ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Е. В. Булыгина

(Новосибирск)

Для неплоских треугольных крыльев нельзя применять метод конических течений, а также метод Е. А. Красильщиковой [1], так как треугольное крыло не имеет участка сверхзвуковой передней кромки. С. С. Григорян [2] способом последовательных приближений доказал существование решения задачи в случае полностью дозвуковой передней кромки. Практическое применение этого метода требует знания решения в окрестности вершины крыла.

Ниже излагается приближенный метод расчета треугольных крыльев с дозвуковой передней кромкой. Как известно, потенциал произвольной точки крыла $P(x, y)$ определяется двойным интегралом

$$\Phi(x, y) = \iint_S \frac{\gamma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)}, \qquad r(\xi, \eta) = \sqrt{(x-\xi)^2 - B^2(y-\eta)^2} \tag{1}$$

где область интегрирования S ограничена линиями Маха, выходящими из точки P (PK_2 и PK_1), и линиями Маха, выходящими из вершины крыла (OK_1 и OK_2, фиг. 1).

Интенсивность источников $\gamma(x, y)$ на крыле в области четырехугольника $OE_1 \Phi E_2$ определяется условием обтекания

$$\gamma(\xi, \eta) = \frac{V_\infty}{\pi} \beta(\xi, \eta) \tag{2}$$

где $\beta(\xi, \eta)$ — местный угол наклона поверхности крыла.

Интенсивность источников вне крыла (в треугольниках OK, E и OK_2E_2) определяется условием равенства нулю потенциала в любой точке этой области.

Возьмем две точки вне крыла E_1 и E_2, являющиеся пересечением передних кромок крыла и линий Маха, выходящих из точки P.

Потенциал в этих точках определяется той же формулой (1), только области интегрирования будут другими; S_1— область, ограниченная теми же линиями OK_1 и OK_2 и выходящими из точки E_1 (E_1K_1 и E_1K_4) линиями Маха, S_2— область четырехугольника $E_2K_3OK_2$.

При определении потенциала в точке P область интегрирования S может быть разбита на три области: область S_2, область ω_1 четырехугольника $PE_1E_3E_2$ и область ω_2 трапеции $E_1K_1K_3E_3$; таким образом, согласно (1) имеем

$$\Phi(x, y) = \iint_{S_2} \frac{\gamma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} + \iint_{\omega_1} \frac{\gamma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} + \iint_{\omega_2} \frac{\gamma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} \tag{3}$$

Первый интеграл в (3) обращается в нуль вследствие равенства нулю потенциала в точке E_2. Интенсивность источников в области ω_1 известна. Интенсивность в области ω_2 определяется условием, что потенциал в точке E_1 обращается в нуль.

Область S_1 состоит из области ω_2 интересующей нас трапеции и области Δ — треугольника OE_1E_4 с известной интенсивностью и областей σ_3 и σ_4 (треугольников K_3E_3O и K_4E_4O), в которых интенсивность источников также не известна:

$$\iint_{\sigma_3+\sigma_4+\omega_2} \frac{\gamma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} + \iint_{\Delta_1} \frac{V_\infty}{\pi} \frac{\beta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} = 0 \tag{4}$$

Соотношение (4) можно рассматривать как интегральное уравнение для неизвестной функции $\gamma(\xi, \eta)$.

При численном решении этого уравнения в качестве нулевого приближения возьмем среднее значение подынтегральной функции Ω, обозначая его индексом

$$\Omega = \left(\frac{\gamma(\xi, \eta)}{r(\xi, \eta)}\right)_m = -\frac{\pi}{V_\infty} \frac{1}{S_3 + S_4 + S_{\omega_2}} \iint \frac{\beta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} \tag{5}$$

И тогда интеграл по области ω_2 в формуле (3) вычислим как произведение среднего значения на площадь области интегрирования. Тогда потенциал произвольной точки P определится двумя интегралами:

$$\Phi(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \iint_{\omega_1} \frac{\beta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} - \frac{V_\infty}{\pi} \frac{S\omega_2}{S_3 + S_4 + S_{\omega_2}} \iint_{\Delta_1} \frac{\beta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r(\xi, \eta)} \tag{6}$$

Величина μ даст отношение площадей и определяется по координатам точек через координаты произвольной точки (x, y):

$$\mu = \frac{S_{\omega_2}}{S_3 + S_4 + S_{\omega_2}} = 2B \frac{k(x^2 + B^2y^2) - (k^2 + B^2)\, yx}{(k^2 + B^2)(x - By)^2} \tag{7}$$

Здесь $k = \operatorname{tg} x$ — стреловидность крыла. Имея потенциал, нетрудно получить коэффициент подъемной силы C_y и сопротивления C_x.

На фиг. 2 представлена зависимость $C_y{}^\circ = \beta C_y / \alpha$ от стреловидности $\eta = \operatorname{tg}\chi / \operatorname{tg}\mu$ передней кромки плоского крыла, вычисленная по точной теории конических течений *3* и нулевому приближению *1*. Как видно, даже нулевое приближение дает удовлетворительный результат (*2* — первое приближение).

Для крыла только с геометрической круткой, когда β не зависит от координат ξ интегралы легко вычисляются в элементарных функциях:

$$\Phi = -\frac{V}{\pi}\int\limits_0^{y_1} \beta(\mu+1) \operatorname{ar\,ch}\frac{x+k\eta}{B(y-\eta)}\,d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^{yE_4} \mu\beta \operatorname{ar\,ch}\frac{x-k\eta}{B(y-\eta)}\,d\eta - \mu \int\limits_{yE_1}^{yE_4} \beta \operatorname{ar\,ch}\frac{2x+(k-B)y+(k+B)\eta}{(k+B)(y-\eta)}\,d\eta -$$

$$- \int\limits_{yE_3}^{yE_2} \beta \operatorname{ar\,ch}\frac{2x-(k-B)y-(k+B)\eta}{(k+B)(y-\eta)}\,d\eta$$

Рассмотрим последующие приближения. Проведем последовательно линии Маха из точек переднего крыла с линиями Маха, выходящими из других точек пересечения.

Для краткости интегралы по новым областям от неизвестных функций обозначим буквами σ с соответствующими индексами:

$$\sigma_3 = \iint\limits_{\triangle E_3 K_3 0} \frac{\gamma(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{r(\xi,\eta)}$$

$$\sigma_4 = \iint\limits_{\triangle E_4 K_4 0} \frac{\gamma(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{r(\xi,\eta)} \qquad (8)$$

. . . .

$$\sigma_k = \iint\limits_{\triangle E_k K_k 0} \frac{\gamma(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{r(\xi,\eta)}$$

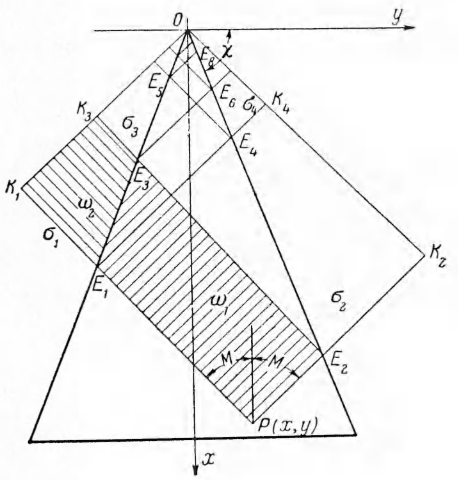
а интегралы от известных функций Δ

$$\Delta_1 = \iint\limits_{\triangle E_1 0 E_4} \frac{V_\infty}{\pi}\frac{\beta(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{r(\xi,\eta)}$$

$$\Delta_2 = \iint\limits_{\triangle E_2 0 E_3} \frac{V_\infty}{\pi}\frac{\beta(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{r(\xi,\eta)} \qquad (9)$$

. . . .

$$\Delta_k = \iint\limits_{\triangle E_k 0 E_{k+1}} \frac{V_\infty}{\pi}\frac{\beta(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{r(\xi,\eta)}$$



Фиг. 1

Условие равенства нулю потенциала в точке E_1 можно записать

$$\sigma_\Delta + \sigma_3 + \sigma_4 + \Delta_1 = 0 \qquad (10)$$

Из этого уравнения можно определить σ_Δ. Для определения величин σ_3, σ_4 можно использовать условие равенства нулю потенциала в точках E_3, $E_4 \ldots$:

$$\begin{aligned}
&\sigma_3 + \sigma_6 + \Delta_3 = 0\\
&\sigma_4 + \sigma_5 + \Delta_4 = 0\\
&\sigma_5 + \sigma_8 + \Delta_5 = 0\\
&\sigma_6 + \sigma_7 + \Delta_6 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma_k + \sigma_{k+3} + \Delta_k = 0\\
&\sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \Delta_{k+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (11)$$

Последовательно подставляя значения (11) в (10), найдем для σ_Δ следующий ряд:

$$\sigma_\Delta = -\Delta_1 + (\Delta_3 + \Delta_4) - (\Delta_5 + \Delta_6) + (\Delta_7 + \Delta_8) - (\Delta_9 + \Delta_{10}) + \\ + (-1)^k (\Delta_{k-1} + \Delta_{k-1}) + (\sigma_k + \sigma_{k+1}) (-k)^k. \qquad (12)$$

В последней паре уравнений (11) представим неизвестные интегралы через среднее значение подынтегральной функции и площадь интегрирования $\sigma_i = \Omega_i \zeta_i$. Тогда для определения σ_k и σ_{k+1} получим систему

$$\Omega_1 S_k + \Omega_2 S_{k+3} = -\Delta_k + \delta_2 S_{k+3}, \qquad \Omega_2 S_{k+1} + \Omega_1 S_{k+2} = -\Delta_{k+1} + \delta_1 S_{k+2} \qquad (13)$$

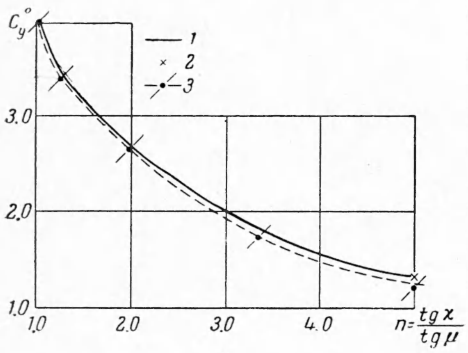
где δ_1 и δ_2— ошибки при замене среднего значения Ω_1 и Ω_2 второго уравнения средними значениями уравнения. Решив эту систему, определим σ_Δ следующим образом:

$$\sigma_\Delta = -\Delta_1 + \sum_{k=3}^{n} \Big\{ (-1)^{k+1} (\Delta_k + \Delta_{k+1}) + \delta + \\ + (-1)^k \left[\Delta_k \left(1 - \frac{S_{k+2}}{S_k}\right) + \Delta_{k+1} \left(1 - \frac{S_{k+3}}{S_{k+1}}\right)\right] \left[1 - \frac{S_{k+2}}{S_k} \frac{S_{k+3}}{S_{k+1}}\right]^{-1} \Big\} \qquad (14)$$

где δ— общая ошибка:

$$\delta \leqslant \frac{|\delta_1| \, |S_{k+2}| \left|1 - \frac{S_{k+3}}{S_{k+1}}\right| + |\delta_2| \, |S_{k+3}| \left|1 - \frac{S_{k+2}}{S_{k+1}}\right|}{\left|1 - \frac{S_{k+2}}{S_k} \frac{S_{k+3}}{S_{k+1}}\right|} \qquad (15)$$

так как $S_{(k+2)}$ и S_{k+3} неограниченно убывают, а все остальные величины ограничены, то δ стремится к нулю. Нетрудно показать, что ряд определяющий σ_Δ в формуле (14) сходится. Этот ряд является суммой двух рядов с нечетными и четными индексами, каждый из которых знакочередующийся убывающий ряд. Эти ряды сходятся и абсолютно, так как каждый член представляет интеграл по области от наклона поверхности крыла. Так как функция $\beta(\xi,\eta)/r(\xi,\eta)$ интегрируема в каждой области, то можно говорить о среднем значении ее в соответствующей области.



Фиг. 2

Отношение площадей равно отношению квадратов абсцисс точек пересечения:

$$\frac{S_{k+3}}{S_{k+1}} = \left(\frac{x_{Ek+3}}{x_{Ek+1}}\right)^2$$

Координаты точек пересечения можно записать таким образом:

$$x_{2i+1} = \frac{(1 - \operatorname{tg}\chi)^i}{(1 + \operatorname{tg}\chi)^{i+1}} [x + (-1)^{i+1} Y], \qquad x_{2i+2} = \frac{(1 - \operatorname{tg}\chi)^i}{(1 + \operatorname{tg}\chi)^{i+1}} [x + (-1)^i Y]$$

Отношение последующей площади к предыдущей будет, чередуясь, принимать последовательно значения

$$q_1 = \frac{(1 - \operatorname{tg}\chi)^2}{(1 + \operatorname{tg}\chi)^2} \left(\frac{x - y}{x + y}\right)^2, \qquad q_2 = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}\chi}{1 + \operatorname{tg}\chi}\right)^2 \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2$$

Так как для любой внутренней точки крыла $|y/x| < \operatorname{tg}\chi$, то $q_1 \leqslant q_2 < 1$ и, следовательно, члены ряда не превосходят членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_2 < 1$.

Поступила
17 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. Гостехтеоретиздат, 1952.
2. Григорян С. С. Об одной задаче теории крыла конечного размаха. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3, стр. 348—350.