УДК 532.5

С.М. Шугрин

ДВУХСКОРОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Получены уравнения двухскоростной гидродинамики на базе общих принципов — термодинамики, галилеевой инвариантности и законов сохранения энергии, массы-импульса и др. В концептуальном отношении статья развивает предыдущие работы автора [1—3]. Следует подчеркнуть, что и термодинамика здесь должна трактоваться как двухскоростная. Впервые идея двухскоростной термодинамики фактически появилась в теории сверхтекучей жидкости Ландау [4]. Но за пределами этой теории она отклика не вызвала, и только недавно идеи Ландау были использованы для вывода уравнений двухскоростной гидродинамики в пористых упругодеформируемых средах [5, 6].

Уравнения строятся в два этапа: на первом (этот этап описан в настоящей работе) находятся уравнения, которые с долей условности можно назвать уравнениями "идеальной двухскоростной гидродинамики", они содержат только первые производные; на втором уравнения дополняются "диффузионными" слагаемыми, содержащими вторые производные (это предмет следующей работы). На обоих этапах центральную роль играют тензорная классификация величин, характеризующих состояние системы, и соответствующая ей тензорная классификация базисных уравнений.

1. Тензорная классификация. Пусть состояние интересующей нас системы в точке $x \equiv (x^\alpha) = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$ $(x^0 = t,\ n > 1)$ характеризуется набором величин $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$. Введем группу Галилея Г. В нее включаются следующие преобразования координат: временные и пространственные сдвиги, пространственные вращения с определителем $+1$, образующие группу $SO(n)$, собственно преобразования Галилея, а также пространственные отражения. Для каждого преобразования координат $x \to \tilde{x}$ из Г задается соответствующее ему преобразование $u \to \tilde{u}$. В дальнейшем нужно будет находить общий вид величин, имеющих определенный тензорный тип и заданную структуру (задача тензорной классификации). Для этого полезно располагать общим критерием.

Пусть имеется группа G преобразований $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$, $\tilde{u} = \tilde{u}(u, x)$.

Определение 1.1. Совокупность величин $T(x, u) \equiv (T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}(x, u))$ назовем G-тензором типа (p, q), если для любого преобразования $(x, u) \to (\tilde{x}, \tilde{u})$ из G

$$
(1.1) \qquad \tilde{T}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{\gamma_p}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial \tilde{x}^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\delta_q}}{\partial \tilde{x}^{\beta_q}} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q}(x, u) = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}(\tilde{x}, \tilde{u}).
$$

В частности, согласно (1.1), $T(x, u)$ — скаляр, если $T(x, u) = (T(\tilde{x}, \tilde{u})$, т.е. если T — инвариант G. Здесь и далее принимается обычное тензорное правило суммирования по повторяющимся тензорным индексам. Греческие индексы пробегают значения $0, 1, \ldots, n$, а латинские — $1, \ldots, n$.

Пусть G — однопараметрическая группа Ли преобразований $\tilde{x} = \tilde{x}(x; \varepsilon)$, $\tilde{u} = \tilde{u}(x, u; \varepsilon)$, ε — групповой параметр. С помощью обычной групповой техники [7, 8] находится нужный критерий.

Предложение 1.1. *Для того чтобы $T(x, u)$ было G-тензором типа (p, q), необходимо и достаточно, чтобы*

$$(1.2)\qquad XT^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} = \frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\lambda_1}}T^{\lambda_1\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} + \ldots + \frac{\partial\xi^{\alpha_p}}{\partial x^{\lambda_p}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\lambda_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} -$$

$$- \frac{\partial\xi^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\mu_1\beta_2\ldots\beta_q} - \frac{\partial\xi^{\mu_q}}{\partial x^{\beta_q}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_{q-1}\mu_q},$$

где X — оператор группы G,

$$X \equiv \xi^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \eta^s(x, u)\frac{\partial}{\partial u^s} \quad (s = 1,\ldots, m).$$

Если T — скаляр, то (1.2) превращается в условие инвариантности $XT = 0$. Если T зависит от $(x, u, \partial u/\partial x)$, то определение 1.1 очевидным образом видоизменяется, а в (1.2) X заменяется первым продолжением $pr^{(1)}X$ и т.д.

2. Односкоростная гидродинамика. Для иллюстрации разберем случай односкоростной гидродинамики. Пусть состояние системы определяется набором $u \equiv (\rho, s, v)$ ($\rho > 0$ — плотность, s — удельная энтропия — галилеевы скаляры, $v \equiv (v^1, v^2, v^3)$ — вектор скорости).

Предполагается, что термодинамика задана, т.е. определена внутренняя энергия $\varepsilon(\rho, s)$, для которой справедливо равенство

$$(2.1)\qquad d\varepsilon = -pd(1/\rho) + Tds$$

(p — давление, T — абсолютная температура). Энергия единицы объема $E = \rho(\varepsilon + v^2/2)$.

Предположим далее, что динамика системы описывается квазилинейной системой первого порядка

$$(2.2)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + C^k(u)\frac{\partial u}{\partial x^k} = F(u),$$

инвариантной относительно Г. Для простоты полагаем $F = 0$. Требование инвариантности приводит к следующей форме уравнений (2.2) [1, 9]:

$$(2.3а)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + v^k\frac{\partial\rho}{\partial x^k} + \alpha(\rho, s)\frac{\partial v^k}{\partial x^k} = 0;$$

$$(2.3б)\qquad \frac{\partial s}{\partial t} + v^k\frac{\partial s}{\partial x^k} + \beta(\rho, s)\frac{\partial v^k}{\partial x^k} = 0;$$

$$(2.3в)\qquad \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^k\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + A(\rho, s)\frac{\partial\rho}{\partial x^j} + B(\rho, s)\frac{\partial s}{\partial x^j} = 0.$$

Здесь α, β, A, B — произвольные гладкие функции.

Третья гипотеза состоит в том, что следствием (2.3) является точный закон сохранения энергии

$$(2.4)\qquad \frac{\partial E(u)}{\partial t} + \frac{\partial R^k(u)}{\partial x^k} = 0,$$

где потоки $R^k(u)$ должны быть определены. Из сделанных гипотез после вычислений вытекает, что $\alpha = \rho$ и что (2.3а), (2.3б) можно представить в дивергентной форме

$$(2.5а)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0;$$

$$(2.5б)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^j v^k + G\delta^{jk}) = 0,\ G \equiv p + \rho T\beta$$

(δ^{jk} — символ Кронекера). Закон сохранения энергии (2.4) при этом имеет вид

(2.6) $$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon + v^2/2)] + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^k(\varepsilon + v^2/2 + G/\rho)] = 0.$$

Уравнение (2.3б) с помощью (2.5а) тоже приводится к дивергентной форме (по крайней мере, локально)

(2.7) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{s}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho\tilde{s}v^k) = 0,\ \tilde{s} = \tilde{s}(\rho, s).$$

Для этого нужно, чтобы $\tilde{s}$ удовлетворяло уравнению

(2.8) $$\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\rho} + (\beta/\rho)\frac{\partial\tilde{s}}{\partial s} = 0.$$

Дополним (2.8) начальными условиями $(\rho = \rho_0) \Rightarrow (\tilde{s} = \tilde{s}_0(s))$. Выберем $\tilde{s}_0$ так, чтобы $\partial\tilde{s}_0/\partial s \neq 0$. Тогда имеется гладкое решение уравнения (2.8), для которого (по крайней мере, локально) $\partial\tilde{s}/\partial s \neq 0$. Перейдем от переменных (ρ, s) к $(\rho, \tilde{s})$. Якобиан преобразования $(\rho, s) \to (\rho, \tilde{s})$ отличен от нуля, поэтому это преобразование локально взаимно однозначно. Дифференциальная форма (2.1) теперь записывается так:

(2.9) $$d\varepsilon = -\tilde{p}d(1/\rho) + Td\tilde{s},\ \tilde{p} = p + \rho T\beta = G,\ T = \tilde{T}\partial\tilde{s}/\partial s.$$

Уравнения (2.5)—(2.7), (2.9) по форме совпадают с уравнениями газовой динамики, но (если $\beta \neq 0$) T, $\tilde{p}$ не имеют физического смысла температуры и давления. Поэтому нужна еще одна гипотеза, из которой вытекало бы, что $\beta = 0$. Например, можно взять закон сохранения энтропии

(2.10) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho s v^k) = 0.$$

Итак, правильные законы сохранения массы-импульса вытекают из термодинамики, закона сохранения энергии (2.4), определенного с точностью до потоков R^k, скалярного закона сохранения (2.10) и требования галилеевой инвариантности в сочетании со структурной гипотезой (2.2).

Результат легко обобщается на системы, состояние которых определяется набором $u = (\rho, s, c, v)$, $c = (c_1, \dots, c_\nu)$, где c_α — скаляры. Для однозначной определенности кроме (2.10) нужно зафиксировать ν независимых скалярных законов сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\lambda_\alpha(\rho, s, c)] + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho\lambda_\alpha(\rho, s, c)v^k] = g_\alpha(\rho, s, c),\ \alpha = 1, \dots, \nu$$

или взять какие-то аналоги этих гипотез. Если $g_\alpha \neq 0$, то в (2.4) в правой части вместо 0 появляется $\theta(\rho\ s, c)$.

3. Односкоростная гидродинамика. Иной подход. Техника, использованная в п. 2, принципиально позволяет находить общую форму уравнений для разных физических систем, для которых имеется подходящий аналог формы Гиббса (2.1) и определен закон преобразования величин $(u_0, \dots, u_m)$ для каждого преобразования из Г. Однако для двухскоростных и более общих систем вычисления резко усложняются. Поэтому далее описывается более удобная техника, в которой используется информация о структуре искомых уравнений (прежде всего то, что они имеют дивергентную форму и классифицируются по тензорным типам).

Пусть состояние системы опять определяется набором $u \equiv (\rho, s, v)$. Полагаем $V = (V^\alpha) \equiv (1, v) = (1, v^1, v^2, v^3)$. Первый шаг состоит в решении задачи тензорной классификации. В данном случае она проста.

Предложение 3.1.

1. *Величина* $J(u)$ *есть* Г-*скаляр* (галилеев скаляр) *тогда и только тогда, когда* $J = J(\rho, s)$.

2. *Совокупность величин* $X(u) \equiv (X^\alpha(u))$ *есть* Г-*вектор* (галилеев вектор) *тогда и только тогда, когда* $X = a(\rho, s)V$, *где* a — *скаляр*.

3. *Совокупность величин* $T(u) \equiv (T^{\alpha\beta}(u))$ *есть* Γ-*тензор типа (2,0) (*галилеев тензор*) тогда и только тогда, когда* $T = A(\rho, s)V \otimes V + B(\rho, s)\delta$, *где* A *и* B *— скаляры,*

$$\delta \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix},\ I_3 \text{ — трехмерная единица.}$$

Определение 3.1.

1. Величина $J(u, \partial u/\partial x)$ называется дивергентным Γ-скаляром первого порядка, если J есть Γ-скаляр, и имеет дивергентную структуру: $J = \partial / \partial x^\alpha [X^\alpha(u)] \equiv \mathrm{div}X(u)$, $X \equiv (X^\alpha)$.

2. Совокупность величин $X(u, \partial u/\partial x) \equiv (X^\beta(u, \partial u/\partial x))$ называется дивергентным Γ-вектором первого порядка, если X есть Γ-вектор и $X^\beta = \partial/\partial x^\alpha [T^{\alpha\beta}(u)]$, или $X = \mathrm{div}T$.

Аналогично $J(u, \partial u/\partial x, \ldots, \partial^m u/\partial x^m)$ есть дивергентный Γ-скаляр порядка m, если J есть Γ-скаляр и $J = \mathrm{div}X$, $X = (X^\alpha)$, $X^\alpha = X^\alpha(u, \partial u / \partial x, \ldots, \partial^{m-1}u/\partial x^{m-1})$ и т.д.

Предложение 3.2.

1. *Величина* J *есть дивергентный* Γ-*скаляр первого порядка тогда и только тогда, когда* $J = \mathrm{div}X(u)$ *и* $X(u)$ *есть галилеев вектор,* $X(u) = a(\rho, s)V$.

2. *Совокупность величин* $X = (X^\alpha)$ *образует дивергентный* Γ-*вектор первого порядка тогда и только тогда, когда* $X = \mathrm{div}T$, *где* $T = A(\rho, s)V \otimes V + B(\rho, s)\delta$.

Итак, можно считать, что состояние системы задается одним базисным скаляром s и одним базисным галилеевым вектором ρV (вектор массы-импульса). Подобным же образом классифицируем и базисные уравнения, а именно: примем, что они состоят из законов сохранения следующих типов — одного скалярного (закон сохранения энтропии) и одного векторного (закон сохранения массы-импульса).

В рамках данной работы под законом сохранения понимается выражение

$$\frac{\partial \varphi^\alpha(u)}{\partial x^\alpha} = f(u) \tag{3.1}$$

(единственным исключением является закон сохранения момента импульса, который, однако, в явном виде не выписывается). Если $f = 0$, то закон сохранения (3.1) будет называться точным. Как и в п. 2, здесь для простоты законы сохранения берутся точными.

Согласно предложению 3.2, векторный закон сохранения таков: $\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\alpha = 0$, $T = A(\rho, s)\, V \otimes V + G(\rho, s)\delta$. При $\beta = 0$ уравнение должно быть законом сохранения массы, т.е. имеет вид $\partial\rho/\partial x + \partial(\ldots)^k/\partial x^k = 0$. Поэтому $A = \rho$ и векторное уравнение принимает форму

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0; \tag{3.2а}$$

$$\frac{\partial(\rho v^j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^j v^k + G(\rho, s)\delta^{jk}) = 0. \tag{3.2б}$$

Скалярное уравнение должно быть законом сохранения энтропии, т.е. должно иметь вид $\partial(\rho s)/\partial t + \partial(\ldots)^k/\partial x^k = 0$. Поэтому, согласно предложению 3.2,

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho s v^k)}{\partial x^k} = 0. \tag{3.3}$$

Как и в п. 2, из (3.2), (3.3) будет вытекать точный закон сохранения энергии

(3.4) $$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon + v^2/2)] + \frac{\partial R^k(u)}{\partial x^k} = 0,$$

где для $\varepsilon(\rho, s)$ должно выполняться (2.1). Преобразуем дифференциальную форму (2.1). Вначале запишем ее следующим образом:

(3.5) $$d(\rho\varepsilon) = (\varepsilon + p/\rho - Ts)d\rho + Td(\rho s).$$

Как видно из сопоставления структуры уравнений (3.2)—(3.4) со структурой (3.5), дифференциальная форма (3.5) внутренне связана с системой (3.2)—(3.4). Поэтому назовем (3.5) первой основной (термодинамической) дифференциальной формой, величины $(\rho, \rho s)$ — каноническими (термодинамическими) переменными первого рода, функцию $\rho\varepsilon = \Phi(\rho, \rho s)$ — первым каноническим (термодинамическим) потенциалом, величины (γ, T) ($\gamma \equiv \varepsilon + p/\rho - Ts$ — удельный потенциал Гиббса) — сопряженными (термодинамическими) переменными или каноническими (термодинамическими) переменными второго рода, преобразование $(\rho, \rho s) \to (\gamma, T)$ — каноническим преобразованием. Если оно локально взаимно однозначно (так будет, например, если потенциал $\Phi(\rho, \rho s)$ строго выпуклый), то определено обратное преобразование $(\gamma, T) \to (\rho, \rho s)$. С помощью преобразования Лежандра в этом случае можно перейти от потенциала $\Phi(\rho, \rho s)$ к потенциалу $\Phi_*(\gamma, T) \equiv \gamma\rho + T\rho s - \Phi$. Отсюда находим, что $\Phi_* = p$. Термодинамический потенциал $p(\gamma, T)$ назовем сопряженным потенциалом, или потенциалом второго рода. Из (3.5) следует

(3.6) $$dp = \rho d\gamma + \rho s dT.$$

От формы (3.5) теперь перейдем к полной дифференциальной форме (ср. с (3.2)—(3.4))

(3.7) $$dE \equiv d[\rho(\varepsilon + v^2/2)] = q_0 d\rho + q_j d(\rho v^j) + q_4 d(\rho s).$$

Здесь E рассматривается как функция переменных $(\rho, \rho v, \rho s)$. Выражения (3.5) и (3.7) эквивалентны, если

$$q_0 = \gamma - v^2/2,\ q_j = v^j,\ q_4 = T.$$

Совокупность величин $q = (q_0, ..., q_4)$ назовем интегрирующими множителями. Если преобразование $(\rho, \rho s) \to (\gamma, T)$ локально взаимно однозначно, то преобразование $(\rho, \rho v, \rho s) \to q$ также взаимно однозначно и система законов сохранения (3.2), (3.3) полна в смысле [2], причем законы сохранения (3.2), (3.3) здесь рассматриваются как базисные, а (3.4) — как замыкающий (в данном случае это допустимо, так как нас интересуют тут только гладкие решения). Согласно (3.7),

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} = \gamma - v^2/2,\ \frac{\partial E}{\partial(\rho v^j)} = v^j,\ \frac{\partial E}{\partial(\rho s)} = T.$$

Умножим (3.2а) на q_0, (3.2б) — на q_j, (3.3) — на q_4 и потребуем, чтобы в итоге получалось (3.4). После вычислений отсюда следует, что $G = p$, т.е. система (3.2), (3.3) совпадает с классической системой уравнений газовой динамики.

Аналогичный подход может быть использован и для более сложных систем.

4. Двухскоростная механическая система. Пусть локальное состояние системы определяется набором $(\rho_{(1)}, v_{(1)}, \rho_{(2)}, v_{(2)})$, где $\rho_{(i)}(x) \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты, $\rho_{(1)} + \rho_{(2)} > 0$; $v_{(i)} \equiv (v^1_{(i)}, ..., v^n_{(i)})$, $n > 1$, — скорость i-й компоненты. Удобно перейти к величинам

(4.1) $$\rho \equiv \rho_{(1)} + \rho_{(2)},\ \varkappa \equiv \rho_{(1)}/\rho,\ v \equiv \varkappa v_{(1)} + (1 - \varkappa)v_{(2)},$$
$$w = v_{(1)} - v_{(2)}.$$

Теперь можно считать, что состояние системы определяется набором $u \equiv (\rho, \varkappa, v, w)$. Из (4.1) находим, что $v_{(1)} = v + (1 - \varkappa)w$, $v_{(2)} = v - \varkappa w$. Введем галилеевы векторы

$$V = (V^\alpha) \equiv (1, v), \; W = (W^\alpha) \equiv (0, w).$$

Проделаем тензорную классификацию.

Предложение 4.1.

1. *Величина $J(u)$ есть Г-скаляр тогда и только тогда, когда $J = J(\rho, \varkappa, w^2)$.*

2. *Совокупность величин $X(u) = (X^\alpha(u))$ есть галилеев вектор тогда и только тогда, когда $X = aV + bW$.*

3. *Совокупность величин $T(u) = (T^{\alpha\beta}(u))$ есть галилеев тензор типа (2,0) тогда и только тогда, когда $T = AV \otimes V + BV \otimes W + CW \otimes V + DW \otimes W + E\delta$. Здесь a, b, A, B, C, D, E — скаляры и потому зависят только от ρ, $\varkappa$, w^2.*

Таким образом, исходный набор скаляров $(\rho, \varkappa)$ дополняется независимым скаляром w^2, что и создает в конечном итоге особую специфику двухскоростной термодинамики.

Предложение 4.2.

1. *Величина $J(u, \partial u/\partial x)$ есть дивергентный галилеев скаляр тогда и только тогда, когда $J = \operatorname{div}X(u)$ и $X(u)$ — галилеев вектор.*

2. *Совокупность величин $X(u, \partial u/\partial x) = (X^\alpha)$ образует дивергентный галилеев вектор тогда и только тогда, когда $X = \operatorname{div}T(u)$ и $T(u)$ — галилеев тензор типа (2,0).*

Теперь нужно ввести дифференциальную форму энергии. Здесь возможны разные гипотезы, которые сформулируем в порядке их общности.

Гипотеза I. Принимается, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий компонент, т.е. полная энергия единицы объема есть

$$E(u) = \rho_{(1)}v_{(1)}^2/2 + \rho_{(2)}v_{(2)}^2/2 + \rho\varepsilon_0(\rho, \varkappa).$$

Здесь ε_0 — удельная внутренняя энергия при неподвижных компонентах, поэтому

$$d\varepsilon_0 = -pd(1/\rho) + \mu_{(1)0}d\varkappa \,. \tag{4.2}$$

Учитывая (4.1), находим

$$E = \rho(\varepsilon + v^2/2), \; \varepsilon \equiv \varepsilon_0 + \varkappa(1 - \varkappa)w^2/2. \tag{4.3}$$

Как видно из (4.3), $\varepsilon(\rho, \varkappa, w^2)$ играет роль внутренней энергии. Из (4.2), (4.3) следует

$$d\varepsilon = -pd(1/\rho) + [\mu_{(1)0} + (1 - 2\varkappa)w^2/2]d\varkappa + \varkappa(1 - \varkappa)w^k dw^k. \tag{4.4}$$

Итак, в конечном счете гипотеза I состоит в том, что $E \equiv \rho(\varepsilon + v^2/2)$, причем для ε выполняется (4.4).

Гипотеза II. Она является обобщением гипотезы I. В ней принимается, что $E = \rho[\varepsilon(\rho, \varkappa, w^2) + v^2/2]$, причем для $d\varepsilon$ задается более общее, чем (4.4), выражение

$$d\varepsilon = -p'd(1/\rho) + \mu'_{(1)}d\varkappa + j^k dw^k,$$

где $p' = p'(\rho, \varkappa, w^2)$ и т.д.

Гипотеза III. Здесь берется общая зависимость $E = E(\rho, \varkappa, v^2, w^2, (v \cdot w))$, вытекающая из требования инвариантности E относительно группы сдвигов и вращений; $(v \cdot w)$ — скалярное произведение векторов $v, w \in R^3$.

Гипотеза I, возможно, приближенна. Но она проста, наглядна, и потому построение теории двухскоростных систем разумно начать с нее. Далее будет приниматься именно она.

Гипотеза II позволяет уточнить гипотезу I. Пусть, например, компонента 2 образована мелкими частицами, движущимися в несущей жидкости с относительной скоростью w. Каждая частица создает в жидкости возмущения, которые дают свой вклад в кинетическую энергию. Если феноменологически состояние системы можно описать удовлетворительно набором $u = (\rho, \varkappa, v, w)$ (а если это не так, то исходный набор u следует расширить), то получится какой-то вариант гипотезы II, отличный от I.

Гипотеза III для галилеевых систем, по-видимому, сводится к гипотезе II. Таким образом, гипотеза II в двухскоростной механике, по-видимому, соответствует общему положению.

Состояние системы определяется двумя галилеевыми векторами, например ρV и $\rho_{(1)}V_{(1)}$. Соответственно примем, что уравнения движения распадаются на две группы, каждая из которых образует галилеев вектор. Первая группа определяет закон сохранения массы-импульса для системы в целом, вторая дает уравнение массы-импульса для компоненты 1.

Закон сохранения массы-импульса для системы в целом должен быть точен. Поэтому его форма должна иметь вид $\operatorname{div}T = 0$, где структура тензора $T(u)$ определяется предложением 4.1. Чтобы для системы в целом выполнялся еще закон сохранения момента импульса, тензор T должен быть симметричен. Первое уравнение ($\beta = 0$) должно быть законом сохранения массы

(4.5а) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k} = 0.$$

Следовательно, $T = \rho V \otimes V + \lambda(\rho, \varkappa, w^2)W \otimes W + G(\rho, \varkappa, w^2)\delta$. Поэтому

(4.5б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^j v^k + \lambda w^j w^k + G\delta^{jk}) = 0.$$

Уравнение баланса массы-импульса для компоненты 1 должно быть галилеевым вектором и иметь структуру квазилинейной системы первого порядка. Выделяя в нем дивергентную часть, запишем его следующим образом: $\operatorname{div}T_{(1)}(u) = F_{(1)}(u, \partial u/\partial x)$ ($T_{(1)}$ — тензор, $F_{(1)}$ — вектор). Сила $F_{(1)}$, действующая на компоненту, согласно нашему следующему предположению, не должна зависеть от $\partial u/\partial t$, т.е. ее структура такова:

(4.6) $$F_{(1)} = A^k_{(1)}(u)\partial u/\partial x^k + B_{(1)}(u).$$

Общий вид галилеева вектора, имеющего структуру (4.6), представим как

(4.7) $$\begin{aligned} F_{(1)} = {} & q_{(1)}V + f_{(1)}W + a_{(1)}(\delta\cdot\nabla\rho) + b_{(1)}(\delta\cdot\nabla\varkappa) + d_{(1)}(\delta\cdot\nabla w^2) + \\ & + A_{(1)}(W\cdot\nabla\rho)V + B_{(1)}(W\cdot\nabla\varkappa)V + D_{(1)}(W\cdot\nabla w^2)V + \\ & + L_{(1)}(W\cdot\nabla\rho)W + M_{(1)}(W\cdot\nabla\varkappa)W + K_{(1)}(W\cdot\nabla w^2)W + \\ & + \xi_{(1)}(\partial V/\partial x\cdot W) + \eta_{(1)}(\partial W/\partial x\cdot W) + \\ & + \varphi_{(1)}(\operatorname{div}V)V + \psi_{(1)}(\operatorname{div}W)V + \alpha_{(1)}(\operatorname{div}V)W + \beta_{(1)}(\operatorname{div}W)W, \end{aligned}$$

где коэффициенты $q_{(1)},\dots, \beta_{(1)}$ зависят только от $\rho, \varkappa, w^2$;

$$(\delta\cdot\nabla\rho)^\beta \equiv \delta^{\alpha\beta}\partial\rho/x^\alpha;\ (W\cdot\nabla\rho) \equiv W^\alpha\partial\rho/x^\alpha;\ (\partial V/\partial x\cdot W)^\beta \equiv \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha}W^\alpha$$

и т.д. Первое уравнение ($\beta = 0$) должно быть законом сохранения массы для компоненты 1. Оно принимается в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v_{(1)}) = \tilde{q}_{(1)}(u)$$

($\tilde{q}_{(1)}(u)$ — скаляр, и, значит, $\tilde{q}_{(1)} = \tilde{q}_{(1)}(\rho, \varkappa, w^2)$). С учетом (4.1) это уравнение записывается следующим образом:

(4.8а) $$\frac{\partial}{\partial t}(\varkappa\rho) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^k + \varkappa(1 - \varkappa)\rho w^k] = \tilde{q}_{(1)}(\rho, \varkappa, w^2).$$

Поэтому берем $q_{(1)} = \tilde{q}_{(1)}$, $A_{(1)} = B_{(1)} = D_{(1)} = \varphi_{(1)} = \psi_{(1)} = 0$. Уравнение баланса импульса для компоненты 1, коль скоро для энергии принята гипотеза I, разумно взять в виде

(4.9) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\ldots)^{kj} = F^j_{(1)}.$$

Общий вид тензора $T_{(1)}$, согласованный с (4.8а), (4.9), следующий:

$$T_{(1)} = \varkappa\rho V \otimes V + \varkappa(1 - \varkappa)\rho(V \otimes W + W \otimes V) + \lambda_{(1)} W \otimes W + G_{(1)}\delta.$$

Здесь $\lambda_{(1)} = \lambda_{(1)}(\rho, \varkappa, w^2)$; $G_{(1)} = G_{(1)}(\rho, \varkappa, w^2)$. Таким образом, приходим к уравнению баланса импульса компоненты 1:

(4.8б) $$\frac{\partial}{\partial t}[\varkappa\rho v^k + \varkappa(1 - \varkappa)\rho w^j] + \frac{\partial}{\partial x^k}T^{kj}_{(1)} = F^j_1.$$

Следствием (4.5), (4.8) с учетом (4.3), (4.4) должен быть закон сохранения энергии для системы в целом, который из-за присутствия в $F_{(1)}$ слагаемых, не содержащих производных, берется в форме

(4.10) $$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial R^k(u)}{\partial x^k} = \theta(u).$$

Итак, найдена структура базисных уравнений (4.5), (4.8) и замыкающего закона сохранения (4.10), причем определен явный вид слагаемых с производной по t, тогда как выражение для потоков еще нужно найти. Далее по сути все сводится к вычислению интегрирующих множителей. Преобразуем (4.4), исходя, как в п. 3, из структуры базисных уравнений:

(4.11) $$d(\rho\varepsilon) = \gamma d\rho + \mu_{(1)}d(\rho\varkappa) + w^k d[\varkappa(1 - \varkappa)\rho w^k],$$

$$\gamma \equiv \gamma_0 - \varkappa^2 w^2/2,\ \gamma_0 \equiv \varepsilon_0 + p/\rho - \varkappa\mu_{(1)0},\ \mu_{(1)} \equiv \mu_{(1)0} - (1 - 2\varkappa)w^2/2.$$

Отсюда легко находится полная дифференциальная форма

(4.12) $$dE = d[\rho(\varepsilon + v^2/2)] =$$

$$= q_0 d\rho + q_j d(\rho v^j) + q_{n+1}d(\varkappa\rho) + q_{n+1+j}d[\varkappa\rho v^j + \varkappa(1 - \varkappa)\rho w^j];$$

(4.13а) $$q_0 = \gamma_0 - \varkappa^2 w^2/2 + \varkappa v^k w^k - v^2/2 = \gamma_0 - v^2_{(2)}/2;$$

(4.13б) $$q_j = v^j - \varkappa w^j = v^j_{(2)};$$

(4.13в) $$q_{n+1} = \mu_{(1)0} - (1 - 2\varkappa)w^2/2 - v^k w^k = \mu_{(1)0} - v^2_{(1)}/2 + v^2_{(2)}/2;$$

(4.13г) $$q_{n+1+j} = w^j.$$

Умножим (4.5а) на q_0, (4.5б) — на q_j, (4.8а) — на q_{n+1}, (4.8б) — на q_{n+1+j} и потребуем, чтобы полученное выражение совпадало с (4.10). После длинных, но простых вычислений приходим к уравнениям

(4.14а) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k} = 0;$$

(4.14б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^j v^k + \varkappa(1 - \varkappa)\rho w^j w^k + (\xi w^j w^k + G\delta^{jk})] = 0;$$

(4.15) $$G \equiv p + \alpha w^2;$$

(4.16а) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varkappa) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^k] = q_{(1)};$$

(4.16б) $$\frac{\partial}{\partial t}[\varkappa\rho v^j + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^j] + \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^j v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho(v^j w^k +$$
$$+ w^j v^k) + \varkappa(1-\varkappa)^2\rho w^j w^k + \tilde{\lambda}_{(1)} w^j w^k] + \varkappa\frac{\partial}{\partial x^k}(\xi w^j w^k + G\delta^{jk}) +$$
$$+ \varkappa(1-\varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(1)0}}{\partial x^j} + \xi w^k\frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \alpha w^j\frac{\partial v^k}{\partial x^k} = q_{(1)}v^j - fw^j + Q^j_{(1)},$$
$$Q^j_{(1)} \equiv \tilde{L}_{(1)}(w^j w^k - w^2\delta^{jk})\frac{\partial\rho}{\partial x^k} + \tilde{M}_{(1)}(w^j w^k - w^2\delta^{jk})\frac{\partial\varkappa}{\partial x^k} +$$
$$+ \tilde{K}_{(1)}(w^j w^k - w^2\delta^{jk})\frac{\partial w^2}{\partial x^k} + \tilde{\eta}(w^k\frac{\partial w^j}{\partial x^k} - w^k\frac{\partial w^k}{\partial x^j}).$$

Здесь ξ, α,..., $\tilde{\eta}$ зависят только от скаляров ρ, $\varkappa$, w^2. Заметим, что $w^j Q^j = 0$, т.е. $w \perp Q$. Поэтому Q вклада в закон сохранения энергии не дает. Последний имеет вид

(4.17) $$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon + v^2/2)] + \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho v^k(\varepsilon + v^2/2 + G/\rho) +$$
$$+ \rho w^k[\varkappa(1-\varkappa)(v\cdot w) + (\xi/\rho)(v\cdot w) + \varkappa(1-\varkappa)\mu_{(1)0} +$$
$$+ \varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa)w^2/2 + (\tilde{\lambda}_{(1)}/\rho)w^2]\} = \theta;$$

(4.18) $$\theta = [\mu_{(1)0} - (1-2\varkappa)w^2/2]q_{(1)} - fw^2.$$

Если $w \approx 0$, то (4.14), (4.16а) переходят в уравнения односкоростной гидродинамики:

(4.19а) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k} = 0;$$

(4.19б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^j v^k + p\delta^{jk}] = 0;$$

(4.20) $$\frac{\partial}{\partial t}(\varkappa\rho) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\varkappa\rho v^k) = 0.$$

Интегрирующие множители (4.13а)—(4.13в) при этом переходят в интегрирующие множители для системы (4.19), (4.20) $q_0 = \gamma_0 - v^2/2$, $q_j = v^j$, $q_{n+1} = \mu_{(1)0}$. Таким образом, имеется корректный предельный переход к односкоростной гидродинамике. Это в принципе позволяет строить решения двухскоростной гидродинамики в виде ряда по степеням w^2, используя в качестве нулевого приближения известные решения односкоростной гидродинамики.

5. Минимальная система. Уравнения (4.14)—(4.18) сложны, и поэтому разумно вначале рассмотреть (и использовать в приложениях) их простейший вариант, вводя затем в него, если возникнет необходимость, дополнительные слагаемые из (4.14)—(4.18). Поэтому полагаем $\xi = \alpha = \tilde{\lambda}_{(1)} = \tilde{L}_{(1)} = \tilde{M}_{(1)} = \tilde{K}_{(1)} = \tilde{\eta} = 0$, что приводит к уравнениям

(5.1а) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v^k}{\partial x^k} = 0;$$

(5.1б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^j v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^j w^k + p\delta^{jk}] = 0;$$

(5.2а) $$\frac{\partial}{\partial t}(\varkappa\rho) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^k] = q_{(1)};$$

(5.2б) $$\frac{\partial}{\partial t}[\varkappa\rho v^j + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^j] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^j v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho(v^j w^k + w^j v^k) + \varkappa(1-\varkappa)^2\rho w^j w^k] +$$
$$+ \varkappa\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1-\varkappa)\rho\frac{\partial \mu_{(1)0}}{\partial x^j} = q_{(1)}v^j - fw^j.$$

Закон сохранения энергии для (5.1), (5.2) имеет вид

(5.3) $$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon + v^2/2)] + \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho v^k(\varepsilon + v^2/2 + p/\rho) +$$
$$+ \rho w^k[\varkappa(1-\varkappa)(v\cdot w) + \varkappa(1-\varkappa)\mu_{(1)0} + \varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa)w^2/2]\} = \theta,$$

где θ определяется выражением (4.18). Более симметричная и, возможно, более наглядная форма записи получается, если вернуться к первоначальным переменным ($\rho_{(1)}, v_{(1)}, \rho_{(2)}, v_{(2)}$) и выписать уравнение баланса массы-импульса для каждой компоненты:

(5.4а) $$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{(1)} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^k_{(1)}) = q_{(1)};$$

(5.4б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)}) + \varkappa\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1-\varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(1)0}}{\partial x^j} =$$
$$= q_{(1)}v^j - f(v^j_{(1)} - v^j_{(1)});$$

(5.5а) $$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{(2)} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)}v^k_{(2)}) = q_{(2)};$$

(5.5б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)}) + (1-\varkappa)\frac{\partial p}{\partial x^j} +$$
$$+ \varkappa(1-\varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(2)0}}{\partial x^j} = q_{(2)}v^j - f(v^j_{(2)} - v^j_{(2)}).$$

Здесь $q_{(2)} \equiv -q_{(1)}$; $\mu_{(2)0} \equiv -\mu_{(1)0}$. Закон сохранения энергии можно записать следующим образом:

(5.6) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon_0 + \rho_{(1)}v^2_{(1)}/2 + \rho_{(2)}v^2_{(2)}/2) + \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho_{(1)}v^k_{(1)}[\varepsilon_0 + v^2_{(1)}/2 + p/\rho +$$
$$+ (1-\varkappa)\mu_{(1)0}] + \rho_{(2)}v^k_{(2)}[\varepsilon_0 + v^2_{(2)}/2 + p/\rho + \varkappa\mu_{(2)0}]\} = \theta.$$

Складывая (5.4а) и (5.5а), (5.4б) и (5.5б), получим закон сохранения массы-импульса для системы в целом:

(5.7а) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)} + \rho_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}v^k_{(2)}) = 0;$$

(5.7б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)} + p\delta^{jk}) = 0.$$

Уравнения (5.1) и (5.7) эквивалентны. Уравнения (5.4), (5.5) построены вполне симметрично, а именно: (5.4) переходит в (5.5) и (5.5) в (5.4), если сделать замену ((1), (2), $\varkappa$) $\to$ ((2), (1), $1-\varkappa$).

6. Гидравлическая аналогия. Как известно, между классическими уравнениями газовой динамики и теории мелкой воды имеется аналогия. Подобная аналогия есть и между (5.4), (5.5) и уравнениями двухслойной мелкой воды.

Верхнему слою присвоим индекс (1), нижнему — (2). Толщину j-го слоя обозначим через $h_{(j)}$ (полная глубина $H = h_{(1)} + h_{(2)}$), среднюю скорость — $v_{(j)}$ и плотность — $\rho_{(j)}(\rho_{(j)} = \text{const} > 0)$.

Уравнения двухслойной мелкой воды имеют вид [10]

(6.1) $$\frac{\partial h_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(v^k_{(1)} h_{(1)}) = 0;$$

(6.2) $$\frac{\partial v^j_{(1)}}{\partial t} + v^k_{(1)} \frac{\partial v^j_{(1)}}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^j}[g(h_{(1)} + h_{(2)})] = 0;$$

(6.3) $$\frac{\partial h_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(v^k_{(2)} h_{(2)}) = 0;$$

(6.4) $$\frac{\partial v^j_{(2)}}{\partial t} + v^k_{(2)} \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^j}[g(\lambda h_{(1)} + h_{(2)})] = 0,$$

$$\lambda \equiv \rho_{(1)}/\rho_{(2)}.$$

Из (6.1)—(6.4) находятся уравнения баланса массы-импульса для каждого слоя:

(6.5а) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)} h_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)} h_{(1)} v^k_{(1)}) = 0;$$

(6.5б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)} h_{(1)} v^j_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)} h_{(1)} v^j_{(1)} v^k_{(1)}) +$$
$$+ g\rho_{(1)} h_{(1)} \frac{\partial h_{(1)}}{\partial x^j} + g\rho_{(1)} h_{(1)} \frac{\partial h_{(2)}}{\partial x^j} = 0;$$

(6.6а) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(2)} h_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)} h_{(2)} v^k_{(2)}) = 0;$$

(6.6б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(2)} h_{(2)} v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)} h_{(2)} v^j_{(2)} v^k_{(2)}) +$$
$$+ g\lambda\rho_{(2)} h_{(2)} \frac{\partial h_{(1)}}{\partial x^j} + g\rho_{(2)} h_{(2)} \frac{\partial h_{(2)}}{\partial x^j} = 0.$$

Закон сохранения энергии запишем как

(6.7) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)} h_{(1)} v^2_{(1)}/2 + \rho_{(2)} h_{(2)} v^2_{(2)}/2 +$$
$$+ g\rho_{(1)} h^2_{(1)}/2 + g\rho_{(2)} h^2_{(2)}/2 + g\rho_{(1)} h_{(1)} h_{(2)}) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho_{(1)} h_{(1)} v^k_{(1)}(v^2_{(1)}/2 + gh_{(1)} + gh_{(2)}) +$$
$$+ \rho_{(2)} h_{(2)} v^k_{(2)}(v^2_{(2)}/2 + g\lambda h_{(1)} + gh_{(2)})\} = 0.$$

Таким образом,

$$E \equiv \rho_{(1)} h_{(1)} v^2_{(1)}/2 + \rho_{(2)} h_{(2)} v^2_{(2)}/2 +$$
$$+ (g\rho_{(1)} h^2_{(1)}/2 + g\rho_{(2)} h^2_{(2)}/2 + g\rho_{(1)} h_{(1)} h_{(2)}).$$

Полагаем

$$\omega_{(j)} \equiv \rho_{(j)} h_{(j)},\ \omega \equiv \omega_{(1)} + \omega_{(2)},\ \varkappa \equiv \omega_{(1)}/\omega,$$
$$v \equiv \varkappa v_{(1)} + (1 - \varkappa) v_{(2)},\ w \equiv v_{(1)} - v_{(2)}.$$

Энергию E представим теперь в виде

$$E = \omega(\varepsilon + v^2/2),\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa(1-\varkappa)w^2/2,\ \varepsilon_0 = \frac{g\omega}{2\rho_{(1)}}[\lambda + \varkappa^2(1-\lambda)].$$

Из соотношения $d\varepsilon_0 = -pd(1/\omega) + \mu_{(1)0}d\varkappa$ с помощью дифференцирования находим

$$p/\omega = \varepsilon_0,\ \mu_{(1)0} = (g\omega/\rho_{(1)})\varkappa(1-\lambda).$$

Теперь (6.5), (6.6) можно записать в форме, аналогичной (5.4), (5.5), где следует взять $q_{(i)} = 0$, $f = 0$:

(6.8а) $$\frac{\partial\omega_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\omega_{(1)}v^k_{(1)}) = 0;$$

(6.8б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_{(1)}v_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\omega_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)}) + \varkappa\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1-\varkappa)\omega\frac{\partial\mu_{(1)0}}{\partial x^j} = 0;$$

(6.9а) $$\frac{\partial\omega_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\omega_{(2)}v^k_{(2)}) = 0;$$

(6.9б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_{(2)}v_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\omega_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)}) + (1-\varkappa)\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1-\varkappa)\omega\frac{\partial\mu_{(2)0}}{\partial x^j} = 0,$$

$$\mu_{(2)0} \equiv -\mu_{(1)0}.$$

Рассмотрим плоское течение ($n = 2$). Найдем все законы сохранения, имеющие форму

(6.10) $$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} + \frac{\partial\psi^k(u)}{\partial x^k} = 0,\ u \equiv (h_{(1)}, v_{(1)}, h_{(2)}, v_{(2)}),$$

$$v_{(j)} \equiv (v^1_{(j)}, v^2_{(j)}).$$

Три независимых закона сохранения уже выписаны: (6.1), (6.3) и (6.7). Очевиден еще закон сохранения полного импульса, который получается, если сложить (6.5б) и (6.6б):

(6.11) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}h_{(1)}v^j_{(1)} + \rho_{(2)}h_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}h_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}h_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)} +$$
$$+ g\rho_{(1)}h^2_{(1)}/2 + g\rho_{(2)}h^2_{(2)}/2 + g\rho_{(1)}h_{(1)}h_{(2)}) = 0.$$

Других независимых законов сохранения типа (6.10) нет — все законы сохранения этого типа представляются как линейные комбинации с постоянными коэффициентами законов сохранения (6.1), (6.3), (6.7), (6.11). Поэтому система законов сохранения не полна и возникает проблема корректного описания разрывных решений типа ударных волн для системы (6.1)—(6.4) или доказательства, что подобных решений не существует (например, что задача о распаде произвольного начального разрыва при $t > 0$ имеет гладкое решение). В одномерном случае ($n = 1$), как ясно из (6.2), (6.4), есть еще законы сохранения:

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[v^2_{(1)}/2 + g(h_{(1)} + h_{(2)})] = 0,$$

$$\frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[v^2_{(2)}/2 + g(\lambda h_{(1)} + h_{(2)})] = 0.$$

При переходе к плановым задачам они исчезают, поэтому опираться на них для нахождения соотношений на разрыве нельзя.

7. Учет тепла. Обобщим построение пп. **4**, **5**. Предположим, что имеется еще независимый параметр s (удельная энтропия), так что локальное состояние системы характеризуется набором $(\rho_{(1)}, v_{(1)}, \rho_{(2)}, v_{(2)}, s)$. Как в п. **4**, удобно перейти к $u = (\rho, \varkappa, s, v, w)$. Полный набор независимых скаляров таков: ρ, $\varkappa$, s, w^2. Тензорная классификация очевидна. Например, общий вид галилеева вектора $X(u)$ таков: $X = a(\rho, \varkappa, s, w^2)V + b(\rho, \varkappa, s, w^2)W$. Для энергии $E(u)$ принимается опять гипотеза I:

$$E = \rho_{(1)}v^2_{(1)}/2 + \rho_{(2)}v^2_{(2)}/2 + \rho\varepsilon_0(\rho, \varkappa, s),$$
$$d\varepsilon_0 = Tds - pd(1/\rho) + \mu_{(1)0}d\varkappa,$$

или

(7.1) $$E = \rho(\varepsilon + v^2/2),\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa(1 - \varkappa)w^2/2;$$

(7.2) $$d\varepsilon = Tds - pd(1/\rho) + [\mu_{(1)0} + (1 - 2\varkappa)w^2/2]d\varkappa + \varkappa(1 - \varkappa)w^k dw^k.$$

Структура уравнений баланса массы-импульса определяется, как в п. **4**, причем в выражении для $F_{(1)}$ появляются очевидным образом слагаемые, содержащие ∇s. Поскольку введена скалярная величина s, то систему нужно дополнить скалярным законом сохранения $\operatorname{div}X(u) = \theta(\rho, \varkappa, s, w^2)$, где $X(u)$ — галилеев вектор. Это уравнение по предположению имеет физический смысл закона сохранения энтропии, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\cdots)^k = \theta.$$

Поэтому $X = \rho V + \zeta_{(12)}(\rho, \varkappa, s, w^2)W$. Следствием этих уравнений должен быть точный закон сохранения энергии

(7.3) $$\frac{\partial E(u)}{\partial t} + \frac{\partial R^k(u)}{\partial x^k} = 0.$$

Закон сохранения (7.3) в отличие от (4.10) берется точным, поскольку предполагается, что в (7.1), (7.2) учтены все формы энергии, включая тепловую, тогда как в (4.10) учитывались только механические формы энергии и работы. Теперь, как в п. **4**, находятся интегрирующие множители, для чего (7.2) преобразуется в полную дифференциальную форму. Далее вычисления проводятся, как в п. **4**, что приводит к аналогу уравнений (4.14)—(4.18). Для простоты приведем только минимальную систему. Аналог уравнений (5.4)—(5.6) имеет вид

(7.4а) $$\frac{\partial\rho_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^k_{(1)}) = q_{(1)};$$

(7.4б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^k_{(1)}v^j_{(1)}) + \varkappa\frac{\partial p}{\partial x^j} + \varkappa(1 - \varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(1)0}}{\partial x^j} +$$
$$+ \zeta_{(12)}\frac{\partial T}{\partial x^j} = q_{(1)}v^j - f(v^j_{(1)} - v^j_{(2)});$$

(7.5а) $$\frac{\partial\rho_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)}v^k_{(2)}) = q_{(2)};$$

(7.5б) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(2)}v^k_{(2)}v^j_{(2)}) + (1 - \varkappa)\frac{\partial p}{\partial x^j} +$$
$$+ \varkappa(1 - \varkappa)\rho\frac{\partial\mu_{(2)0}}{\partial x^j} + \zeta_{(21)}\frac{\partial T}{\partial x^j} = q_{(2)}v^j - f(v^j_{(2)} - v^j_{(1)});$$

(7.6) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho s v^k + \zeta_{(12)}w^k) = \theta;$$

$$(7.7) \qquad \theta \equiv (fw^2 - \mu_{(1)}q_{(1)})/T,\ \mu_{(1)} \equiv \mu_{(1)0} - (1 - 2\varkappa)w^2/2.$$

Здесь $q_{(2)} \equiv -q_{(1)}$; $\mu_{(2)0} \equiv -\mu_{(1)0}$; $\zeta_{(21)} \equiv -\zeta_{(12)}$; функции $q_{(1)}(\rho, \varkappa, s, w^2)$, $f(\rho, \varkappa, s, w^2)$, $\zeta_{(12)}(\rho, \varkappa, s, w^2)$ заданы. Следствием (7.4)—(7.7) является закон сохранения энергии

$$(7.8) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon_0 + \rho_{(1)}v^2_{(1)}/2 + \rho_{(2)}v^2_{(2)}/2) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho_{(1)}v^k_{(1)}[\varepsilon_0 + v^2_{(1)}/2 + p/\rho + (1 - \varkappa)\mu_{(1)0} + T\zeta_{(12)}/\rho_{(1)}] +$$

$$+ \rho_{(2)}v^k_{(2)}[\varepsilon_0 + v^2_{(2)}/2 + p/\rho + \varkappa\mu_{(2)0} + T\zeta_{(21)}/\rho_{(2)}]\} = 0.$$

Складывая (7.4а) и (7.5а), (7.4б) и (7.5б), получим закон сохранения массы-импульса для системы в целом:

$$(7.9\text{а}) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)} + \rho_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}v^k_{(2)}) = 0;$$

$$(7.9\text{б}) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)} + p\delta^{jk}) = 0.$$

Приведем соображение, помогающее в некоторых ситуациях сформулировать гипотезу для определения $\zeta_{(12)}$. Пусть можно принять, что компонентой 1 переносится часть энтропии $\rho_{(1)}s_{(1)}$, а компонентой 2 — $\rho_{(2)}s_{(2)}$, так что $\rho s = \rho_{(1)}s_{(1)} + \rho_{(2)}s_{(2)}$. (Например, в гидродинамике сверхтекучей жидкости принимается, что вся энтропия переносится нормальной компонентой.) Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}s_{(1)} + \rho_{(2)}s_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}s_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}s_{(2)}v^k_{(2)}) = \theta.$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$(7.10) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho s v^k + \varkappa(1 - \varkappa)\rho(s_{(1)} - s_{(2)})w^k] = \theta.$$

Сравнивая (7.6) и (7.10), видим, что $\zeta_{(12)} = \varkappa(1 - \varkappa)\rho(s_{(1)} - s_{(2)})$.

Найденные уравнения отличаются как от уравнений двухскоростной гетерогенной гидродинамики, описанных в [11, 12], так и от уравнений, полученных в [5, 6]. Представляется, что сделанные выше структурные гипотезы достаточно естественны. Дальнейшее уточнение описания двухскоростной физической системы возможно путем перехода от гипотезы I к подходящему варианту гипотезы II и/или путем введения в исходный набор *u* дополнительных параметров. Если эти параметры — скаляры, то существенных технических трудностей не возникает.

З а м е ч а н и е. Состояние термодинамического равновесия характеризуется соотношениями $T = \text{const}$, $p = \text{const}$, $\mu_{(1)0} = \text{const}$. Отклонения от него приводят к тому, что $\nabla p \neq 0$ и/или $\nabla\mu_{(1)0} \neq 0$, и/или $\nabla T \neq 0$. При этом, как видно из (7.4б) и (7.5б), возникают силы, приводящие компоненты в движение. Если из-за наличия дополнительных факторов (гравитация, электромагнитное поле и др.) условия термодинамического равновесия формулируются иначе, то в эти уравнения необходимо внести коррективы.

8. Фазовые переходы. В двухскоростной термодинамике внутренняя энергия ε зависит от скаляра w^2. Поэтому фазовые переходы зависят, вообще говоря, от w^2, и вместо зависимостей типа $T = T(p, \varkappa)$, характерных для фазового перехода, должны появиться зависимость $T(p, \varkappa, w^2)$ или ее аналог. Не исключено и появление новых форм фазовых переходов, неизвестных в традиционной термодинамике. Ниже дан первоначальный набросок общего подхода к теории фазовых переходов, применимый, как я думаю, и к

двухскоростной термодинамике. Вернемся к п. 3 и разберем для иллюстрации газ Ван-дер-Ваальса.

Возьмем (3.2), (3.3), рассматриваемые в данном случае как базисные законы сохранения, и вытекающий из них замыкающий закон сохранения (3.4). С этой структурой основных уравнений ассоциирована первая термодинамическая форма (3.5) с каноническим потенциалом $\rho\varepsilon = \Phi(\rho, \rho s)$. Если потенциал Φ определен в области Ω переменных $\rho, \rho s$ (Ω для простоты предполагается выпуклой), то в координатном пространстве $(\rho, \rho s, \rho\varepsilon)$ определено многообразие M, задаваемое уравнением $\rho\varepsilon = \Phi(\rho, \rho s)$, $(\rho, \rho s) \in \Omega$, причем M взаимно однозначно проектируемо на плоскость $(\rho, \rho s)$. Сопряженный набор переменных — (γ, T). Если каноническое отображение $(\rho, \rho s) \to (\gamma, T)$ взаимно однозначно и гладко, то определен сопряженный потенциал $p = \Phi_*(\gamma, T)$, $(\gamma, T) \in \Omega_*$, Ω_* — образ Ω при каноническом отображении. Тем самым в сопряженном координатном пространстве (γ, T, p) определено гладкое многообразие M_*, которое взаимно однозначно проектируемо на плоскость (γ, T). Кроме того, определено гладкое отображение π: $M \to M_*$, которое является диффеоморфизмом M на M_*. В этом случае Ω будет называться областью регулярности. В ней (без выхода за Ω) фазовых переходов нет. Типичным условием регулярности (и одновременно локальной устойчивости) является строгая выпуклость потенциала $\Phi(\rho, \rho s)$, откуда вытекает также строгая выпуклость $\Phi_*(\gamma, T)$. Иначе говоря, отсутствие фазового перехода геометрически интерпретируется как существование в сопряженном пространстве гладкого многообразия M_*, проектируемого на область Ω_* в координатном пространстве сопряженных переменных (γ, T). Если каноническое отображение $(\rho, \rho s) \to (\gamma, T)$ имеет особенность, то по определению есть фазовый переход, тип которого задается типом особенности. Особенности могут вызываться негладкостью отображения (фазовые переходы второго и т.п. родов) или отсутствием взаимной однозначности (фазовые переходы первого рода). Последнее возможно, если потенциал Φ не всюду выпуклый. В этом случае многообразие M_* определено соотношениями $\gamma = \gamma(\rho, \rho s)$, $T = T(\rho, \rho s)$, $p = p(\rho, \rho s)$, но оно не проектируемо на Ω_* (не существует определенной всюду в Ω_* функции $p = p(\gamma, T)$, задающей M_*) и, возможно, не всюду гладко. Соответственно и отображение π: $M \to M_*$ имеет особенности. Анализ канонического отображения π: $M \to M_*$ с общей точки зрения является ключевым в математической теории фазовых переходов, а классификация возможных типов его особенностей дает наиболее адекватную классификацию типов фазовых переходов. Как известно, продвинутая классификация особенностей дифференцируемых отображений имеется в теории катастроф.

Возьмем газ Ван-дер-Ваальса:

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}, \quad c_V = \text{const}. \tag{8.1}$$

Здесь v — удельный объем; R — газовая постоянная, зависящая от природы газа; a, b — постоянные Ван-дер-Ваальса; c_V — удельная теплоемкость. Критические параметры: $v_k = 3b$, $T_k = 8a/27Rb^2$, $p_k = a/27b^2$. Введем безразмерные величины:

$$v' \equiv v/v_k,\ T' \equiv T/T_k,\ p' \equiv p/p_k,$$
$$\varepsilon' \equiv (9b/a)\varepsilon,\ s' \equiv (8/3R)s,\ c'_V \equiv (8/3R)c_V.$$

В безразмерной записи (8.1) приобретает вид

$$p' = \frac{8T'}{3v' - 1} - \frac{3}{(v')^2}, \quad c_V' = \text{const}. \tag{8.2}$$

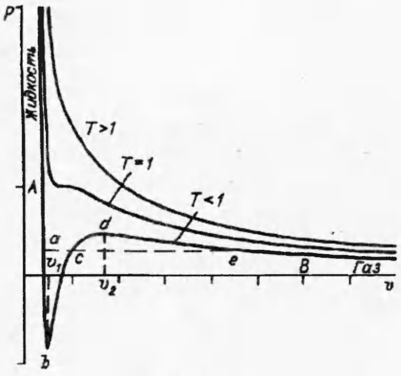

Рис. 1

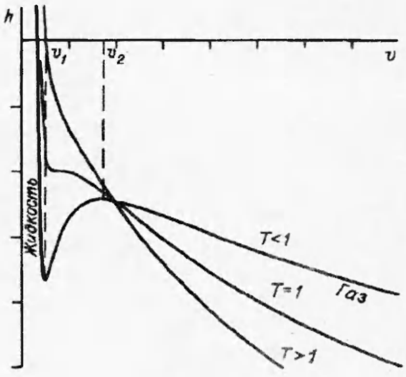

Рис. 2

Далее для упрощения записи штрих опускается. После вычислений находим

$$(8.3)\gamma - \lambda(T) = T\left\{\frac{8v}{3v-1} - \frac{8}{3}\ln\left(\frac{3v-1}{2}\right)\right\} - \frac{6}{v},\ \lambda(T) \equiv c_V T(1 - \ln T) - Ts_k$$

(s_k — значение энтропии s при $T = v = 1$). Обозначим $h \equiv \gamma - \lambda$.

Традиционный способ определения положения фазового перехода при $T < 1$ состоит в использовании правила Максвелла [13] (рис. 1), в соответствии с которым участок кривой $abcde$ (отвечающий метастабильным состояниям ab и de и физически невозможному состоянию bcd) отбрасывается; при этом $\gamma(a) = \gamma(e)$. В результате уравнение состояния задается кривыми aA (жидкая фаза) и eB (газ).

Построим в координатном пространстве (γ, T, p) многообразие M_*, воспользовавшись для этого соотношениями (8.2), (8.3), дающими удобное в данном случае параметрическое представление $\gamma = \gamma(v, T)$, $p = p(v, T)$ (рис. 1—3). Образы точек a, e (рис. 1) сливаются в одну точку $a_* = e_*$ (рис. 3), кривая $abcde$ переходит в замкнутую кривую $a_*b_*c_*d_*e_*$. Производные в точках b_* и a_* в соответствии с (3.6) имеют вид $\partial p/\partial\gamma|_{b_*} = 1/$ $/ v_1 = \rho_{(1)} > 0$, $\partial p/\partial\gamma|_{a_*} = 1/v_2 = \rho_{(2)} > 0$ (так что производные $\partial p/\partial\gamma$ непрерывны!). Структура M_* теперь ясна. При $T > 1$ многообразие гладко и выпукло. В критической точке $T = 1$, $p = 1$ имеется особенность — многообразие начинает свертываться, образуется трубка, соответствующая метастабильным и физически невозможным состояниям. Применение правила Максвелла равносильно удалению этой трубки. В итоге из кривой $A_*a_*b_*c_*d_*e_*B_*$ получается непрерывная строго выпуклая кривая $A_*a_*B_*$, имеющая в точке a_* разрыв производной (угловую точку), и соответственно M_* заменяется строго выпуклым многообразием M_*^0, гладким всюду, за исключением линии, начинающейся в критической точке и определяющей положение фазового перехода. Следует заметить, что строгая выпуклость потенциала имеет решающее значение для корректности задачи о распаде произвольного разрыва, так что одновременно получается способ регуляризации задачи о распаде разрыва для невыпуклых уравнений состояния. Регуляризация многообразия состоит, очевидно, в том, что в области неоднозначности, т.е. там, где некоторым (p, T) соответствует множество $\{\gamma_\nu\}$, выбирается наименьшее γ, т.е. $\min\{\gamma_\nu\}$ (это отвечает условию Гиббса устойчивости термодинамического равновесия), или, что то же, там, где некоторым (γ, T) соответствует множество $\{p_\alpha\}$, выбирается наибольшее p, т.е. $\max\{p_\alpha\}$. Последнее означает, что в области неоднозначности преобразование Лежандра заменяется обобщенным преобразованием Лежандра

$\Phi_* \equiv \max\limits_{\alpha}(\rho\gamma + \rho sT - \rho\varepsilon)$ (см. также [14]).

Формально эта процедура является общей и состоит в следующем.

1. Исходя из структуры базисных и замыкающего законов сохранения (или более обще — балансовых уравнений) для подходящего набора экстенсивных физических величин определяются канонические термодинамические переменные первого рода $a = (a_k)$ и первый термодинамический потенциал $\Phi(a)$.

2. Строится первая основная дифференциальная форма $d\Phi = A^k da_k$.

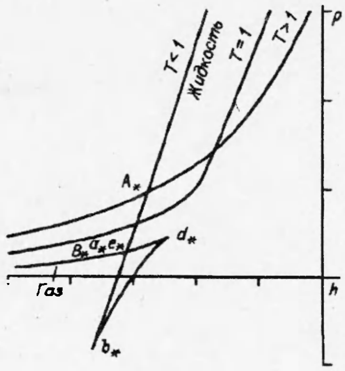

Рис. 3

3. Находятся сопряженные термодинамические переменные $A(a) = (A^k(a))$ и сопряженный потенциал $\Phi_* \equiv A^k a_k - \Phi$. Тем самым многообразие M_* в сопряженном координатном пространстве $((A^k), \Phi_*)$ может быть задано параметрически уравнениями $A^k = A^k(a)$, $\Phi_* = \Phi_*(a)$.

4. Рассматривается каноническое отображение $a \to A(a)$.

5. Если оно в целом не взаимно однозначно, то имеются такие $A(a)$, которым соответствует множество $\{\Phi_{*\alpha}(a)\}$. В этом случае классическое преобразование Лежандра заменяется обобщенным. Если условием устойчивости термодинамического равновесия является выпуклость $\Phi(a)$, то берется выражение $\Phi_* \equiv \max\limits_{\alpha}(A^k a_k - \Phi)$, а если — вогнутость $\Phi(a)$, то $\Phi_* \equiv$ $\equiv \min\limits_{\alpha}(A^k a_k - \Phi)$.

З а м е ч а н и е. В более детальных теориях, учитывающих размеры пузырьков, поверхностное натяжение и пр., представляют интерес и метастабильные части $a_* b_*$ и $e_* d_*$. Действительно, если, например, система находится в точке ζ, лежащей на $a_* b_*$, то из жидкости образуется газовая компонента, причем скорость образования новой фазы при заданных p и T в первом приближении, по-видимому, определяется величиной $q \sim \gamma(a_*) -$ $- \gamma(\zeta)$. Подобные соображения позволяют конкретизировать величины $q_{(\iota)}$, входящие в уравнения (7.4a), (7.5a) или их аналоги.

9. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. Исторически первым примером двухскоростной гидродинамики явилась гидродинамика сверхтекучей жидкости, построенная Ландау [4]. Опишем и частично прокомментируем основные постулаты этой теории в свете сделанного выше. Нормальной компоненте присвоим индекс 1, а сверхтекучей — 2.

1. Первая гипотеза состоит в том, что $\rho_{(1)}$ и $\rho_{(2)}$ зависят только от температуры, так что $\rho = \rho(T)$ и $\varkappa = \varkappa(T)$.

2. Для E берется выражение (в наших обозначениях)

$$E \equiv \rho v^2/2 - \varkappa^2 \rho w^2/2 + E_0(\rho, s, j_0^2),\ j_0 \equiv \varkappa\rho w,$$

причем принимается, что

$$dE_0 \equiv \Phi d\rho + Td(\rho s) + w^k dj_0^k,$$

где функция $\Phi(\rho, s, j_0)$ пока неизвестна. Иначе это можно записать следующим образом:

$$E = \rho(\varepsilon + v^2/2),\ \varepsilon = \varepsilon(\rho, s, j_0^2), \tag{9.1}$$
$$d\varepsilon = -\tilde{p}d(1/\rho) + Tds + [(1 - \varkappa)/\rho]w^k dj_0^k.$$

В силу гипотезы 1 внутренняя энергия ε явно зависит не от набора $(\rho, \varkappa, s, w^2)$ независимых скаляров, а от меньшего их числа (ρ, s, j_0^2). С другой стороны, различие последних слагаемых в (9.1) и (7.2) свидетельствует о том, что вместо гипотезы I, вообще говоря, принят какой-то вариант гипотезы II. Если зависимость $\rho = \rho(T)$ обратима и $T = T(\rho)$, $\varkappa = \varkappa(\rho)$, то (9.1) можно записать в виде

$$d\varepsilon = Tds - p'd(1/\rho) + \varkappa(1-\varkappa)w^k dw^k, \tag{9.2}$$

$$p' \equiv \tilde{p} + [(1-\varkappa)\rho d(\rho\varkappa)/d\rho]w^2.$$

Соотношение (9.2) совпадает с (7.2), если в (7.2) ε не зависит от $\varkappa$ (как от независимой переменной), так что $\mu'_{(1)} = 0$.

3. Следующая гипотеза состоит в том, что энтропия переносится только нормальной компонентой, т.е. в (7.10) берется $s_{(2)} = 0$, поэтому $\zeta_{(12)} = (1-\varkappa)\rho s$.

4. Четвертая (и весьма сильная) гипотеза состоит в утверждении

$$\omega_{(2)} = \operatorname{rot} v_{(2)} = 0, \quad \frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(Q + \frac{v^2_{(2)}}{2}\right) = 0, \tag{9.3}$$

где $Q = Q(\rho, s, f_0^2)$ должно быть еще найдено.

5. Как и в данной работе, закон сохранения энергии берется точным.

6. Наконец, требуется галилеева инвариантность уравнений.

Из этих гипотез получается закон сохранения полного импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{(1)}v^j_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho_{(1)}v^j_{(1)}v^k_{(1)} + \rho_{(2)}v^j_{(2)}v^k_{(2)} + G\delta^{jk}) = 0, \tag{9.4}$$

$$G \equiv \tilde{p} + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^2.$$

Если $T = T(\rho)$, т.е. справедливо (9.2), то $G = p' - [\rho(1-\varkappa)d\varkappa / d\rho]w^2$. В [4] G называется давлением и обозначается через p (ср., однако, с (4.15)). Поскольку $\varkappa$ не есть независимый скаляр, то отдельного уравнения для $\varkappa$, аналогичного (5.2а), нет.

В классической гидродинамике справедливо уравнение Лемба—Громеки [15]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{v^2}{2}\right) = v\times\omega. \tag{9.5}$$

Если в подобной гидродинамике возможен предельный переход при $\varkappa \to 1$, то в пределе из (9.3) должно бы получиться (9.5) или с учетом того, что $\omega_{(2)} = 0$, равенство $(1/\rho)\partial p/\partial x^j = \partial Q/\partial x^j$. Выражение $(1/\rho)\partial p/\partial x^j$ может быть представлено как градиент скаляра Q только в весьма специальных случаях: $\rho = \text{const}$ или $p = p(\rho)$, или в пределе при $T \to 0$ при подходящем вырождении зависимости $\rho(T)$. Иначе говоря, за исключением особых случаев, состояние $\varkappa \approx 1$ в подобной гидродинамике невозможно.

Итак, по сравнению с теорией, изложенной в п. 7, здесь берется иная дифференциальная форма для внутренней энергии ε и принимаются весьма сильные гипотезы 1 и 4. Гипотеза 2 не производит впечатления единственно возможной, вопреки изложению в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шугрин С.М. Галилеевы системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 12.
2. Шугрин С.М. Законы сохранения, инвариантность и уравнения газовой динамики // ПМТФ. — 1989. — № 2.
3. Шугрин С.М. Об уравнениях диссипативной галилеевой и лоренцевой гидродинамики // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1990. — Вып. 96.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.

5. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. — 1992. — № 3.
6. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. — 1993. — № 1.
7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
8. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
9. Чакыров У.И. Дифференциальные инварианты некоторых расширений группы Галилея // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1985. — Вып. 69.
10. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. — М.: Наука, 1985.
11. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.
12. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Ч. 1, 2.
13. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1977.
14. Антановский Л.К. Симметризация уравнений фазовых превращений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1990. — Вып. 96.
15. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.

г. Новосибирск *Поступила 16/VII 1993 г., в окончательном варианте — 20/IX 1993 г.*

УДК 532.5

С.М. Шугрин

ДИССИПАТИВНАЯ ДВУХСКОРОСТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

В [1] получены новые уравнения «идеальной» двухскоростной гидродинамики. В данной работе на базе общего принципа Онсагера строится диссипативная система.

1. «Идеальная» двухскоростная гидродинамика. Пусть состояние рассматриваемой системы в точке (t, x^1, x^2, x^3) характеризуется набором $(\rho_{(1)}, v_{(1)}, \rho_{(2)}, v_{(2)}, s)$, где $\rho_{(j)} \geqslant 0$ — плотность j-й компоненты, $\rho_{(1)} + \rho_{(2)} > 0$; $v_{(j)} = (v^k_{(j)})$ — скорость j-й компоненты; s — удельная энтропия. Полагаем

$$\rho \equiv \rho_{(1)} + \rho_{(2)},\ \varkappa \equiv \rho_{(1)}/\rho,\ v \equiv \varkappa v_{(1)} + (1-\varkappa)v_{(2)},\ w \equiv v_{(1)} - v_{(2)}.$$

Теперь можно считать, что состояние системы характеризуется набором $u \equiv (\rho, \varkappa, s, v, w)$. Согласно [1], минимальная двухскоростная система имеет вид

$$L^0(u) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0; \tag{1.1а.}$$

$$L^j(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\rho v^j v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^j w^k + p\delta^{jk}] = 0; \tag{1.1б.}$$

$$L_\varepsilon(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varepsilon + v^2/2)] + \frac{\partial}{\partial x^k}\{\rho v^k[\varepsilon + v^2/2 + p/\rho] + \\ + \rho w^k[\varkappa(1-\varkappa)(v \cdot w) + \varkappa(1-\varkappa)\mu_{(1)0} + T\zeta_{(12)}/\rho + \\ + \varkappa(1-\varkappa)(1-2\varkappa)w^2/2]\} = 0; \tag{1.2}$$

$$l^0_{(1)}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\varkappa\rho) + \frac{\partial}{\partial x^k}[\varkappa\rho v^k + \varkappa(1-\varkappa)\rho w^k] - q_{(1)} = 0; \tag{1.3а}$$