ПМТФ, № 4, 1972

УДК 532.135; 532.501.32

НЕСТАЦИОНАРНОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

А. М. Макаров, В. Г. Сальников

(Москва)

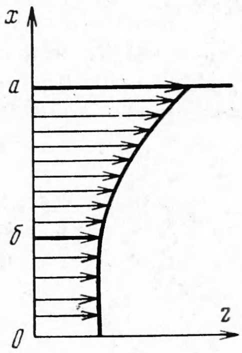
Рассмотрены задачи о нестационарном сдвиговом течении вязко-пластической среды между двумя параллельными плоскостями и в цилиндрической трубе под действием переменного во времени напряжения сдвига, приложенного к стенкам канала.

Обзор исследований по гидродинамике вязко-пластических сред (пластиков Шведова — Бингама) содержится в работах [1-5]. При анализе сдвиговых течений вязко-пластических сред наибольший интерес представляет нахождение поверхности раздела зоны вязкого течения и зоны квазитвердого движения, что приводит к задачам с искомой границей для уравнения параболического типа, аналогичным задачам о промерзании [6,7].

В работе [8] для исследования нестационарных течений вязко-пластической среды, использован метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Метод последовательных приближений для решения ряда задач о промерзании использован в работах [9-13].

Рассмотрим нестационарное одномерное сдвиговое течение вязко-пластической среды в плоском канале высоты $2a$ или в цилиндрической трубе с радиусом поперечного сечения a, под действием переменного во времени напряжения сдвига, приложенного к стенкам плоского канала или к стенке цилиндрической трубы.



Фиг. 1

Предполагаемая картина течения и расположения системы координат приведены на фиг. 1.

Полагаем, что при $t < 0$ стенки канала ($x = \pm a$) или стенка цилиндрической трубы ($x = a$) неподвижны; движение среды начинается в момент $t = 0$ из состояния покоя; при $t > 0$ рассматриваемое течение имеет единственную, отличную от нуля компоненту скорости $u_z = u(x, t)$, а касательное напряжение сдвига τ является функцией только поперечной координаты x и времени t. Реологическое уравнение течения вязко-пластической среды (пластик Шведова — Бингама) для одномерных течений указанного типа имеет вид

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_0 \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ при } |\tau| \geqslant \tau_0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } |\tau| < \tau_0 \qquad (2)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, τ_0 — предельное касательное напряжение сдвига (реологические константы среды). Учитывая симметрию плоского сдвигового течения, ниже ограничимся рассмотрением верхней половины канала $0 < x \leqslant a$. При этом как в плоском, так и в осесимметрическом случаях для всех значений $t > 0$ в зоне вязкого течения предполагаем выполненным условие

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 1$$

В отсутствие градиента давления и объемной плотности внешних сил с учетом сделанных выше предположений уравнение движения сплошной среды запишем в форме

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \tau) \tag{3}$$

где ρ — плотность среды, значение $k = 1$ соответствует плоскому, а $k = 2$ — осесимметрическому случаю.

Продифференцировав уравнение (3) по переменной x, а уравнение (I) по переменной t и исключая из полученной системы выражение $\partial^2 u / \partial x \partial t$, получим

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \tau) \right] \tag{4}$$

Заметим, что уравнение (4) описывает изменение во времени распределения касательных напряжений сдвига в вязкой зоне течения, так как только в этой зоне имеют место выражения (1) и (3).

В силу непрерывности касательных напряжений сдвига при $x = a$ имеет место граничное условие

$$\tau(a, t) = \varphi(t) \tag{5}$$

Если $x = \delta(t)$ — уравнение границы раздела зоны пластического течения и зоны квазитвердого движения, то при $x = \delta(t)$ на искомой границе должно выполняться условие

$$\tau(x, t) = \tau_0 \quad \text{при} \quad x = \delta(t) \tag{6}$$

Вследствие движения квазитвердого ядра как единого целого имеем

$$\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \tau) = (k+1) \frac{\tau_0}{\delta(t)} \quad \text{при } x = \delta(t) \tag{7}$$

Поскольку течение развивается из состояния покоя, в котором квазитвердая зона занимала всю область течения, в качестве начального условия для $\delta(t)$ имеем

$$\delta(0) = a \tag{8}$$

Выведем более подробно соотношение (7), так как пренебрежение указанным условием привело к ошибочным результатам [14,15], для плоского случая показанным в работе [16]. Рассмотрим движение вязко-пластической среды в квазитвердой зоне, для которой, учитывая реологическое уравнение в форме (2), имеем $u = u_0(t)$. При этом из уравнения движения (3) следует:

$$\frac{1}{x^k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \tau) = f(t), \quad 0 < x < \delta(t) \tag{9}$$

где $f(t)$ — некоторая функция, подлежащая определению.

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\tau = f(t)\, x\, (k+1)^{-1} + x^{-k} C(t) \tag{10}$$

где $C(t)$ — произвольная функция. При $x \to 0$ касательные напряжения сдвига $\tau \to 0$, поэтому $C(t) = 0$. С учетом условия на искомой границе (6) из выражения (10) получим

$$\tau = \tau_0 \, x/\delta(t) \tag{11}$$

Соотношение (7) можно получить из выражения (11), если учесть непрерывность скорости среды и касательных напряжений сдвига при переходе через границу раздела зон $x = \delta(t)$. Введем безразмерные величины

$$x_* = \frac{x}{a}, \quad \Delta_* = \frac{\delta}{a}, \quad \tau_* = \frac{\tau}{T}, \quad S = \frac{\tau_0}{T}, \quad t_* = \frac{\mu}{\rho a^2} t$$

$$\varphi_*(t_*) = \frac{a\varphi(t)}{T}$$

где T — характерное напряжение. В безразмерной форме задача (4) и (8) имеет вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}(x^k \tau)\right], \quad \Delta(t) < x < 1, \quad 0 < t < t_0 < \infty \tag{12}$$

$$\tau(1, t) = \varphi(t) \tag{13}$$

$$\tau(\Delta, t) = S \tag{14}$$

$$\frac{1}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}(x^k \tau)\big|_{x=\Delta} = \frac{(k+1)S}{\Delta(t)} \tag{15}$$

$$\Delta(0) = 1 \tag{16}$$

Здесь и ниже опущены звездочки, отмечающие безразмерные величины.

Построим решение задачи (12)—(16). Интегрируя дважды уравнение (12) по переменной x в пределах от Δ до x и учитывая условия (15) и (14), а затем и условия (13), после несложных преобразований получим систему функциональных уравнений для определения $\tau(x, t)$ и $\Delta(t)$

$$\tau = S\frac{x}{\Delta} + \frac{1}{x^k}\int_{\Delta}^{x} x^k \int_{\Delta}^{x} \frac{\partial \tau}{\partial t}\, dx dx \tag{17}$$

$$\Delta = S\left[\varphi(t) - \int_{\Delta}^{1} x^k \int_{\Delta}^{x} \frac{\partial \tau}{\partial t}\, dx dx\right]^{-1} \tag{18}$$

Функциональное уравнение (18) совместно с начальным условием (16) для $\Delta(t)$ накладывает следующее ограничение на функцию $\varphi(t)$:

$$\varphi(0) = S$$

Заметим, что образование зоны вязко-пластического течения возможно только при выполнении условия

$$\varphi(t) > S - \int_{\Delta}^{1} x^k \int_{\Delta}^{x} \frac{\partial \tau}{\partial t}\, dx dx$$

Система функциональных уравнений (17), (18) для некоторого класса функций $\varphi(t)$ может быть решена методом последовательных приближений

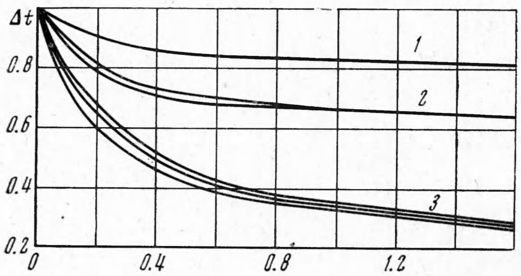
$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= S\frac{x}{\Delta_n} + \frac{1}{x^k}\int_{\Delta_n}^{x} x^k \int_{\Delta_n}^{x} \frac{\partial \tau_n}{\partial t}\, dx dx \\ \Delta_{n+1} &= S\left[\varphi(t) - \int_{\Delta_n}^{1} x^k \int_{\Delta_n}^{x} \frac{\partial \tau_n}{\partial t}\, dx dx\right]^{-1} \end{aligned} \tag{19}$$

В качестве нулевого приближения принимаем

$$\tau_0 = S\frac{x}{\Delta_0}, \qquad \Delta_0 = \frac{S}{\varphi(t)} \tag{20}$$

Выбор нулевого приближения в форме (20) физически соответствует случаю вязко-пластической среды с бесконечно малым значением плотности.

По итерационной схеме (19) для $k = 0, 1$ проведены вычисления нулевого, первого и второго приближений. Для получения конкретных результатов в качестве функции $\varphi(t)$ принималось следующее выражение:



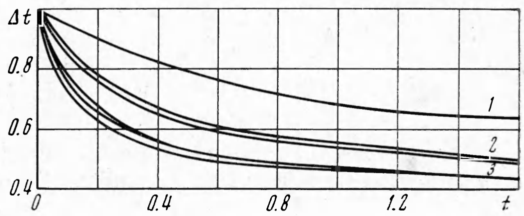
Фиг. 2

$$\varphi(t) = \frac{S(1+mt)}{1+mst}$$

Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = S, \qquad \varphi(\infty) = 1$$

что дает возможность моделировать выход неустановившегося течения вязко-пластической среды на своеобразный «стационарный режим», при котором ускорения стенки канала и квазитвердого ядра течения остаются постоянными во времени. Наличие в выражении для $\varphi(t)$ параметра m дает возможность оценить влияние быстроты нарастания сдвиговых напряжений, приложенных к стенке плоского канала и к стенке цилиндрической трубы, на изменение положения границы раздела зон. Кроме того, параметр m влияет на сходимость итерационного процесса. Проведенные расчеты показывают, что сходимость предложенного итерационного процесса вполне удовлетворительна для $1 \leqslant m \leqslant 10$ и ухудшается с возрастанием m. Для значений $m > 100$ сходимость не имеет места. При изменении параметра пластичности S в пределах от 0.2 до 0.8 сходимость итерационного процесса улучшается с ростом S.



Фиг. 3

На фиг. 2 приведены результаты расчетов по итерационной схеме (19) для плоского случая, когда параметр $m = 5$ (цифры *1*, *2*, *3* соответствуют значениям параметра пластичности S, принимающего соответственно значения 0.8, 0.6 и 0.2). На графиках фиг. 2

$$\Delta_0 < \Delta_2 < \Delta_1$$

На фиг. 3 показано влияние параметра m на развитие течения вязко-пластической среды в круглой трубе. Параметр пластичности $S = 0.4$ (цифры *1*, *2*, *3* соответствуют значениям параметра m, принимающего соответственно значения 1, 3, 7). На графиках фиг. 3

$$\Delta_0 < \Delta_2 < \Delta_1$$

Максимальное различие между вторым и первым приближениями для $\Delta(t)$ в исследованном интервале изменения времени t составило величину не более 0.07, что подтверждает применимость указанного метода для решения рассмотренной задачи.

Поступила 9 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Валарович М. П., Малинин Н.И. Исследования в области феноменологической реологии. Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 2.
2. Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х. Нестационарные движения вязко-пластических сред. М., Изд. МГУ, 1970.
3. Гурбанов Р. С., Касимов А. Ф., Мирзаджанзаде А. Х. Гидродинамика вязко-пластических сред. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. Аббасов А. А., Гасанов Г. Т., Гурбанов С. Г. Нестационарные движения вязко-пластических сред. Ш Всес. съезд по теорет. и прикл механ., Аннот. докл., М., «Наука», 1968.
5. Гасанов Г. Т., Мирзаджанзаде А. Х. Решение обратных задач нестационарного движения вязко-пластической жидкости. ПМТФ, 1962, № 5.
6. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., Главн. ред. общетехн. лит-ры, 1937.
7. Портнов И. Г. Точное решение задачи о промерзании с произвольным изменением температуры на неподвижной границе. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 3.
8. Макаров А. М., Павлов К. Б., Симхович С. Л. Применение метода Монте-Карло к решению нестационарных задач гидродинамики вязко-пластических сред. Инж.-физ. ж., 1970, т. 18, № 6.
9. Savino I. M., Siegel R. An analytical solution for solidification of a moving warm liquid onto an isothermal cold wall. Internat. J. Heat and Mass Trans., 1969, vol. 12, No. 7.
10. Макаров А. М., Леонов В. В., Дубовик В. И., Шведова Г. Н. Задача о промерзании жидкости, натекающей на плоскую стенку. Инж.-физ. ж., 1971, т. 21, № 3.
11. Лейбензон Л. С. Руководство по нефтепромысловой механике, ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1931.
12. Evans G. W. II, Isaakson E., MacDonald I. K. L. Stefan — like problems. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 8, No. 3.
13. Evans G W. II. A note on the existence of a solution to a problem of stefan. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 9, No. 2.
14. Brinkmann A. Die Anlaufströmung eines Binghamschen Stoffes zwischen zwei parallelen Wänden. Z. angew. Math. und Phus., 1966, Bd 17, H. 6.
15. Atabek H. B. Start—up flow of a Bingham plastic in a circular tube. Z. angew. Math. und Mech., 1964, Bd 44, H. 7.
16. Макаров А. М. О применении метода интегрального преобразования Лапласа — Карсона в теории нестационарных течений вязко-пластической среды. Инж.-физ. ж., 1970, т. 19, № 1.