ПМТФ, № 2, 1973

УДК 539.4

О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА НА ЕГО УПРУГИЕ СВОЙСТВА

В. В. Дудукаленко, О. И. Иванищева, Б. И. Легеня

(Воронеж)

Предлагается статистическая постановка задачи определения границ упругих макрохарактеристик композитного материала с использованием классических вариационных теорем теории упругости. Приводимая схема расчета учитывает корреляционные эффекты второго и третьего порядков и дает оценки упругих макрохарактеристик с учетом постоянной, которая является физической характеристикой материала, отражающей его структуру.

1. Рассмотрим микронеоднородное упругое тело с тензором упругих модулей

$$\lambda_{ijkl} = \gamma\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - {}^2/_3\delta_{ij}\delta_{kl})$$

Объемный и сдвиговой модули γ и μ будем считать однородными и изотропными эргодическими функциями координат пространства. Напряженно-деформированное состояние рассматриваемой среды описывается законом Гука, связывающим напряжения σ_{ij} с деформациями ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = (\gamma - {}^2/_3\mu)\,\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (1.1)$$

уравнениями равновесия и соотношениями Коши

$$\sigma_{ij,\,j}' = 0 \qquad (1.2)$$

$$\varepsilon_{ij}' = {}^1/_2\,(u_{i,\,j}' + u_{j,\,i}') \qquad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что напряженно-деформированное состояние макрооднородно

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \mathrm{const}, \quad \langle\varepsilon_{ij}\rangle = \mathrm{const} \qquad (1.4)$$

Угловые скобки обозначают операцию математического ожидания, штрихи — отклонения функций от их математических ожиданий.

При разбиении тензоров напряжения и деформации на шаровой и девиаторный равенство (1.1) принимает форму

$$\sigma = 3\gamma\varepsilon \qquad (1.5)$$

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} \qquad (1.6)$$

$$(\sigma = \sigma_{kk},\ \varepsilon = \varepsilon_{kk},\ S_{ij} = \sigma_{ij} - {}^1/_3\sigma\delta_{ij},\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - {}^1/_3\varepsilon\delta_{ij})$$

Задача состоит в определении границ упругих макрохарактеристик γ^* и μ^*, вводимых соотношениями

$$\langle\sigma\rangle = 3\gamma^*\langle\varepsilon\rangle, \quad \langle S_{ij}\rangle = 2\mu^*\,\langle e_{ij}\rangle \qquad (1.7)$$

Пусть на поверхности S, ограничивающей объем V, заданы перемещения u_i° таким образом, что для их средних значений на S имеет место соотношение

$$u_i^\circ = \langle\varepsilon_{ij}\rangle\, x_j \qquad (1.8)$$

Тогда упругий потенциал объема V с учетом (1.7) [1] равен

$$2E = (\gamma^*\langle\varepsilon\rangle^2 + 2\mu^*\langle e_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle)\, V \tag{1.9}$$

Согласно принципу минимума потенциальной энергии [2] для любого виртуального поля деформаций, удовлетворяющего (1.7), имеет место неравенство

$$\frac{2E}{V} \leqslant \frac{1}{V}\int\limits_V (\gamma\varepsilon^2 + 2\mu e_{ij}e_{ij})\, dV \tag{1.10}$$

Если предположить, что масштаб неоднородностей мал по сравнению с макрообъемом, то интегрирование по объему V в силу эргодичности однородных случайных полей соответствует операции математического ожидания. Вместо (1.10) получаем

$$\begin{gathered}\gamma^*\langle\varepsilon\rangle^2 + 2\mu^*\langle e_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle \leqslant \langle\gamma\rangle\langle\varepsilon\rangle^2 + 2\langle\varepsilon\rangle\langle\gamma'\varepsilon'\rangle + \\ + \langle\gamma\rangle\langle\varepsilon'\varepsilon'\rangle + \langle\gamma'\varepsilon'\varepsilon'\rangle + 2[\langle\mu\rangle\langle e_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle + 2\langle e_{ij}\rangle\langle\mu' e_{ij}'\rangle + \langle\mu\rangle\langle e_{ij}' e_{ij}'\rangle + \\ + \langle\mu' e_{ij}' e_{ij}'\rangle]\end{gathered} \tag{1.11}$$

Виртуальное поле деформации ε_{ij}' введем с помощью соотношений

$$\sigma' = \gamma' c + \varepsilon' d \tag{1.12}$$

$$S_{ij}' = \mu' a_{ij} + e_{ij}' b \tag{1.13}$$

где a_{ij}, b, c, d — неслучайные величины, подлежащие определению. Тогда при решении системы уравнений (1.2), (1.3), (1.12), (1.13) можно применить метод преобразований Фурье, в результате чего будут найдены флуктуации ε_{ij}'. С помощью последних могут быть вычислены корреляционные моменты, входящие в (1.11), и это неравенство даст верхние границы эффективных упругих характеристик. Для получения нижней оценки объемного и сдвигового модулей нужно решать задачу в напряжениях, задавая на всей поверхности S, которая ограничивает объем V, систему нагрузок, обеспечивающих равномерное напряженное состояние

$$P_i = \langle\sigma_{ij}\rangle\, n_j \tag{1.14}$$

При этом принцип минимума потенциальной энергии для статически допустимого поля напряжений σ_{ij}' приводит к неравенству [2]

$$\begin{gathered}\frac{1}{9}\langle\sigma\rangle\frac{1}{\gamma^*}\langle\sigma\rangle + \langle S_{ij}\rangle\frac{1}{2\mu^*}\langle S_{ij}\rangle \geqslant \frac{1}{9}\,[\langle\varkappa\rangle\langle\sigma\rangle^2 + 2\langle\sigma\rangle\langle\sigma'\varkappa'\rangle + \langle\varkappa\rangle\langle\sigma'\sigma'\rangle + \\ + \langle\varkappa'\sigma'\sigma'\rangle] + {}^1/_2\,[\langle\nu\rangle\langle S_{ij}\rangle\langle S_{ij}\rangle + 2\langle S_{ij}\rangle\langle\nu' S_{ij}'\rangle + \\ + \langle\nu\rangle\langle S_{ij}' S_{ij}'\rangle + \langle\nu' S_{ij}' S_{ij}'\rangle], \quad \varkappa = \gamma^{-1}, \quad \nu = \mu^{-1}\end{gathered} \tag{1.15}$$

Статически допустимое поле напряжений введем соотношениями

$$\varepsilon' = \varkappa' c^\circ + d^\circ\sigma' \tag{1.16}$$

$$e_{ij}' = \nu' a_{ij}^\circ + S_{ij}' b^\circ \tag{1.17}$$

содержащими неслучайные величины a_{ij}°, b°, c°, d°.

Далее методом преобразований Фурье с учетом (1.16), (1.17) нужно решить уравнение совместности, которое при условии (1.4) имеет вид

$$e_{imk}e_{jnl}\frac{\partial^2\varepsilon_{mn}'}{\partial x_k\,\partial x_l} = 0 \tag{1.18}$$

Здесь e_{ijk} — тензор Леви — Чивита. После этого вычисляются корреляционные моменты, входящие в неравенство (1.15), которое дает нижние границы для γ^* и μ^*, т. е. задача определения границ макрохарактеристик решена.

Отметим, что в силу изотропии общих свойств рассматриваемой упругой среды требуется определить только две упругие постоянные — γ^* и μ^*. Поэтому нет необходимости вводить вполне произвольное общее искажение. Достаточно рассмотреть деформацию только двух независимых типов.

2. Для определения границ сдвигового модуля рассмотрим равномерное состояние чистого сдвига в упругой смеси, в которой фазовые области являются прямолинейными непрерывными цилиндрами с параллельными образующими и произвольной формой поперечного сечения. Предполагается, что смесь в целом макроскопически однородна и трансверсально изотропна. Фиксируем оси координат так, чтобы ось x_2 совпадала с образующими цилиндров и направлением сдвига.

Упругие перемещения, соответствующие данной задаче, таковы:

$$u_1 = u_1(x_i), \qquad u_2 = u_3 = 0 \quad (i = 2,\ 3) \tag{2.1}$$

и напряженно-деформированное состояние в направлениях x_2, x_3 не зависит от x_1. Соотношение (1.13) в выбранной системе координат имеет вид

$$S_{1i}' = \mu' a_{1i} + e_{1i}' b \tag{2.2}$$

и, кроме того,

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0 \tag{2.3}$$

Решение системы уравнений (1.2), (1.3), (2.1), (2.2) методом преобразований Фурье имеет вид

$$e_{1i}' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -g\xi_{1k}\frac{\omega_k\omega_i}{\omega^2} e^{i\omega_n x_n} d\omega \quad (\xi_{1k} = a_{1k}/b,\ \omega^2 = \omega_i\omega_i,\ i = 2,\ 3) \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\omega}_i$ — параметры преобразования Фурье по двум переменным x_2, x_3 g — функция переменных ω_i, определяющая спектральное разложение

$$\mu' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g e^{i\omega_n x_n} d\omega \tag{2.5}$$

Так как случайная функция μ' изотропна, то [3]

$$\langle g(\omega_i)\, g(\omega_i')\rangle = \Lambda(\omega^2)\delta(\omega_i + \omega_i')$$

$$\langle g(\omega_i)\, g(\omega_i')\, g(\omega_i'')\rangle = F(\omega^2, \omega_i, \omega_i', \omega'^2)\,\delta(\omega_i + \omega_i' + \omega_i'') \tag{2.6}$$

где Λ и F — трехмерные спектральные плотности функции μ', δ — дельта-функция Дирака. Учитывая (2.6), из (2.4), (2.5) получаем [4]

$$\langle \mu' e_{1i}'\rangle = -{}^1/_2 D_\mu \xi_{1i}, \qquad \langle e_{1i}' e_{1i}'\rangle = {}^1/_2 D_\mu \xi_{1i}\xi_{1i}$$

Здесь через D_μ обозначена дисперсия случайной функции

$$D_\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(\omega^2)\, e^{i\omega_n x_n}\, d\omega$$

При вычислении корреляционных функций третьего порядка воспользуемся тем, что интеграл

$$f_{kl} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega^2, \omega_i\omega_i', \omega'^2)\frac{\omega_k'\omega_l'}{\omega'^2}\, d\omega'$$

является изотропной тензорной функцией второго ранга и, следовательно, может быть представлен в виде [5]

$$f_{kl} = A\,(\omega^2)\,\delta_{kl} + B\,(\omega^2)\,\omega_k\omega_l/\omega^2$$

Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{kl}\frac{\omega_i\omega_j}{\omega^2}\,d\omega = A^*\delta_{ij}\delta_{kl} + B^*\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.7}$$

Отсюда после свертки по всем индексам вытекает выражение, связывающее величины A^* и B^* с одноточечным корреляционным моментом третьего порядка функции μ', который обозначим через

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{pp}\,d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\,(\omega^2,\,\omega_i\omega_i',\,\omega'^2)\,d\omega\,d\omega' = 4A^* + 8B^* = m_\mu \tag{2.8}$$

Теперь, пользуясь (2.3) — (2.5) и (2.7), (2.8), получаем

$$\langle\mu' e_{1i}' e_{1i}'\rangle = \xi_{1k}\xi_{1l}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_k\omega_i}{\omega^2}\,d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\frac{\omega_l'\omega_i'}{\omega'^2}\,d\omega' = \left(\frac{m_\mu}{2} - 2A^*\right)\xi_{1i}\xi_{1i}$$

Располагая найденными значениями корреляционных моментов, можно найти выражение правой части неравенства (1.11), которое в данном случае принимает форму

$$\mu^*\langle e_{1i}\rangle\langle e_{1i}\rangle \leqslant \langle\mu\rangle\langle e_{1i}\rangle\langle e_{1i}\rangle + 2\,\langle e_{1i}\rangle\langle\mu' e_{1i}'\rangle + \tag{2.9}$$
$$+ \langle\mu\rangle\langle e_{1i}' e_{1i}'\rangle + \langle\mu' e_{1i}' e_{1i}'\rangle$$

и содержит неизвестный параметр ξ_{1i}. После минимизации правой части (2.9) по этому параметру получим

$$\mu^*\langle e_{1i}\rangle\langle e_{1i}\rangle \leqslant \langle\mu\rangle\langle e_{1i}\rangle\langle e_{1i}\rangle - {}^1/_2\,D_\mu\,\langle e_{1i}\rangle\,\xi_{1i} \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует верхняя граница эффективного сдвигового модуля

$$\mu^{(+)} = \langle\mu\rangle - \frac{1}{2}\,\frac{D_\mu^2}{\langle\mu\rangle\,D_\mu + m_\mu - 2A^*} \tag{2.11}$$

3. Нижнюю оценку модуля сдвига получим, решив тем же методом систему (1.17), (1.18)

$$S_{ij}' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho\eta_{1l}\left(\frac{\omega_l\omega_i}{\omega^2} - \delta_{li}\right)e^{i\omega_m x_m}\,d\omega, \qquad \eta_{1l} = a_{1l}{}^\circ\,/\,b^\circ \tag{3.1}$$

Здесь ρ — функция переменных w_i, определяющая спектральное разложение

$$\nu' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho e^{i\omega_n x_n}\,d\omega$$

Основываясь на предположении об изотропии случайной функции ν', получаем

$$\langle\nu' S_{1i}'\rangle = -\,{}^1/_2 D_\nu\eta_{1i}, \qquad \langle S_{1i}' S_{1i}'\rangle = {}^1/_2 D_\nu\eta_{1i}\eta_{1i} \tag{3.2}$$
$$\langle S_{1i}' S_{1i}'\nu'\rangle = (m_\nu^{1/2} - 2A^*)\,\eta_{1i}\eta_{1i}$$

где D_ν — дисперсия, m_ν — одноточечный корреляционный момент третьего порядка случайной функции ν', $A_1{}^*$ — некоторая постоянная.

Подставляя (3.2) в (1.15) и учитывая (2.2), после минимизации правой части (1.15) по параметру η_{1i}, получим

$$\frac{1}{\mu^*}\langle S_{1i}\rangle\langle S_{1i}\rangle \leqslant \langle S_{1i}\rangle\langle\nu\rangle\langle S_{1i}\rangle - \frac{1}{2}D_\nu\langle S_{1i}\rangle\eta_{1i}$$

Отсюда следует нижняя граница эффективного модуля сдвига

$$\mu^{(-)} = \left[\langle\nu\rangle - \frac{1}{2}\frac{D_\nu{}^2}{\langle\nu\rangle D_\nu + m_\nu - 2A_1{}^*}\right]^{-1} \tag{3.3}$$

4. В оценки (2.10), (3.3) входят неизвестные A^* и $A_1{}^*$, которые имеют размерности μ^3 и μ^{-3} соответственно и являются физическими характеристиками материала. Для двухкомпонентной смеси связь между A^* и $A_1{}^*$ легко установить, выразив ν' через μ'. Для этого рассмотрим смесь с модулями сдвига компонентов μ_1 и μ_2. Пусть концентрация первого компонента равна c. Тогда флуктуации μ и ν имеют вид

$$\mu_1' = (1-c)(\mu_1-\mu_2),\quad \mu_2' = -c(\mu_2-\mu_1)$$
$$\nu_1' = (1-c)(\mu_2-\mu_1)(\mu_1\mu_2)^{-1},\quad \nu_2' = -c(\mu_2-\mu_1)(\mu_1\mu_2)^{-1}$$

Если рассмотреть формально двухкомпонентную среду с флуктуациями сдвигового модуля

$$\varkappa_1' = (1-c),\ \varkappa_2' = -c$$

то μ_1', μ_2', ν_1' и ν_2' выражаются через $\varkappa_1'$ и $\varkappa_2'$ следующим образом:

$$\mu_1' = (\mu_1-\mu_2)\varkappa_1',\quad \mu_2 = (\mu_1-\mu_2)\varkappa_2' \tag{4.1}$$
$$\nu_1' = (\mu_1-\mu_2)(\mu_1\mu_2)^{-1}\varkappa_1',\ \nu_2' = (\mu_2-\mu_1)(\mu_1\mu_2)^{-1}\varkappa_2' \tag{4.2}$$

Сравнивая (4.1), (4.2), получим

$$\nu' = -\mu'(\mu_1\mu_2)^{-1} \tag{4.3}$$

На основании (4.3) имеет место соотношение

$$m_\nu = -m_\mu(\mu_1\mu_2)^{-3}$$

Поэтому (3.2) можно переписать в виде

$$\langle S_{1i}'\nu' S_{1i}'\rangle = -(m_\mu^{1/2} - 2A^*)(\mu_1\mu_2)^{-3}\eta_{1i}\eta_{1i} \tag{4.4}$$

Сравнение (4.4) с (3.2) дает искомую зависимость

$$A_1{}^* = -A^*(\mu_1\mu_2)^{-3} \tag{4.5}$$

Учитывая (4.5), выразим верхнюю и нижнюю границы сдвигового модуля через концентрации и сдвиговые модули компонентов и запишем их в безразмерном виде

$$\mu_0 = cn + (1-c) - \frac{1}{2}\frac{(n-1)^2(1-c)c}{cn+(1-c)+(n-1)(1-2c)-\alpha}. \tag{4.6}$$

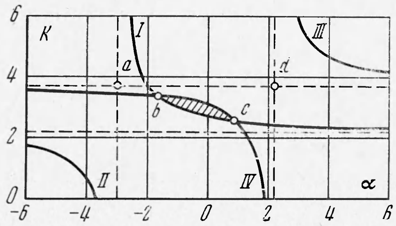
$$\mu_{00} = 2n\frac{c+(1-c)n-(n-1)(1-2c)+\alpha}{2[c+(1-c)n][c+n(1-c)-(n-1)(1-2c)+\alpha]+(n-1)^2(1-c)c}$$

$$(\mu_0 = \mu^{(+)}\mu_2^{-1},\ \mu_{00} = \mu^{(-)}\mu_2^{-1},\ n = \mu_1\mu_2^{-1}, \tag{4.7}$$
$$\alpha = 2A^*\mu_2^{-3}(n-1)^2[(1-c)c]^{-1},\ n \geqslant 1)$$

Заметим, что задача формулировалась для смесей, в которых фазовые области имеют произвольную поперечную структуру. Поэтому можно предположить, что входящая в оценки (4.6), (4.7) величина α отражает влияние структуры композитного материала на его упругие свойства.

Величина характеристики α должна устанавливаться экспериментально, однако можно сделать некоторые предварительные выводы относительно пределов ее существования.

На фигуре даны зависимости μ_0 и μ_{00} от α при $c = 0.7$ и $n = 5$. Ветви *1* и *2* изображают μ_{00}, ветви *3* и *4* — μ_0. Очевидно, из рассмотрения должны быть исключены значения $-\infty < \alpha \leqslant a$ и $d \leqslant \alpha < \infty$, так как в противном случае μ_0 больше, чем $\langle\mu\rangle\mu_2^{-1}$, и μ_{00} меньше, чем $\langle\mu^{-1}\rangle\mu_2^{-1}$, что противоречит теоремам Фойхта и Ройсса. Далее исключаются $a < \alpha < b$, $c < \alpha < d$, так как $\mu_0 < \mu_{00}$ при этих значениях α. Следовательно, α может принимать значения $b \leqslant \alpha \leqslant c$, т. е. область определения α лежит между точками, в которых $\mu_0 = \mu_{00}$. Нетрудно показать, что такие точки всегда существуют и имеют координаты



$$\alpha_1 = {}^1/_2\,(n-1)\,(1-c), \qquad \alpha_2 = -{}^1/_2\,(n-1)\,c \tag{4.8}$$

Для структур с характеристиками (4.8) полученное решение является точным. По-видимому, в среде с характеристикой α_2 первый элемент образует матрицу, а в среде с характеристикой α_1 — второй элемент. Для сред с характеристиками $b < \alpha < c$ эффективный сдвиговой модуль находится внутри заштрихованной области. Если пренебрегать особенностями структуры смеси и в качестве верхней и нижней границ эффективного сдвигового модуля рассматривать значения α (b) и α (c), то они совпадут с границами, полученными в [1]. Отметим также, что (4.6) дает величину, лежащую ниже верхней границы эффективного сдвигового модуля, которую для случая продольного сдвига можно получить из [6].

5. Для оценки объемного эффективного модуля статистически изотропной упругой смеси граничные условия (1.8), (1.14) нужно задать следующим образом:

$$u_i = \langle\varepsilon\rangle x_i, \qquad p_i = \langle\sigma\rangle n_i$$

а вместо уравнений (1.13), (1.17) рассмотреть уравнения (1.12) (1.16). Отметим, что для оценки объемного модуля рассмотрение общего случая напряженно-деформированного состояния не представляет трудности, если предположить, что сдвиговые модули компонент совпадают. При этом анализ остается аналогичным приведенному выше, с той лишь разницей, что при вычислении корреляционных моментов третьего порядка возникает необходимость вычисления интегралов типа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{kl}\,d\omega = (3A^* + 5B^*)\,\delta_{kl} \tag{5.1}$$

Свертка (5.1) по индексам k, l позволяет исключить обе постоянные

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{pp}\,d\omega = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F\,(\omega^2, \omega_i\omega_i', \omega'^2)\,d\omega\,d\omega' = 3\,(3A^* + 5B^*) = m_\gamma$$

где m_γ — корреляционный момент третьего порядка случайной функции γ'. Следовательно, в оценки объемного модуля структурная характеристика α не входит. Верхняя и нижняя границы γ^* имеют вид

$$\gamma^{(+)} = \langle\gamma\rangle - \frac{D_\gamma^2}{{}^4/_3\langle\mu\rangle + \langle\gamma\rangle D_\gamma + m_\gamma}$$

$$\gamma^{(-)} = \langle\theta\rangle - 4\frac{D_\theta^2}{3\langle\nu\rangle D_\theta + 4\langle\theta\rangle D_\theta + 4m_\theta}$$

Здесь $\theta = \gamma^{-1}$, D_γ, D_θ — дисперсии случайных функций γ' и θ', m_θ — корреляционный момент третьего порядка случайной функции θ'. Легко показать, что обе оценки совпадают между собой и со значением объемного модуля, полученного в [7,8].

Таким образом, при оценке упругих характеристик выяснилось, что объемный модуль изотропной смеси зависит только от концентраций и отдельных модулей, а особенности структуры смеси на него не влияют, если сдвиговые модули компонентов равны. Этот же факт был установлен Хиллом [8]. Кроме того, установлено, что сдвиговый модуль упругой изотропной смеси содержит параметр, характеризующий структуру смеси. Это подтверждает предположение Хилла [8] о том, что для определения сдвигового модуля композита имеет значение не только концентрация и модули компонентов, но и внутренняя геометрия.

Поступила 20 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Walpole L. I. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems. J. Mech. Phys. Solids, 1966, vol. 14, pp. 155—162.
2. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2. М., «Наука», 1967.
4. Дудукаленко В. В., Минаев В. А. О деформировании статистически неоднородной пластической среды. МТТ, 1970, № 3.
5. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел, М., «Наука», 1970.
6. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Упругие модули текстурированных материалов. МТТ, 1967, № 1.
7. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. К вычислению упругих модулей гетерогенных сред. ПМТФ, 1967, № 3.
8. Hill R. Elastic properties of reinforced solids; some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids, 1963, vol. 11, No. 5, pp. 357—372. (Рус. перев.: Упругие свойства составных тел. Некоторые теоретические принципы. Механика. Сб. перев. и обз. иностр. лит., 1964, № 5.)