

УДК 532.5:532.517.4

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА

Ю. Н. Григорьев, С. В. Мелешко*, П. Сириват**

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

* Математический колледж Института науки Технологического университета им. Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд

** Институт науки Университета Мэ Фа Луанг, 57100, Чианг Рай, Таиланд
E-mails: grigor@ict.nsc.ru, sergey@math.sut.ac.th, piyanuch.sir@mfu.ac.th

Проведен полный групповой анализ системы одномерных нестационарных уравнений динамики колебательно-возбужденного газа в случае цилиндрической и сферической симметрии. Показано, что допустимая алгебра Ли не содержит оператор растяжения независимых переменных, с которым для аналогичной системы уравнений идеального газа связаны известные автомодельные решения задач с сильными ударными волнами. Предложена модификация характерного времени релаксации, позволившая дополнить допустимую алгебру Ли системы оператором одновременного растяжения независимых переменных и ввести класс автомодельных решений. На примере задачи о сильном линейном взрыве показано, что решение модифицированной системы уравнений является физически непротиворечивым и достаточно точно описывает известный эффект отставания колебательной температуры от статической за фронтом волны.

Ключевые слова: колебательно-возбужденный газ, одномерные нестационарные уравнения, допустимая алгебра Ли, автомодельные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20210302

Введение. Нарушение термодинамического равновесия в молекулярных газах, проявляющееся в возбуждении колебательных мод молекул, широко распространено в многочисленных техногенных процессах (за ударными волнами в сверх- и гиперзвуковых потоках, газодинамических лазерах, в трактах реактивных и ракетных двигателей, при сильных взрывах в атмосфере). Возникающий при этом релаксационный межмодовый энергообмен может оказать существенное влияние на устойчивость, теплообмен и другие характеристики соответствующих течений [1–3]. Для описания этих процессов необходимы математические модели, учитывающие соответствующие явления. В этом случае простейшим обобщением уравнений классической газовой динамики [4] является система уравнений двухтемпературной газовой динамики [1, 3], включающая дополнительное уравнение Ландау — Теллера для колебательной температуры с характерным релаксационным слагаемым. В последнее время эта система регулярно используется при проведении различных прикладных исследований [2, 3, 5]. Поэтому представляет интерес проведение систематического сравнения математических свойств двухтемпературной модели и хорошо изу-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00168а) и Университета Мэ Фа Луанг.

© Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В., Сириват П., 2021

ченной модели идеального газа, в частности групповых свойств и инвариантных решений системы нестационарных одномерных уравнений двухтемпературной газовой динамики, исследованию которых посвящена данная работа.

Основные уравнения. Система нестационарных одномерных уравнений двухтемпературной газовой динамики имеет вид [3, 6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{un}{x} \right) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1)T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{un}{x} \right) + \gamma_v \frac{T - T_v}{\tau} &= 0, \\ \frac{\partial T_v}{\partial t} + u \frac{\partial T_v}{\partial x} &= \frac{T - T_v}{\tau}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ , u , p , T — плотность, скорость, давление и статическая (поступательная) температура газа соответственно; T_v — колебательная температура; $\gamma_v = c_{vv}/c_v$; c_{vv} — теплоемкость колебательной моды; c_v — теплоемкость поступательных и вращательных степеней свободы; $\gamma = c_v + R_0 c_v$ — показатель адиабаты; R_0 — газовая постоянная; τ — характерное время релаксации; t — время; x — координата. Для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии $n = 0, 1, 2$ соответственно. В отличие от работы [1] для удобства дальнейшего исследования энергетические уравнения системы записаны через температуры (см. [3]). При $\gamma_v = 0$ первые три уравнения системы переходят в систему уравнений классической газовой динамики [4].

Целесообразно принять, что температуры измеряются в энергетических единицах:

$$T = R_0 T^0 K, \quad T_v = R_0 T_v^0 K.$$

При этом уравнение состояния, замыкающее систему (1), имеет вид

$$p = \rho T. \quad (2)$$

Для системы (1), (2) вычислены дифференциальные законы сохранения в дивергентной форме, представляющие интерес при построении консервативных разностных схем, особенно при их обобщении на системы большей размерности. Получены соотношения

$$\frac{\partial V^t}{\partial t} + \frac{\partial V^x}{\partial x} = 0,$$

где плотности V^t , V^x зависят от t , x , ρ , u , T , T_v .

Как показали расчеты, для рассматриваемой системы в общем случае симметрии выполняются закон сохранения массы при

$$V_m^t = x^n \rho, \quad V_m^x = x^n \rho u$$

и закон сохранения энергии при

$$V_e^t = x^n \rho \left(\frac{\gamma - 1}{2} u^2 + T + \gamma_v T_v \right), \quad V_e^x = x^n \rho u \left(\frac{\gamma - 1}{2} u^2 + \gamma T + \gamma_v T_v \right).$$

В случае плоской симметрии при $n = 0$ дополнительно имеют место закон сохранения импульса при

$$V_i^t = \rho u, \quad V_i^x = \rho(T + u^2)$$

и закон сохранения движения центра масс [7] при

$$V_c^t = \rho(tu - x), \quad V_c^x = \rho(t(T + u^2) - ux).$$

Кроме того, для системы (1), (2) стандартным образом получаются интегральные законы сохранения (см. [4]) массы

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^x \rho x^n dx + (\rho u x^n)|_{x_0}^x = 0, \quad (3)$$

импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^x \rho u x^n dx + (\rho u^2 + p)x^n|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x p n x^{n-1} dx, \quad (4)$$

энергии

$$\frac{\partial E(t, x)}{\partial t} + \left\{ \rho u \left[(\gamma - 1) \frac{u^2}{2} + \gamma T + \gamma_v T_v \right] x^n \right\} |_{x_0}^x = 0, \quad (5)$$

где

$$E(t, x) = \int_{x_0}^x \left[(\gamma - 1) \rho \frac{u^2}{2} + \rho (T + \gamma_v T_v) \right] x^n dx - \quad (6)$$

интеграл энергии.

Уравнения (3), (4) совпадают с соответствующими уравнениями для идеального газа [4].

Запишем соотношения Рэнкина — Гюгонио на разрыве (фронте ударной волны)

$$\begin{aligned} \rho_2 v_2 &= \rho_1 v_1, & p_2 + \rho_2 v_2^2 &= p_1 + \rho_1 v_1^2, \\ \gamma T_2 + \gamma_v T_{v2} + \frac{\gamma - 1}{2} v_2^2 &= \gamma T_1 + \gamma_v T_{v1} + \frac{\gamma - 1}{2} v_1^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь u — скорость газа; $v = u_n - D_n$ — проекция относительной скорости на нормаль к фронту; D — скорость фронта; индекс 1 соответствует состоянию перед фронтом волны, индекс 2 — состоянию за фронтом. Поскольку скорость релаксационного процесса конечна, можно принять $T_{v2} = T_{v1}$.

Симметричные свойства. В работе [8] выполнен групповой анализ системы (1), (2) для случая плоской симметрии: вычислена допустимая системой группа (алгебра) Ли, построена оптимальная система ее одномерных подалгебр, найдены и проанализированы все различные классы ее инвариантных решений. Можно констатировать, что в случае плоской симметрии допустимые алгебры систем уравнений идеального газа и уравнений колебательно-возбужденного газа различаются только тем, что в системе (1), (2) отсутствует оператор одновременного растяжения переменных времени и координаты. Кроме того, общий для обеих систем оператор, связанный с политропным уравнением состояния (уравнением энергии), в рассматриваемом случае дополняется оператором растяжения по переменной T_v .

При $n \neq 0$ допустимая алгебра Ли определяется базисными операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = 2T_v \partial_{T_v} + 2T \partial_T + u \partial_u + x \partial_x, \quad X_3 = \rho \partial_\rho. \quad (8)$$

В этой алгебре Ли также отсутствует оператор подобного преобразования в плоскости независимых переменных (x, t) , определяющий класс автомодельных решений [4].

Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры (8) состоит из подалгебр

$$\{X_1 + \beta X_3\}, \quad \{X_2 + \alpha X_1 + \beta X_3\}, \quad \{X_3\},$$

для каждой из которых вычислены инварианты, найдены представления инвариантных решений, выведены и проанализированы соответствующие фактор-системы. В качестве примера приведем результаты вычислений для подалгебры $\{X_2 + \alpha X_1 + \beta X_3\}|_{\alpha \neq 0}$ при $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Данная подалгебра имеет следующие инварианты:

$$x e^{-t\alpha}, \quad u e^{-t\alpha}, \quad \rho e^{-\beta t\alpha}, \quad T e^{-2t\alpha}, \quad T_v e^{-2t\alpha}.$$

Соответственно представление решений системы (1) выражается в следующем виде:

$$\rho = e^{\beta t\alpha} R(z), \quad u = e^{t\alpha} U(z), \quad T = e^{2t\alpha} \tilde{T}(z), \quad T_v = e^{2t\alpha} \tilde{T}_v(z), \quad z = x e^{-t\alpha}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнения (1), получаем фактор-систему, которая при условии $U = \alpha z$ имеет нефизическое решение с $T < 0$. В другом частном случае, когда $(\alpha z - U)^2 = \gamma T$, фактор-система интегрируется в квадратурах. Имеем

$$R = \frac{R_1}{z^{2+(k^2\gamma)/(k^2-2k\alpha-\alpha^2)}}, \quad U = kz, \quad T = \frac{(k-\alpha)^2}{\gamma} z^2, \quad T_v = \frac{kz(1-2\alpha z) + \alpha^2 z^2}{\gamma(2k+1)},$$

где

$$\beta = \frac{k^2(-\gamma + n - 1) + k\alpha(-n + 3) - 2\alpha^2}{-k\alpha + \alpha^2}, \quad k = -\frac{\gamma(n+1) - n + 1 + \gamma_v}{2(\lambda(n+1) - n + 1)},$$

R_1 — постоянная.

В общем случае фактор-система приводится к нормальной форме, которая исследовалась численно.

Анализ полученных инвариантных решений показал, что ни одно из них не имеет физической интерпретации, однако они могут быть использованы, например, для тестирования численных методов.

Приближенные автомодельные решения. Можно констатировать, что для системы (1) отсутствуют обобщения автомодельных решений известных в газовой динамике задач, например, о вдвигаемом в газ поршне или о сильном точечном взрыве [4, 9], представляющих интерес для определенных приложений. Это обусловлено тем, что среди операторов допустимой алгебры (8) отсутствует оператор растяжения независимых переменных вида

$$X = t \partial_t + x \partial_x. \quad (10)$$

Однако модель релаксационной газодинамики (1) в подобных задачах с сильными ударными волнами более точно описывает реальные газы, чем система уравнений идеальной газовой динамики, так как в таких волнах возбуждаются колебательные степени свободы. Происходящий за волной релаксационный процесс может оказать значительное влияние на параметры и структуру течения [2, 3, 5].

Отсутствие преобразования растяжения (10) объясняется наличием в системе релаксационных членов, содержащих характерное время релаксации τ , которое при получении алгебры (8) полагалось постоянным. Одна из возможных модификаций модели состоит в следующем.

Как известно, характерное время релаксации зависит от времени опосредованно, через давление и температуру [1]:

$$\tau(t) \sim \frac{1}{p(t)} \exp(T^{-1/3}(t)). \quad (11)$$

В релаксационной зоне за сильными ударными волнами, например в задаче о сильном взрыве [4, 9], имеет место резкое падение давления и одновременно рост статической температуры. Предварительные оценки показали, что преобладает влияние давления, поэтому

время релаксации будет возрастать по мере удаления от фронта волны. В случае больших пространственно-временных градиентов давления и температуры можно предположить, что отклик системы должен быть непосредственно связан со временем. Соответствующую зависимость можно приближенно описать формулой $\tau(t) = \tau_0 + \varepsilon t$, где $\varepsilon > 0$ — подгоночный параметр. Так как допустимая алгебра (8) содержит оператор сдвига по времени X_1 , то при выполнении преобразования времени $\bar{t} = t + \tau_0/\varepsilon$ система остается инвариантной. При этом $\bar{\tau}(t) = \varepsilon \bar{t}$. Предлагаемая замена не приводит к сингулярности при $\bar{t} = 0$, так как можно считать, что в начальный момент газ находится в термодинамическом равновесии и $T = T(v)$. Сохраняя прежнее обозначение переменной времени, можно показать, что такая модификация приводит к преобразованию допустимой алгебры Ли (8) к виду

$$X_1 = t \partial_t + x \partial_x, \quad X_2 = x \partial_x + u \partial_u + 2T \partial_T + 2T_v \partial_{T_v}, \quad X_3 = \rho \partial_\rho. \quad (12)$$

В отличие от алгебры (8), в которой содержится оператор сдвига по времени X_1 , в алгебре (12) имеет место оператор растяжения (10). Это позволяет ввести независимую автомодельную переменную

$$\lambda = xt^{-\alpha}$$

и представление решений в форме [4]

$$u = \frac{x}{t} U(\lambda), \quad \rho = t^\beta R(\lambda), \quad T = \frac{x^2}{t^2} P(\lambda), \quad T_v = \frac{x^2}{t^2} Q(\lambda). \quad (13)$$

Подставляя (13) в систему (1), получаем фактор-систему вида

$$\begin{aligned} \lambda R'(U - \alpha) + \lambda U' R + R(\beta + (n + 1)U) &= 0, \\ \lambda U'(U - \alpha) + \lambda R' \frac{P}{R} + \lambda P' + 2P + U^2 - U &= 0, \\ \lambda P'(U - \alpha) + (\gamma - 1)\lambda U' P + P((\gamma - 1)nU + (\gamma + 1)U - 2) + \frac{\gamma v}{\varepsilon} (P - Q) &= 0, \\ \lambda Q'(U - \alpha) + 2Q(U - 1) - \frac{1}{\varepsilon} (P - Q) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно уравнение состояния в автомодельных переменных имеет вид

$$\Pi(\lambda) = R(\lambda)P(\lambda).$$

Подставляя (13) в интегральные законы сохранения (3)–(5), получаем соответствующие выражения в автомодельных переменных

$$\begin{aligned} [\alpha(n + 1) + \beta] \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^n R(\lambda) d\lambda + [\lambda^{n+1} R(\lambda)(U - \alpha)] \Big|_{\lambda_0}^{\lambda} &= 0, \\ [\beta + \alpha(n + 2) - 1] \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{n+1} R(\lambda) U(\lambda) d\lambda + [\lambda^{n+2} ((\gamma - 1)RP + RU(U - \alpha))] \Big|_{\lambda_0}^{\lambda} &= \\ &= n(\gamma - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{n+1} R(\lambda) P(\lambda) d\lambda, \quad (15) \\ [\beta + \alpha(n + 3) - 2] \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{n+2} R \left[(\gamma - 1) \frac{U^2}{2} + P + \gamma v Q \right] d\lambda + \\ &+ \left[\lambda^{n+3} \left((U - \alpha) R \left((\gamma - 1) \frac{U^2}{2} + P + \gamma v Q \right) + (\gamma - 1) UR P \right) \right] \Big|_{\lambda_0}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Если стоящие перед интегралами выражения в квадратных скобках обращаются в нуль при каких-либо значениях α , β , n , то соответствующий закон сохранения является первым интегралом автомодельной системы (14). В частности, из закона сохранения энергии (15) при

$$\beta + \alpha(n + 3) - 2 = 0$$

следует интеграл энергии

$$I_e = \lambda^{n+3} \left\{ (U - \alpha) R \left((\gamma - 1) \frac{U^2}{2} + P + \gamma_v Q \right) + (\gamma - 1) U R P \right\}. \quad (16)$$

Если $\lambda_0 = 0$, то (16) представляет собой частный алгебраический интеграл системы (14) вида

$$(U - \alpha) \left((\gamma - 1) \frac{U^2}{2} + P + \gamma_v Q \right) + (\gamma - 1) U P = 0. \quad (17)$$

Соотношения на разрыве в автомодельных переменных записываются следующим образом:

$$[R(U - \alpha)] = 0, \quad [PR + R(U - \alpha)^2] = 0, \quad [\gamma P + \gamma_v Q + (\gamma - 1)(U - \alpha)^2/2] = 0. \quad (18)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок соответствующей величины. Считается [4], что фронт волны есть линия уровня для решения системы (14), где автомодельная скорость фронта определяется по формуле

$$D_f(\lambda) = \alpha.$$

С использованием приведенных выше уравнений и соотношений в автомодельных переменных можно рассмотреть при $n = 1$ задачу о сильном взрыве линейного заряда [4] (“взрывающейся” проволочке). Предполагается, что в момент $t = 0$ на оси симметрии $x = 0$ мгновенно выделяется большое количество энергии, создается высокое давление и по покоящемуся газу распространяется сильная ударная волна, закон движения которой и параметры течения за которой требуется найти. В этом случае показатель автомодельности $\beta = 0$ [4]. Так как выделившаяся при взрыве энергия сохраняется во времени, то интеграл

$$E(t, \lambda_f) = t^{[\alpha(n+3)-2]} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{n+2} R \left((\gamma - 1) \frac{U^2}{2} + P + \gamma_v Q \right) d\lambda$$

должен быть конечным. Из этого соотношения определяется показатель $\alpha = 1/2$. Для случая сильного взрыва в качестве условий перед волной принимаются равенства

$$u_1 = T_1 = T_{v1} = 0.$$

Кроме того, $\rho_1 = R_1$, $T_{v2} = T_{v1} = 0$. Соотношения на разрыве (18) упрощаются и совпадают с соответствующими соотношениями в случае идеального газа

$$R_2 \left(U_2 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \rho_1, \quad P_2 + \left(U_2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \gamma P_2 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(U_2 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\gamma - 1}{8}.$$

Разрешая эти соотношения относительно газодинамических величин за фронтом, получаем

$$U_f = \frac{1}{\gamma + 1}, \quad R_f = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1, \quad P_f = \frac{\gamma - 1}{2(\gamma + 1)^2}, \quad Q_f = 0; \quad (19)$$

$$\Pi_f = \frac{1}{2(\gamma + 1)} \rho_1, \quad (20)$$

где Π_f — автомодельная переменная давления.

Численные расчеты. В отличие от случая идеального газа в рассматриваемом случае система (14) может быть решена только численно. Для этого она приводилась к нормальной форме

$$\varepsilon\lambda R' = \frac{R_n}{R_d}, \quad \varepsilon\lambda U' = \frac{U_n}{U_d}, \quad \varepsilon\lambda P' = \frac{P_n}{P_d}, \quad \varepsilon\lambda Q' = \frac{Q_n}{Q_d}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} R_n &= R(\varepsilon[\alpha^2\beta + \alpha^2U(n+1) - 2\alpha\beta U + \alpha(2P - (2n+1)U^2 - U) + \\ &\quad + \beta((1-\gamma)P + U^2) + nU^3 - 2P + U^2] + \gamma_v(P - Q)), \\ R_d &= (\alpha^2 - 2\alpha U - \gamma P + U^2)(\alpha - U), \\ U_n &= \varepsilon(\alpha(2P + U^2 - U) + \beta P + \gamma(n+1)PU - 2P - U^3 + U^2) + \gamma_v(P - Q), \\ U_d &= (U - \alpha)^2 - \gamma P, \\ P_n &= \varepsilon(\alpha^2 P(\gamma(n+1)U + (1-n)U - 2) + \alpha P(2(\gamma-1)(P - nU^2) - (2\gamma n + \gamma + 3)U^2) + \\ &\quad + \beta P^2(\gamma-1) + P(n(\gamma-1)U^3 + 2U^3 - 2\gamma PU + 2P + (\gamma-3)U^2) - \alpha(\gamma-5)U) + \\ &\quad + \gamma_v((U - \alpha)^2 - P)(P - Q), \\ P_d &= ((U - \alpha)^2 - \gamma P)(\alpha - U), \\ Q_n &= 2\varepsilon Q(U - 1) - P + Q, \quad Q_d = \alpha - U. \end{aligned}$$

После этого из (21) была получена задача Коши для системы вида

$$\frac{dR}{dU} = \frac{R_n U_d}{R_d U_n}, \quad \frac{dP}{dU} = \frac{P_n U_d}{P_d U_n}, \quad \frac{dQ}{dU} = \frac{Q_n U_d}{Q_d U_n}, \quad (22)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dU} = \varepsilon \frac{U_d}{U_n} \quad (23)$$

с начальными данными (19), которая решалась численно. В расчетах принимались следующие значения параметров: $\gamma = 1,4$, $\gamma_v = 0,3$, $\varepsilon = 3$.

Для интегрирования использовалась схема Рунге — Кутты шестого порядка с переменным шагом h_c . Как известно, в задаче о точечном взрыве аналогичная автомодельная система в идеальном газе имеет особую точку $U_s = 2/(5\gamma)$, определяемую аналитически [4]. Система (22), (23) также имеет особую точку \bar{U}_s , к которой необходимо приблизиться в процессе интегрирования на интервале $(\bar{U}_s, U_f]$. В окрестности особой точки шаг интегрирования измельчался в соответствии с алгоритмом, приведенным в [10]. Предполагалось, что при $h_c \leq 10^{-16}$ можно максимально приблизиться к точке \bar{U}_s .

Из структуры уравнений (22), (23) следует, что их правая часть не зависит от λ . Так как в уравнении (23) $U_d \neq 0$, то

$$U = U(\lambda/\lambda_f)$$

и поэтому

$$R = R(\lambda/\lambda_f), \quad P = P(\lambda/\lambda_f), \quad Q = Q(\lambda/\lambda_f).$$

При этом из левой части уравнения (23) следует, что в окрестности особой точки \bar{U}_s , где $du/d\lambda \rightarrow \infty$, должно выполняться условие $\lambda \rightarrow 0$. Таким образом, процесс интегрирования заканчивается в центре $\lambda = 0$ в малой окрестности точки \bar{U}_s . Для дополнительного контроля точности вычислений проверялось сохранение алгебраического интеграла (16) для системы (22), (23) и интеграла Седова при проведении расчетов в случае идеального газа.

Одним из критериев прекращения расчета является отклонение интегралов от исходных нулевых значений в окрестности особой точки.

Для представления результатов расчетов использовались получаемые из (19), (20) параметры газа за фронтом в исходных переменных:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_f} = \frac{5(\gamma + 1)}{4} \bar{x}U(\bar{x}), \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_f} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \bar{R}(\bar{x}),$$

$$\bar{T} = \frac{T}{T_f} = \frac{25(\gamma + 1)^2}{8(\gamma - 1)} \bar{x}^2 P(\bar{x}), \quad \bar{T}_v = \frac{T_v}{T_f} = \frac{25(\gamma + 1)^2}{8(\gamma - 1)} \bar{x}^2 Q(\bar{x}),$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_f} = \frac{25(\gamma + 1)}{8} \bar{x}^2 \bar{\Pi}(\bar{x}), \quad \bar{x} = \frac{x}{x_f} = \frac{\lambda}{\lambda_f},$$

$$\bar{R} = \rho_1 R, \quad \bar{\Pi} = \rho_1 \Pi.$$

На рис. 1 представлены профили скорости \bar{u} и плотности $\bar{\rho}$ для идеального и колебательно-возбужденного газов. Можно констатировать, что в рассматриваемом течении, как и в других течениях, исследованных в [1, 3], возбуждение колебательной моды оказывает несущественное влияние на эти параметры. Положение конечных точек кривых свидетельствует о том, что в случае идеального газа особая точка находится на большем расстоянии от фронта волны, чем в случае возбужденного газа. Алгебраический интеграл Седова и алгебраический интеграл (16) на всем интервале интегрирования в пределах погрешности вычислений не отклоняются от исходных нулевых значений.

Зависимости $\bar{T}(\bar{x})$, $\bar{T}_v(\bar{x})$, приведенные на рис. 2, показывают, что предложенная модификация (11) времени релаксации позволяет достаточно точно описать эффект отставания колебательной температуры от статической (поступательной), которое сокращается по мере удаления от фронта волны.

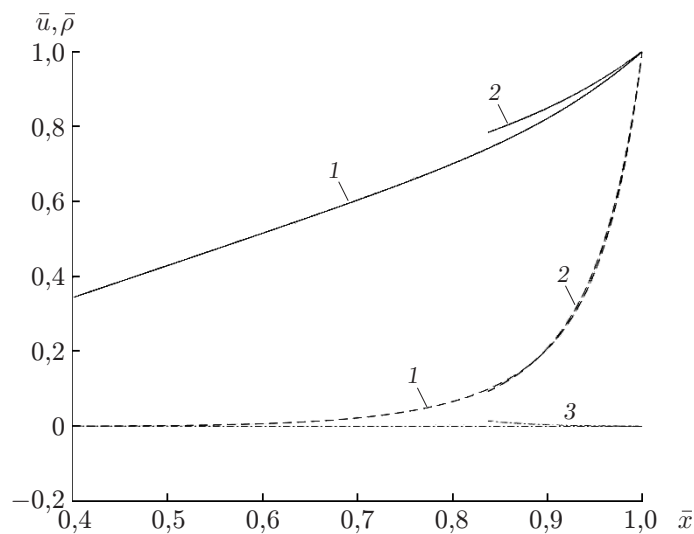


Рис. 1. Зависимости скорости \bar{u} (сплошные кривые) и плотности $\bar{\rho}$ (штриховые кривые) от координаты \bar{x} :

1 — идеальный газ, 2 — колебательно-возбужденный газ, 3 — значения алгебраических интегралов

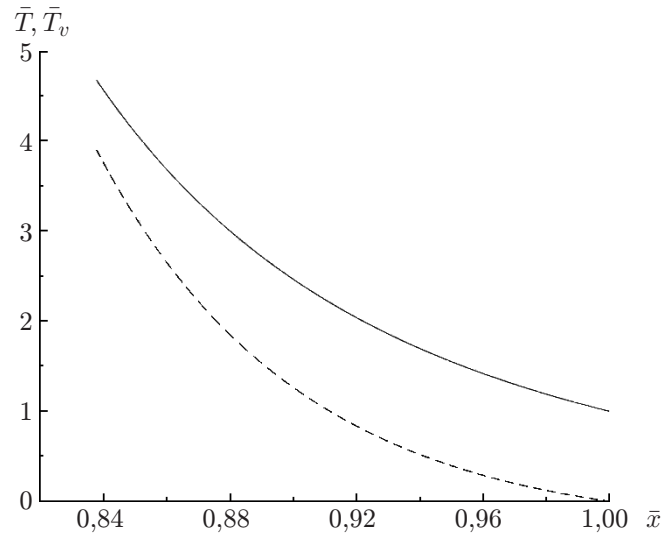


Рис. 2. Зависимости статической температуры \bar{T} (сплошная кривая) и колебательной температуры \bar{T}_v (штриховая кривая) от координаты \bar{x}

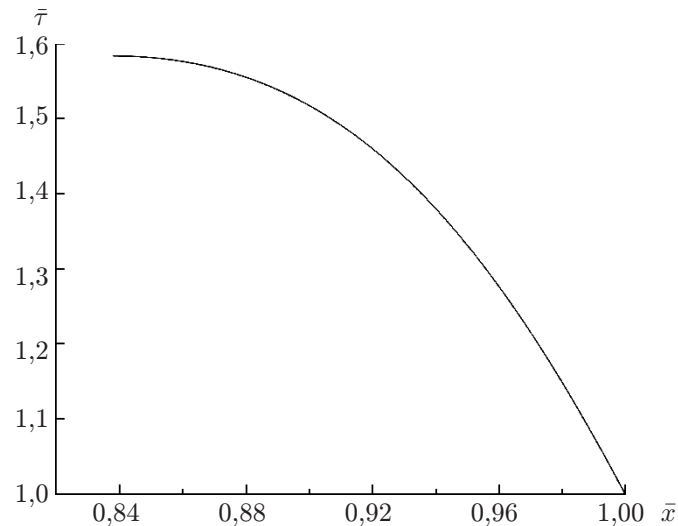


Рис. 3. Зависимость относительного времени релаксации $\bar{\tau}$ от координаты \bar{x}

На рис. 3 представлена зависимость относительного времени релаксации от безразмерной координаты \bar{x} в зоне за ударной волной:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\bar{p}} \exp(\bar{T}^{-1/3}).$$

Характер этой зависимости подтверждает справедливость принятой в предлагаемой модели линейной зависимости характерного времени релаксации от времени.

Заключение. Для системы одномерных нестационарных уравнений двухтемпературной газовой динамики колебательно-возбужденного газа в случае цилиндрической и сферической симметрии вычислены полная допустимая алгебра (группа) Ли, ее оптимальная система подалгебр и найдены все различные классы инвариантных решений. Показано, что в отличие от аналогичной системы для идеального газа допустимая алгебра Ли не содержит оператор растяжения независимых переменных, с которым связаны известные автомодельные решения задач с сильными ударными волнами. Для получения

представляющих интерес с физической точки зрения обобщений этих решений на случай колебательно-возбужденного газа предложена модификация уравнения Ландау — Теллера для колебательной температуры газа. Это позволило включить в допустимую алгебру Ли необходимый оператор и получить для модифицированной системы фактор-систему в авто-модельных переменных. В качестве примера на ее основе решена задача о сильном взрыве линейного заряда, для которой получен известный эффект отставания роста колебательной температуры от статической за фронтом ударной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нагнибеда Е. А.** Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов / Е. А. Нагнибеда, Е. В. Кустова. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003.
2. **Candler R. M., Leyva I. A., Jewell J. S., Hornung H. G.** Carbon dioxide injection for hypervelocity boundary layer stability. S. l., 2010. (Paper / AIAA; N 2010-1244).
3. **Григорьев Ю. Н.** Устойчивость течений релаксирующих газов / Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012.
4. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
5. **Мукин Р. В., Осипов А. И., Уваров А. В.** Устойчивость неоднородного потока колебательно-возбужденного газа в волноводе // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 144–150.
6. **Зельдович Я. Б.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. М.: Наука, 1966.
7. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
8. **Siriwat P., Grigoryev Y. N., Meleshko S. V.** Invariant solutions of one dimensional equations of two-temperature relaxation gas dynamics // Math. Methods Appl. Sci. 2020. V. 43. P. 2444–2457.
9. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
10. **Бахвалов Н. С.** Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2008.

*Поступила в редакцию 3/IX 2020 г.,
после доработки — 23/IX 2020 г.
Принята к публикации 28/IX 2020 г.*
