УДК 532.529.6

СТАЦИОНАРНОЕ ВСПЛЫТИЕ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЯ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ЖИДКОСТИ

П. К. Волков, Е. А. Чиннов

(Новосибирск)

Изучение движения одиночных газовых пузырей продолжается в течение длительного времени. Получены важные теоретические решения, и накоплено значительное количество экспериментальных результатов. В последние годы широкое распространение получили численные методы решения уравнений Навье — Стокса с неизвестной границей в применении к исследованию движения пузырей [1, 2].

В настоящей работе на основании найденных авторами численных решений полных уравнений Навье — Стокса и результатов эксперимента проанализировано одновременное влияние вязкости жидкости и сил поверхностного натяжения на скорость всплытия и форму одиночных пузырей, определены границы нарушения сферичности газовых полостей и образования вихрей в их кормовой части.

Рассматривается стационарное всплытие осесимметричного пузыря с границей Г, постоянным объемом и давлением внутри него. Введем систему декартовых координат x_1, x_2, x_3, связанную с центром пузыря. Ось x_3 направлена по скорости подъема газовой полости $\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Г, τ — единичный вектор касательной к Г. Движение вязкой жидкости вне замкнутой поверхности Г описывается системой уравнений

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p/\rho = \nu\Delta\mathbf{v},\ \nabla\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

где p — модифицированная функция давления: $p = q + \rho g x_3 - p_0$; q — давление в жидкости; p_0 — давление на уровне $x_3 = 0$; g — ускорение силы тяжести; ρ — плотность жидкости; ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

На свободной границе Г выполняются условия:
непротекания

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0; \tag{2}$$

равенства нулю касательных напряжений в жидкости

$$\boldsymbol{\tau}\cdot T\cdot\mathbf{n} = 0; \tag{3}$$

равенства разности нормальных напряжений на поверхности пузыря капиллярному давлению σK

$$p - 2\rho\nu(\mathbf{n}\cdot T\cdot\mathbf{n}) + \sigma K = p_\text{г} - p_0 + g\rho x_3. \tag{4}$$

Здесь $T_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ — тензор скоростей деформации; $p_\text{г}$ — давление газа в пузыре; K — кривизна поверхности Г; σ — коэффициент поверхностного натяжения.
На бесконечности

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u}. \tag{5}$$

Задача (1)—(5) решается численно в переменных вихрь ω — функция тока ψ итерационным методом по схеме стабилизирующей поправки. Алгоритм ее решения подробно рассматривается в [1, 2]. В задаче (1)—(5) содержатся существенные для рассматриваемого процесса параметры: ρ, ν, σ, g, R, $p_\text{г} - p_0$, u (R — радиус сферы, эквивалентной по объему пузырю).

Следует отметить, что решение зависит лишь от разности давлений $p_\text{г} - p_0$. Очевидно также, что нельзя произвольно задавать R и $p_\text{г} - p_0$ в данной жидкости, поскольку из (4) при $u = 0$ и $g = 0$ имеем сферический пузырь и

$$2\sigma/R = p_\text{г} - p_0 \tag{6}$$

для любых ρ и ν. Из семи величин пять независимы, и, согласно теории размерностей, имеется два независимых безразмерных параметра. Так как выбор определяющих переменных в известной степени произволен, то при рассмотрении движения одиночных пузырей используются разные безразмерные критерии. Использование масштаба длины $L = \sigma/(p_г - p_0)$ (аналогично [1]) на первый взгляд избавляет нас от трудностей, связанных с тем, что в (1) входит градиент давления p. Однако при численном решении, поскольку в (4) входит функция p, которая вычисляется при интегрировании (1), приходим к необходимости ее однозначного определения. Это можно сделать следующим образом. Из (6) с учетом выбора L вытекает $R = 2L$ (что соответствует решению (4) при We = 0, We = $= \rho L u^2/\sigma$). Находим функцию тока, вихрь и восстанавливаем p из (1). Так как жидкость и пузырь находятся в равновесии, то интеграл от p по поверхности пузыря должен быть равен нулю. Это условие позволяет найти p_0, а значит, функцию давления.

В [2] в качестве определяющих критериев используются Re* (Re* = $= uL/\nu$) и We, в [3] — Re $= 2uR/\nu$, $E = 4\rho g R^2/\sigma$, а в [4] предложено применять критерии $\mathrm{M} = \rho^3\nu^4 g/\sigma^3$, R/R_0 ($R_0 = [\sigma\nu^2/(\rho g^2)]^{1/5}$).

Выбор критериев для анализа движения пузырей зависит прежде всего от того, насколько удобно их применение для получения практически важной информации о процессе и насколько они позволяют сделать его описание более простым.

На практике, как правило, известны расходные характеристики процесса, в данном случае объем пузыря или его эквивалентный радиус R. Как оказалось [5—7], для описания движения газожидкостных систем удобно использовать характерные масштабы: $\delta_\nu = (\nu^2/g)^{1/3}$ — постоянную вязкогравитационного взаимодействия и $\delta_\sigma = [\sigma/(\rho g)]^{0,5}$ — капиллярную постоянную. Если соотносить их с характерным размером задачи, можно получить информацию о том, насколько развито в данном процессе взаимодействие того или иного типа. Таким образом, имеем два определяющих критерия: $R_\nu = \frac{R}{\delta_\nu} = \left[\frac{(\rho u^2)(g\rho R)}{(\nu\rho u/R)^2}\right]^{1/3} = (\mathrm{Re}/2\mathrm{Ps})^{1/3}$ показывает относительное влияние сил инерции жидкости, молекулярного трения, выталкивания и является своеобразным аналогом числа Рейнольдса для процессов, движение которых обусловлено силой Архимеда (Ps $= \nu u/gR^2$); $R_\sigma = \frac{R}{\delta_\sigma} = \left[\frac{\rho g R}{\sigma/R}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{E}$ характеризует относительное влияние подъемной силы и сил поверхностного натяжения. Важными свойствами этих критериев является то, что они не содержат скорости пузырей и что их отношение представляет комплекс, состоящий только из физических характеристик среды:

$$R_\sigma/R_\nu = \delta_\nu/\delta_\sigma = (\rho^3\nu^4 g/\sigma^3)^{1/6} = \mathrm{M}^{1/6}.$$

Указанные свойства существенно облегчают описание процесса. Так, на диаграмме с координатами R_ν и R_σ линии постоянного значения М будут прямыми, а не кривыми, как на диаграмме из [3]. Скорость всплытия пузыря содержится только в определяемом критерии (Fr $= u^2/gR$), что позволяет получить информацию о ней непосредственно из диаграмм. В зависимости от размера и физических характеристик среды пузырь, всплывающий в жидкости, может принимать различную форму.

На рис. 1 представлены данные по всплытию одиночных пузырей на диаграмме с координатами R_ν и R_σ. Здесь рассмотрены изменение формы пузырей и образование вихрей за ними в наиболее сложных и наименее изученных переходных областях, где существенно влияние всех определяющих параметров. На диаграмме не указаны области пузырей с пленкой газа в виде «юбочки» и открытым следом [8]. Цифрой *I* обозначена область, в которой всплывающий пузырь имеет сферическую форму. Основной характеристикой, задающей границу этой области, является степень деформации пузыря $e = (a - b)/a$ (a — горизонтальный, а b —

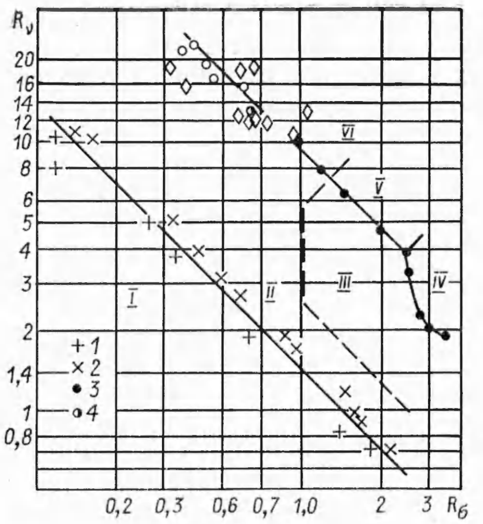

Рис. 1

его вертикальный размер). На диаграмме приведены данные численного решения задачи (1)—(5) и экспериментов (точки *1*), которые указывают на деформацию пузырей в 0,5 % ($e = 0{,}005$). Нарушением сферичности будем считать степень деформации пузырей свыше 1 %. На диаграмме показаны численные и опытные результаты, отвечающие значению e в 2—3 % (точки *2*). Сплошная линия, отделяющая область *I*, определяется выражением $R_\nu R_\sigma = 1{,}4$.

Деформированные пузыри могут принимать различный вид. Форма пузырей, всплывающих в воде и других маловязких жидкостях, близка к эллипсоиду вращения [9, 10]. В более вязких средах форма пузырей напоминает сплющенный осесимметричный эллипсоид (рис. 2, *а*, $R_\nu = 1{,}14$, $R_\sigma = 1{,}67$). При $R_\sigma \geqslant 1$, $\mathrm{M} \geqslant 3 \cdot 10^{-5}$, $R_\nu R_\sigma \geqslant 2{,}5$ (область *III*, рис. 1) происходит нарушение симметрии всплывающего пузыря относительно горизонтальной оси. Штриховая линия, построенная па основании полученных данных, указывает на нарушение симметрии пузыря в 3 %. Характерный вид формы пузыря, удовлетворяющего указанным условиям, приведен на рис. 2, *б* ($R_\nu = 1{,}5$, $R_\sigma = 2{,}15$). Область *III* переходная к области *IV* сплющенных эллипсоидальных пузырей, которая подробно рассмотрена в [8]. В области *III* влияние сил поверхностного натяжения начинает ослабевать ($R_\sigma \geqslant 1$), но механизм всплытия пузырей с определяющим влиянием сил вязкости [8] еще не в полной мере сформирован.

На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи (1)—(5) (точки *3*), в которых зарегистрировано возникновение вихря в кормовой части пузыря. Некоторые из них изображены на рис. 3. При $R_\sigma = 3{,}0$, $R_\nu = 2{,}1$ (рис. 3, *а*) вихрь образуется в нижней части уже сущест-

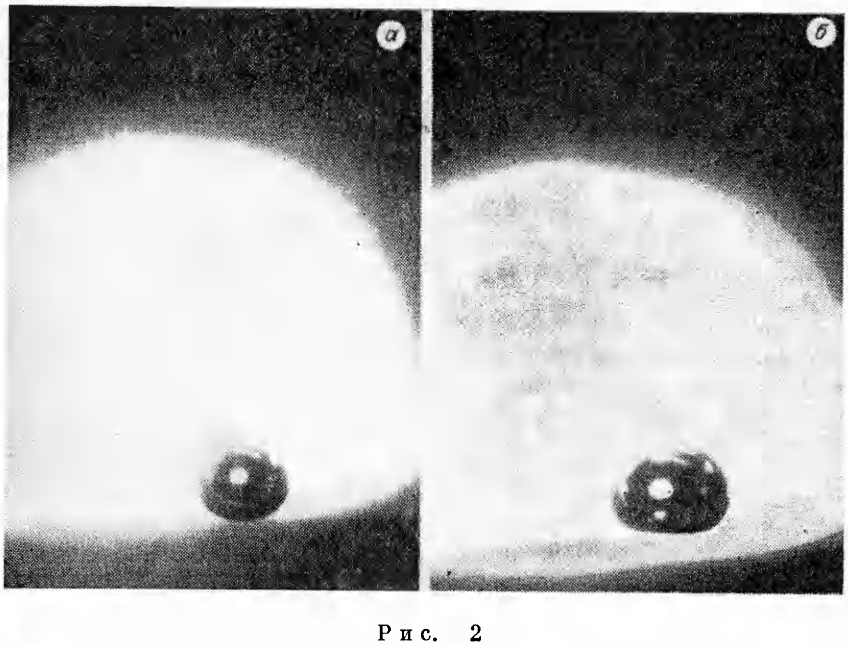

Рис. 2

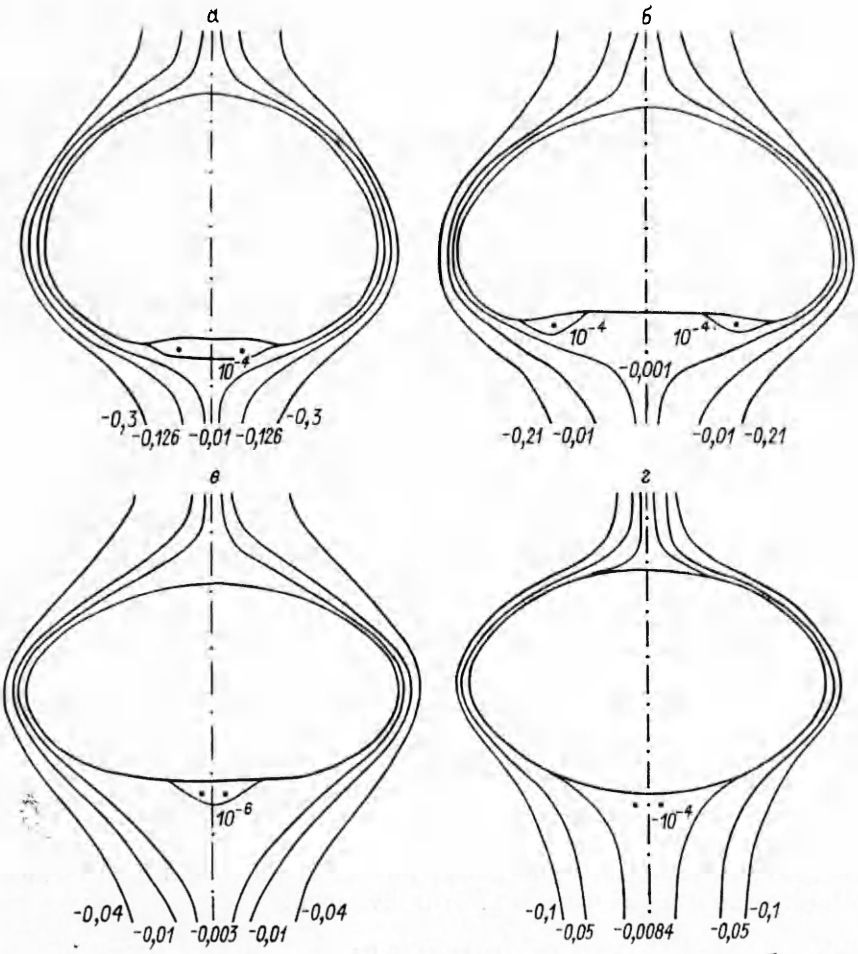

Рис. 3

венно несимметричного относительно горизонтальной оси пузыря. В этом случае форма пузыря ближе к сфере, чем к сплющенному эллипсоиду. Кривая, соответствующая началу вихреобразования при $R_\sigma \geqslant 2{,}5$, как бы повторяет штриховую линию, указывающую на возникновение нарушения симметрии пузыря. Это обстоятельство показывает, что в данном случае начало вихреобразования за пузырем значительно зависит от степени его асимметричности.

При $R_\sigma < 2{,}5$ данные численного решения, в которых за пузырем возникает вихрь, отвечают на рис. 1 сплошной линии $R_\nu R_\sigma = 9$. Как видно из рис. 3, *б* — *г* ($R_\nu = 3{,}9$; 6,3; 13,3 и $R_\sigma = 2{,}4$; 1,4; 0,64 соответственно), пузыри здесь более сплющены. Причем при $\mathrm{M} < 3 \cdot 10^{-5}$ форма пузырей симметрична относительно горизонтальной оси (*г*).

Если на рис. 3, *а* и *в* представлены расчетные формы пузырей с вихрем, образующимся в их нижней части около вертикальной оси симметрии, то из рис. 3, *б*, отвечающего точке излома сплошной кривой, видно, что вихрь образуется ближе к краям пузыря. Таким образом, качественно можно выделить три типа вихреобразования за пузырем и соответствующие им области *IV*—*VI*. В областях *IV* и *V* движение пузырей прямолинейно, а их форма несимметрична относительно горизонтальной оси. На границе области *VI* форма пузыря симметрична. На рис. 3, *г* показан результат численного расчета обтекания пузыря перед возникновением вихря в его корме (на рис. 1 точка *4*). При расчете такого пузыря количество итераций резко возрастало по сравнению с расчетом пузырей с меньшими значениями R_ν и R_σ. Далее этой точки продвинуться вообще

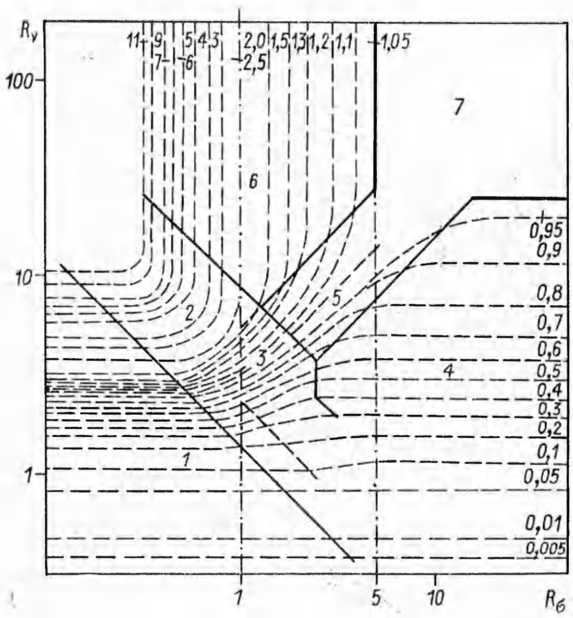

Рис. 4

не удалось, так как при дальнейшем увеличении R_σ при расчете не происходило установления стационарного режима. Этот эффект, по-видимому, связан с тем, что образование вихря в корме пузыря приводит к его отторжению и потере устойчивости прямолинейного движения. На рис. 1 представлены опытные данные из [11], указывающие на начало непрямолинейного движения пузырей (точки *5*), а также собственные опытные результаты (точки *6*), соответствующие их движению по спирали.

Одновременное влияние критериев R_ν и R_σ на безразмерную скорость пузыря (число Фруда) показано на рис. 4, где наряду с собственными данными использованы результаты [12—15]. Обозначение режимов всплытия пузырей отвечает рис. 1, штриховые кривые — постоянные значения Fr. В предельных случаях автомодельности но одному или двум определяющим параметрам (области *I*, *IV*, *VI*, *VII*) закономерность всплытия пузырей описывается известными зависимостями. В переходных областях *II*, *III*, *V*, используя диаграмму рис. 4, можно оценить значения Fr, а следовательно, и скорость всплытия пузырей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Волков П. К.** Численное решение задачи обтекания газового пузыря вязкой жидкостью // ЧММСС.— 1982.— Т. 13, № 1.
2. **Christov C. I., Volkov P. K.** Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 158.— P. 341.
3. **Grace I. R.** Shape and velocities of bubbles rising in infinite liquids // Trans. Inst. Chem. Engrs.— 1973.— V. 51.— P. 116.
4. **Воинов О. В., Петров А. Г.** Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.— 1976.— Т. 10.— С. 86.
5. **Кутателадзе С. С.** Анализ подобия в теплофизике.— Новосибирск: Наука, 1982.
6. **Кутателадзе С. С., Маленков И. Г., Чиннов Е. А.** Результаты экспериментального изучения влияния стенок вертикального канала на скорость всплытия одиночных пузырьков разного размера // Дисперсные системы в энергохимических процессах.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1982.
7. **Чиннов Е. А.** Анализ всплытия одиночных пузырей в неограниченном объеме жидкости // Современные проблемы теплофизики.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1984.
8. **Bhaga D., Weber M. B.** Bubbles in viscous liquids: shape, wakes and velocities // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 105.— P. 61.
9. **Moore D. W.** The boundary layer on spherical gas bubbles // J. Fluid Mech.— 1963.— V. 16, N 7.
10. **Haberman W. L., Morton R. K.** An experimental study of bubbles moving in liquids // Proc. Amer. Soc. Civil Engrs.— 1954.— V. 49, N 387.
11. **Tsuge H., Hibino S.** The onset conditions of oscillatory motion of single gas bubbles rising in various liquids // J. Chem. Engng Jap.— 1977.— V. 10, N 1.
12. **Мори, Хиджиката, Курияма.** Экспериментальное исследование движения газового пузырька в ртути при наличии и в отсутствие магнитного поля // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. С. Теплопередача.— 1977.— Т. 99, № 3.
13. **Белов И. В., Еловиков Г. Н., Окулов Б. Е.** Стационарная скорость всплытия одиночных пузырей в некоторых жидкостях // Тепло- и массообменные процессы в ваннах сталеплавильных агрегатов.— М., 1974.
14. **Uno S., Kintner R. C.** Effect wall proximity on the rate of rise of single air bubbles in quiescent liquid // AIChE J.— 1956.— V. 2, N 3.

15. Galderbank P. H., Johnson D. S. L., Loudon I. Mechanics and mass transfer of the single bubbles in free rise through some Newtonian and non-Newtonian liquids // Chem. Engng Sci.— 1970.— V. 25, N 2.

Поступила 27/X 1987 г.

УДК 532.517.3

О ВЫЧИСЛЕНИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ АТТРАКТОРОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

С. П. Лукащук, Г. Е. Фалькович, А. И. Черных

(*Новосибирск*)

В основе современного подхода к проблеме возникновения турбулентности лежит предположение о конечномерности явлений, определяющих развитие неустойчивостей. Экспериментальные данные по ламинарно-турбулентному переходу [1, 2] свидетельствуют в пользу этой точки зрения, хотя строгая математическая формулировка такого утверждения — теорема о центральном многообразии [3, 4] — доказана только для бифуркаций потери устойчивости стационарной точкой. В настоящее время имеются интуитивные аргументы [5], делающие правдоподобным существование конечного набора возбужденных степеней свободы, определяющих динамику системы на больших временах для более сложных режимов движения, чем предельный цикл.

В связи с этим представляет значительный интерес определение числа независимых переменных, однозначно описывающих потенциально бесконечномерное движение диссипативной сплошной среды, когда число степеней свободы, реально вовлеченных в движение, заранее неизвестно. Задание необходимого числа таких переменных выполняет взаимно однозначное отображение фазового пространства асимптотического режима движения в евклидово пространство, размерность которого будем называть размерностью вложения.

В настоящей работе предлагается прямой способ определения размерности вложения непосредственно из экспериментальных данных, основанный на изучении функциональной зависимости между переменными. Наряду с размерностью вложения рассматриваются скейлинговые размерности [6, 7] и возможность их измерения в эксперименте. Затем экспериментальные данные, полученные при исследовании ламинарно-турбулентного перехода в круговом течении Куэтта, анализируются с точки зрения размерностей.

1. Размерность вложения. Пусть для некоторой диссипативной динамической системы измеряется зависимость от времени большого числа различных величин $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$. Если движение конечномерно, число независимых переменных равно n_e и первые n_e из измеренных x_i взаимно однозначно связаны с фазовыми координатами аттрактора, то всякая измеряемая величина x_k при $k > n_e$ является функцией (вообще говоря, неизвестной) фазовых переменных $x_1, \ldots, x_{n_e}$ и ее эволюция со временем функционально представима через зависимость от времени фазовых координат: $x_k(t) = f_k(x_1(t), \ldots, x_{n_e}(t))$. Если для всякого k проверять наличие или отсутствие функциональной зависимости $x_{k+1}(t)$ от предыдущих k измеряемых величин $x_1(t), \ldots, x_k(t)$, то ясно, что функциональная зависимость первый раз появится при $k = n_e$, поскольку сами фазовые переменные функционально независимы. Если движение бесконечномерно, то возникновение такой функциональной зависимости невозможно ни при каком k.

Геометрически функциональная зависимость изображается гладкой поверхностью в $(k+1)$-мерном пространстве. Если x_i^0 — точка, через которую проходит фазовая кривая в момент времени t_0, то при движении на аттракторе за бесконечно большие времена фазовая кривая будет возвращаться сколь угодно близко к ней. Введем k-мерную евклидову метрику $\rho_k(t, t_0) = \left[\sum_{i=1}^{k} (x_i(t) - x_i^0)^2\right]^{1/2}$. Возьмем сферу радиуса ε с центром в точке x_i^0. Пусть $d(\varepsilon)$ — наибольшее значение $d(t, t_0) = |x_{k+1}(t) - x_{k+1}^0|$ для всех точек фазовой кривой, попавших внутрь этой сферы за бесконечное время. Тогда при наличии гладкой функциональной зависимости при малых ε будут получаться малые $d(\varepsilon)$ и должна существовать константа C такая, что выполняется условие $d(\varepsilon) < C\varepsilon$. Если функциональной зависимости нет, то $x_{k+1}(t)$ принимает значения, не зависящие от $x_i(t)$