $N = 1$ с $^{-1}$:

1 — $q = 4$ см; 2 — $q = 40$ см

Это уравнение имеет три действительных корня: $y_1 = 8,1477$, $y_2 = 7,8241$, $y_3 = 3,0263$, причем при $y_3 < y < y_1$ производная $\partial^2 \Phi(p, q) / \partial p^2|_{p=0}$ мала. Следовательно, на малых удалениях от источника при $q < L_1 \approx a^3 N \cos \theta \sin^3(\theta - \varphi) / (2000\nu)$ пучок бимодален. На промежуточных расстояниях $L_1 < q < L_2 \approx a^3 N \cos \theta \sin^3(\theta - \varphi) / (100\nu)$ происходит перестройка бимодального пучка в одномодальный. На больших удалениях $q > L_2$ пучок одномодален. Форма безразмерной огибающей пучка $\Phi(p, q)$ на малых и больших удалениях от источника показана на рис. 3.

Как в природных системах, так и в лабораторных условиях стратификация является слабой и ее масштаб $\Lambda = (d \ln \rho_0(z) / dz)^{-1}$ существенно превышает все остальные характерные размеры задачи. Подставляя в (30) $L = \Lambda$, получаем, что при размерах пластины, превышающих вязкий волновой масштаб $L_\nu = (\nu \Lambda / N)^{1/3} = \sqrt[3]{\nu g} / N$, пространственная структура пучка будет бимодальной во всем практически достижимом пространстве, что и наблюдается в эксперименте [7].

Заключение. Предложен метод решения задач генерации внутренних волн телом, колеблющимся в вязкой стратифицированной жидкости, и на его основе найдено точное решение линеаризованной задачи о возбуждении движений вязкой среды частью наклонной плоскости, осциллирующей вдоль своей поверхности (краткое описание приведено в [15]). Процедура вычислений основана на построении решения аналогичной задачи в вязкой однородной жидкости методом интегрального преобразования Фурье и последующей замене волновых чисел на соответствующие решения дисперсионного уравнения в вязкой стратифицированной жидкости. Подход [9, 10] предусматривает нахождение решения для идеальной стратифицированной жидкости и подстановку решений дисперсионного уравнения для вязкой жидкости в его интегральное представление. Результаты расчета дальнего волнового поля обоими методами согласуются между собой. Существенное различие между ними состоит в том, что в первом случае строится решение во всем пространстве, точно удовлетворяющее граничным условиям, которое описывает как уходящие внутренние волны, так и вязкие пограничные течения на излучающей поверхности. Во втором случае граничные условия удовлетворяются приближенно и решение описывает только волновую картину на некотором удалении от источника.

В случае осциллирующей пластины предлагаемая процедура расчета поля внутренних волн состоит в нахождении спектральных плотностей $A^\pm(k)$ и $B^\pm(k)$ функции тока для однородной вязкой жидкости (7), а также замене волновых чисел $k_1(k)$ и $k_2(k)$ на волновые числа $\alpha_w^+(k)$ и $\alpha_b^+(k)$, являющиеся решениями дисперсионного уравнения внутренних волн (19), и амплитуд A^\pm и B^\pm на A_w^+ и A_b^+ соответственно. Формальная замена реального тела, излучающего внутренние волны, совокупностью силовых источников, полученной из решения соответствующей задачи для однородной жидкости, приводит к неверным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. С. 90, 91.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
4. Степанянц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн. М.: ВИНТИ, 1987. С. 93–179. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа; Т. 21).
5. Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д. Генерация, распространение и нелинейное взаимодействие внутренних волн. М.: ВИНТИ, 1990. С. 77–144. (Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа; Т. 24).
6. Докучаев В. П., Долина И. С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. Т. 13, № 6. С. 655–663.
7. Макаров С. А., Неклюдов В. И., Чашечкин Ю. Д. Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 7. С. 744–754.
8. Thomas N. H., Stevenson T. N. A similarity solution for viscous internal waves // J. Fluid Mech. 1972. V. 54, pt 3. P. 495–506.
9. Hurley D. G. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt 1. Inviscid solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 105–118.
10. Hurley D. G., Keady G. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt 2. Approximate viscous solution // Ibid. P. 119–138.
11. Hurley D. G. The emission of internal waves by vibrating cylinders // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. P. 657–672.
12. Hurley D. G. A general method for solving steady-state internal gravity wave problems // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. P. 721–740.
13. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 4. С. 607–613.
14. Чашечкин Ю. Д., Кистович Ю. В. Геометрия и энергетика пучков внутренних волн // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 5. С. 684–686.
15. Чашечкин Ю. Д., Кистович Ю. В. Задача генерации монохроматических внутренних волн: точное решение и модель силовых источников // Докл. РАН. 1997. Т. 355, № 1. С. 54–57.

*Поступила в редакцию 25/V 1998 г.,
в окончательном варианте — 10/VIII 1998 г.*
