и теплового потока $\tau_g = \partial g/\partial y|_W$ на поверхности крыла вдоль оси симметрии $z = 0$ приведены на фиг. 3. Значения теплового потока и коэффициента напряжения трения на наветренной стороне крыла ($\alpha = 0{,}3$) значительно превышают их величины на подветренной стороне крыла ($\alpha = -0{,}3$). На нижней поверхности крыла в окрестности задней кромки наблюдается резкое возрастание величины τ_u, что связано с разгоном потока. Следует также отметить слабое влияние величины заданного на задней кромке давления на распределение теплового потока.

На фиг. 4, 5 представлены распределения p, τ_u, τ_g и коэффициента напряжения трения в поперечном направлении $\tau_w = \partial w/\partial y|_W$ по размаху крыла при значении продольной координаты $x = 0{,}6$. Это значение координаты x выбрано из условий, отмеченных выше. На фиг. 4 штриховой линией отмечено значение давления $p(x = 1)$ на задней кромке, при котором проведены все представленные в данной работе расчеты. Необходимо отметить, что влияние величины угла атаки на коэффициент напряжения трения в поперечном направлении τ_w сравнительно слабое, по крайней мере для значений $|\theta| > 0{,}2$. Однако вблизи плоскости симметрии $|\theta| \leqslant 0{,}1$ величина τ_w на наветренной стороне значительно превышает ее значение на подветренной.

Поступила 14 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Whitehead A. H., Jr., Hefner J. N., Rao D. M.** Lee-surface vortex effects over configurations in hypersonic flow. AIAA Pap. N 72—77, 1972.
2. **Rao D. M., Whitehead A. H., Jr.** Leeside vortices on delta wings at hypersonic speeds.— AIAA J., 1972, vol. 10, N 11.
3. **Cross E. J., Jr., Hankey W. L.** Investigation of the leeward side of a delta wing at hypersonic speeds. AIAA Pap. N 68—675, 1968.
4. **Ладыженский М. Д.** О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
5. **Козлова И. Г., Михайлов В. В.** О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6.
6. **Нейланд В. Я.** К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3.
7. **Дудин Г. Н.** К расчету пограничного слоя на треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия.— Учен. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 5.
8. **Bluford G. S., Jr.** Numerical solution of the supersonic and hypersonic viscous flow around thin delta wings. AIAA Pap. N 78—1136, 1978.
9. **Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.** Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
10. **Нейланд В. Я.** К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2.
11. **Шевелев Ю. Д.** Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977.

УДК 532.78 : 536.421.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Л. Г. Бадратинова

(*Новосибирск*)

1. В системе координат x, y, z, связанной с плоским невозмущенным фронтом (ось x направлена внутрь расплава, а оси y, z — вдоль поверхности раздела), процесс кристаллизации разбавленного бинарного сплава описывается уравнениями

$$(1.1)\qquad \text{при}\quad x > f(y, z, t)\quad \partial T_1/\partial t + \mathbf{v}_1\cdot\nabla T_1 = \chi_1\Delta T_1,$$
$$\partial c_1/\partial t + \mathbf{v}_1\cdot\nabla c_1 = D\Delta c_1,\ \nabla\cdot\mathbf{v}_1 = 0,$$
$$\partial \mathbf{v}_1/\partial t + (\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_1 = \nu\Delta\mathbf{v}_1 - \nabla p/\rho_1 + \mathbf{g},\ \mathbf{g} = (-g,\ 0,\ 0);$$
$$(1.2)\qquad \text{при}\ x < f(y, z, t)\quad \partial T_2/\partial t - V_2(\partial T_2/\partial x) = \chi_2\Delta T_2$$

с условиями локального равновесия фаз [1]

$$\text{(1.3)} \qquad \text{при } x = f(y,\ z,\ t) \quad T_1 = T_2 = mc_1 + T_0 + T_0\gamma K,$$

отсутствия касательной составляющей скорости расплава на фронте и непрерывности потоков энергии и масс [2] обоих компонентов расплава при переходе через границу раздела $x = f(y,\ z,\ t)$:

$$\text{(1.4)} \qquad (\varkappa_2\nabla T_2 - \varkappa_1\nabla T_1)\mathbf{n} = -\rho_1\Lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{U})\mathbf{n},$$

$$\mathbf{v}_1\cdot\boldsymbol{\tau} = 0,\ \rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{U})\mathbf{n} = \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{U})\mathbf{n},$$

$$D\rho_1\rho_2^{-1}\nabla c_1\mathbf{n} = (1 - k)\,c_1\,(\mathbf{v}_2 - \mathbf{U})\mathbf{n}.$$

Здесь $\mathbf{v}_1$, p и c_1 — скорость расплава, давление и концентрация примеси (измеряется в весовых долях); T_j $(i = 1, 2)$ — температуры сред. Индекс 1 характеризует жидкую фазу, индекс 2 — твердую. Через ρ_j, χ_j, $\varkappa_j$ обозначены плотности сред, коэффициенты температуропроводности и теплопроводности; ν и D — коэффициенты кинематической вязкости и диффузии примеси; $V_2 = \text{const}$ — скорость кристалла. В условии (1.3) учитывается зависимость температуры кристаллизации от концентрации примеси на фронте (m — наклон линии ликвидуса), а также от кривизны K поверхности раздела; γ — коэффициент поверхностного натяжения; T_0 — температура плавления на плоском фронте в отсутствие примеси; Λ — скрытая теплота кристаллизации; k — равновесный коэффициент распределения примеси; $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{U}$ — нормальный и касательный векторы к границе фазового перехода и скорость перемещения этой границы.

Предполагается, что расплав занимает все полупространство $x > f(y,\ z,\ t)$, а в твердой среде на некотором фиксированном расстоянии H от невозмущенного фронта поддерживается заданная температура. К условиям (1.3), (1.4) добавляются следующие:

$$\text{(1.5)} \qquad \text{при } x = \infty \quad c_1 = c_\infty,\ T_1 = T_\infty,\ \mathbf{v}_1 = (-V_1,\ 0,\ 0),$$

$$\text{при } x = -H \quad T_2 = T_{20}[1 - \exp(-V_2H/\chi_2)] + T_0 + mc_\infty/k,$$

где $V_1 = \rho_2V_2/\rho_1$; $T_{20} = (c_{V1}T_1 + \Lambda)/c_{V2}$; $T_{10} = T_\infty - T_0 - mc_\infty/k$; c_{Vj} — удельные теплоемкости сред при постоянном объеме.

2. Задача (1.1)—(1.5) имеет одномерное стационарное решение

$$\text{(2.1)} \qquad f^0 \equiv 0,\quad \mathbf{v}_1^0 = (-V_1,\ 0,\ 0),\quad c_1^0 = c_\infty + c_\infty\left(k^{-1} - 1\right)\exp\left(-V_1x/D\right),$$

$$p^0 = -\rho_1gx + \text{const},\quad T_j^0 = T_{j0}\left[1 - \exp\left(-V_jx/\chi_j\right)\right] + T_0 + mc_\infty/k.$$

Для простоты исследование устойчивости проводится в плоском случае. (Все результаты остаются в силе и для пространственного течения.) Линеаризуем систему (1.1)—(1.5) в окрестности решения (2.1) и введем функцию тока $\psi_1(x,\ y,\ t)$, полагая $\mathbf{v}_1 = (\partial\psi_1/\partial y,\ -\partial\psi_1/\partial x)$. Избавимся от давления p и приведем систему к безразмерному виду, выбирая в качестве независимых следующие единицы измерения: длины χ_1/V_1, времени χ_1/V_1^2, температуры Λ/c_{V1}, концентрации c_∞/k. Отделим время t и переменную y, полагая

$$\{f(y,\ t),\ c_1(x,\ y,\ t),\ T_j(x,\ y,\ t),\ \psi_1(x,\ y,\ t)\} = \{ia,\ ic(x),\ i\theta_j(x),\ \psi(x)\}\times$$
$$\times\ \exp(\mu t + i\omega y)\ (i = 1,\ 2).$$

В результате для амплитуд нормальных возмущений получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\text{(2.2)} \qquad \text{при} \quad x > 0 \quad (L - \mu)\,\theta_1 + \theta_1' = \omega G_1\psi\exp(-x),$$

$$(L - \mu D_*)\,c + D_*c' = \omega D_*G_2\psi\exp(-D_*x),$$

$$L\left[(L - \mu\,\mathrm{Pr}_*)\,\psi + \mathrm{Pr}_*\psi'\right] = 0;$$

$$\text{(2.3)} \qquad \text{при} \quad x < 0 \quad (L - \mu\chi_*)\,\theta_2 + \rho_*\chi_*\theta_2' = 0;$$

с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
(2.4)\qquad & \text{при } x = 0 \ \psi' = 0, \ \omega\psi = -\varepsilon\mu a, \\
& \theta_1 + G_1 a = \theta_2 + G_2 a = m_0(c + G_c a) - \gamma_0\omega^2 a, \\
& \varkappa_*^{-1}(\theta_2' - \rho_*\chi_* G_2 a) - \theta_1' + G_1 a = \rho_*^{-1}\mu a, \\
& D_*^{-1}c' - kG_c a + (1 - k)c = \mu\rho_*^{-1}(k - 1)a; \\
& \text{при } x = \infty \ \theta_1 = c = 0, \ \psi = \psi' = 0; \\
& \text{при } x = -h \ \theta_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь $L = (d^2/dx^2) - \omega^2$; штрих означает дифференцирование по x; $\mathrm{Pr}_* = \chi/\nu$ — обратное число Прандтля; $D_* = \chi_1/D$; $\chi_* = \chi_1/\chi_2$; $\varkappa_* = \varkappa_1/\varkappa_2$; $\rho_* = \rho_1/\rho_2$; $\varepsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$; величины $G_c = (k - 1)D_*$, $G_1 = c_{V1}T_{10}/\Lambda$ и $G_2 = \varkappa_*(1 + G_1)$ — безразмерные градиенты концентрации примеси, температуры в расплаве и кристалле; $h = HV_1/\chi_1$; $m_0 = mc_\infty c_{V1}/k\Lambda$; $\gamma_0 = \gamma T_0 c_{V1}V_1/\chi_1\Lambda$.

При $G_1 < 0$ температура T_1^0 в расплаве ниже температуры $T_0 + mc_\infty/k$ на фронте кристаллизации. Будем допускать возможность переохлаждения жидкости (см. [3, 4]) и рассматривать задачу для $G_1 \geqslant -1$. Если $G_1 = -1$, то градиент $G_2 = 0$ и температура в кристалле $T_{20} = T_0 + mc_\infty/k$.

Если все собственные числа μ задачи (2.2)—(2.4) имеют отрицательную вещественную часть, то решение (2.1) устойчиво. Если же в спектре найдется хотя бы одно возмущение, для которого $\mathrm{Re}\,\mu > 0$, то решение (2.1) неустойчиво по отношению к этому возмущению.

3. Пусть $D_* = 0\,(G_c = 0)$, $\rho_* = 1$ (тепловая задача). В этом случае система (2.2)—(2.4) имеет нетривиальное решение

$$\psi = c \equiv 0, \ \theta_1 = -(G_1 + \gamma_0\omega^2)a \exp(-lx) \quad (a \neq 0),$$

$$\theta_2 = -(G_2 + \gamma_0\omega^2)\,a \exp(-\chi_* x/2)\,\mathrm{ch}\,[r(x + h)]\,[\mathrm{sh}\,(rh)]^{-1},$$

которое существует при всех значениях μ, удовлетворяющих дисперсионному соотношению

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad \mu = & -(1 + G_1)[r\,\mathrm{cth}\,(rh) + \chi_*/2] - G_1(l - 1) - \\
& - \gamma_0\varkappa_*^{-1}\omega^2[r\,\mathrm{cth}\,(rh) - \chi_*/2 + \varkappa_* l].
\end{aligned}
$$

Величина l — корень уравнения

$$(3.2)\qquad l^2 - l - \omega^2 - \mu = 0,$$

для которого выполняется условие ограниченности возмущений при $x \to \infty$, т. е. $\mathrm{Re}\,l > 0$. Если через Q_ω обозначить функцию $Q_\omega(\eta, \mu) = \sqrt{\eta^2/4 + \omega^2 + \eta\mu}$, $\mathrm{Re}[Q_\omega(\eta, \mu)] > 0$, то $l = 1/2 + Q_\omega(1, \mu)$, $r = Q_\omega(\chi_*, \mu)$.

В работе [5] показано, что для каждого комплексного числа N, для которого $\mathrm{Re}\,N > 0$, справедливо равенство

$$(3.3)\qquad \mathrm{sgn}[\mathrm{Im}\,(N)] = \mathrm{sgn}[\mathrm{Im}\,(N^2)] = \mathrm{sgn}[\mathrm{Im}\,(N\,\mathrm{cth}\,N)].$$

Условимся для всякой комплексной величины N обозначать $\mathrm{Re}\,N = N_1$, $\mathrm{Im}\,N = N_2$. Пользуясь такими обозначениями для μ и l, уравнение (3.2) можно свести к двум эквивалентным ему:

$$(3.4)\qquad l_1^2 - l_2^2 - l_1 - \omega^2 - \mu_1 = 0, \quad 2l_1l_2 - l_2 - \mu_2 = 0.$$

Применяя (3.3) к комплексным величинам $l - 1/2$, rh ($l_1 > 1/2$, $r_1 > 0$), получим

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & \mathrm{sgn}\,l_2 = \mathrm{sgn}\,\{\mathrm{Im}\,[(l - 1/2)^2]\} = \mathrm{sgn}\,\mu_2, \\
& \mathrm{sgn}\,\{\mathrm{Im}\,[r\,\mathrm{cth}\,(rh)]\} = \mathrm{sgn}\,[\mathrm{Im}\,(r^2)] = \mathrm{sgn}\,\mu_2.
\end{aligned}
$$

Далее, если $\mu_1 \geqslant -\omega^2$, то имеет место

$$(3.6)\qquad \mathrm{sgn}\,(\mu_2 - l_2) = \mathrm{sgn}\,l_2 = \mathrm{sgn}\,\mu_2.$$

Действительно, если $l_2 = 0$, то в силу (3.5) $\mu_2 = 0$, и справедливость равенства (3.6) очевидна. При $l_2 \neq 0$ из уравнений (3.4) следует, что $\operatorname{sgn}(\mu_2 - l_2) = \operatorname{sgn}[(l_1 - 1)l_2]$, а для $\mu_1 \geqslant -\omega^2$ величина $l_1 > 1$.

Рассмотрим случай $G_1 \geqslant 0$. Используя (3.5) и сравнивая знаки мнимых частей правой и левой сторон уравнения (3.1), получим равенство $\operatorname{sgn}\mu_2 = -\operatorname{sgn}\mu_2$, из которого следует, что все решения (3.1) вещественны. Если $\mu \geqslant 0$, тогда $l \geqslant 1$, $r\operatorname{cth}(rh) \geqslant r \geqslant \chi_*/2$, и знак правой части (3.1) противоположен знаку левой части. Значит, каждое решение уравнения (3.1) отрицательно.

Пусть $-1 \leqslant G_1 < 0$, $\mu_1 \geqslant 0$. Преобразуя мнимую часть (3.1) к виду

$$\mu_2 - l_2 = -\left(1 + G_1 + \gamma_0\omega^2\varkappa_*^{-1}\right)\operatorname{Im}[r\operatorname{cth}(rh)] - (1 + G_1 + \gamma_0\omega^2)\, l_2$$

и используя (3.5), (3.6), получим $\mu_2 = 0$.

Доказано утверждение 1. При $G_1 \geqslant 0$ все собственные значения μ, определяемые уравнением (3.1), вещественны и отрицательны, а при $-1 \leqslant G_1 < 0$ мнимая часть $\mu_2 = 0$ для каждого решения μ, для которого $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$. Откуда следует, что в рамках тепловой задачи фронт кристаллизации устойчив при $G_1 \geqslant 0$, а при $-1 \leqslant G_1 < 0$ неустойчивость может быть связана лишь с монотонными возмущениями.

Полагая в уравнении (3.1) $\mu = 0$, получим критическую зависимость

$$(3.7)\qquad G_1 = G_1^*(\omega^2) = \frac{r_0\operatorname{cth}(r_0h) + \chi_*/2 + \gamma_0\omega^2\varkappa_*^{-1}[r_0\operatorname{cth}(r_0h) - \chi_*/2 + \varkappa_* l_0]}{r_0\operatorname{cth}(r_0h) + \chi_*/2 + l_0 - 1},$$

определяющую границу устойчивости относительно возмущения с волновым числом ω. Здесь $r_0 = \sqrt{\chi_*^2/4 + \omega^2}$, $l_0 = 1/2 + \sqrt{1/4 + \omega^2}$.

При $\gamma_0 = 0$ значение $G_1^*(0) = -1$. С ростом ω^2 функция G_1^* монотонно возрастает, и при $\omega^2 \to \infty$ ее значение стремится к $-1/2$. Это означает, что при $\gamma_0 = 0$ фронт кристаллизации устойчив, если $G_1 > -1/2$. Для $G_1 = -1/2$ наиболее опасными являются коротковолновые возмущения.

4. При $D_* = 0$, $\rho_* \neq 1$ получаем задачу об устойчивости фронта кристаллизации чистого расплава ($c \equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$). Дисперсионное уравнение для этой задачи может быть приведено к виду

$$(4.1)\qquad \begin{aligned}\rho_*^{-1}\mu = &-(1 + G_1)[R\operatorname{cth}(Rh) + \rho_*\chi_*/2] - \gamma_0\varkappa_*^{-1}\omega^2 \times \\ &\times [R\operatorname{cth}(Rh) - \rho_*\chi_*/2 + \varkappa_* l] - G_1(l - 1 + \varepsilon X),\end{aligned}$$

где $X = \mu(\omega + q + l)(\omega + l)^{-1}(q + l)^{-1}$; $q = 0{,}5\,\mathrm{Pr}_*^{-1} + Q_\omega(\mathrm{Pr}_*, \mu)$ — корень уравнения

$$(4.2)\qquad q^2 - (q - \mu)\,\mathrm{Pr}_* - \omega^2 = 0,$$

а $\quad R = Q_\omega(\rho_*\chi_*, \rho_*^{-1}\mu)$.

Если величины q, $l(q_1, l_1 > 0)$ и μ удовлетворяют уравнениям (3.2), (4.2), то

$$(4.3)\qquad \begin{aligned}\operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\mu\bar{l})] &= \operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\mu\bar{l}^2)] = \operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\mu\bar{q})] = \\ &= \operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\mu\bar{l}\bar{q})] = \operatorname{sgn}\mu_2.\end{aligned}$$

Приведем доказательства равенства

$$(4.4)\qquad \operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\mu\bar{l}\bar{q})] = \operatorname{sgn}\mu_2.$$

Из уравнений (3.2), (4.2) получаем

$$(4.5)\qquad \begin{aligned}\operatorname{Im}(\mu\bar{l}\bar{q}) &= |l|^2 q_2 + \omega^2\operatorname{Im}(lq) + |l|^2\operatorname{Im}(l\bar{q}), \\ \mathrm{Pr}_*\operatorname{Im}(\mu\bar{l}\bar{q}) &= \mathrm{Pr}_*|q|^2 l_2 + \omega^2\operatorname{Im}(lq) - |q|^2\operatorname{Im}(l\bar{q}).\end{aligned}$$

Если $l_2 = 0$, то $\mu_2 = q_2 = 0$, и равенство (4.4) выполняется. Если же $l_2 \neq 0$, то $\operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(l\bar{q})] = \operatorname{sgn}[l_2(q_1 - l_1q_2/l_2)]$. В каждом из равенств

(4.5) знак первых двух слагаемых совпадает со знаком μ_2. Если при некоторых μ, Pr_*, ω выполняется неравенство $q_1 \geqslant l_1 q_2 / l_2$, то $\operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(\bar{l}q)] = \operatorname{sgn} \mu_2$, и равенство (4.4) следует из первого уравнения (4.5), в противном случае оно следует из второго уравнения.

С помощью (4.3) можно доказать, что если величины q, l (q_1, $l_1 > 0$) и μ удовлетворяют уравнениям (3.2), (4.2), то

$$\operatorname{sgn}[\operatorname{Im}(X)] = \operatorname{sgn} \mu_2. \tag{4.6}$$

Если, кроме того, $\mu_1 > 0$, то $\operatorname{Re} X > 0$.

Справедливо утверждение 2. При $G_1 \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ все собственные значения μ, удовлетворяющие уравнению (4.1), вещественны и отрицательны, а при $G_1 \geqslant 0$, $\varepsilon < 0$ каждое решение μ имеет отрицательную вещественную часть. В случае $-1/2 \leqslant G_1 < 0$, $\varepsilon > -1/2$ $\operatorname{Im} \mu = 0$ для всех собственных значений, для которых $\operatorname{Re} \mu \geqslant 0$.

При $G_1 \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ доказательство (с учетом (4.6)) аналогично доказательству утверждения 1 для $G_1 \geqslant 0$.

Если $G_1 \geqslant 0$, $\varepsilon < 0$, то уравнение (4.1) не имеет решений с неотрицательной вещественной частью, так как для каждого μ с $\operatorname{Re} \mu \geqslant 0$ знаки вещественных частей правой и левой сторон этого уравнения противоположны. Для доказательства нужно в соотношении (4.1) положить $\varepsilon = \rho_*^{-1} - 1$, с помощью уравнения (3.2) преобразовать выражение $l - 1 - X$ к виду $Y\omega|\omega + l|^{-2}|q + l|^{-2}$, где

$$Y = (l-1)|q|^2\omega + (l-1)\bar{l}|q|^2 + \omega^3(\bar{q} + \bar{l}) +$$
$$+ (2|l - 1/2|^2 + 1/2)q + (|l-1|^2 + 1)(\bar{l} - 1)q +$$
$$+ \omega[(l-1)q\bar{l} + \bar{l}|q + l|^2] + \omega^2[\bar{l}q + \bar{l}^2 + |q + l|^2],$$

и показать, что вещественная часть каждого слагаемого в выражении Y неотрицательна при $\mu_1 \geqslant 0$.

Пусть $-1/2 \leqslant G_1 < 0$. При $-1/2 < \varepsilon < 0$ можно представить мнимую часть (4.1) в виде

$$(\varepsilon + 1/2)\mu_2 = -(\mu_2 - l_2)/2 - (G_1 + 1/2)l_2 - \gamma_0\omega^2 l_2 - \tag{4.7}$$
$$- \left(1 + G_1 + \gamma_0\varkappa_*^{-1}\omega^2\right)\operatorname{Im}[R \operatorname{cth}(Rh)] - \varepsilon G_1 X_2$$

и с помощью (3.3), (3.6), (4.6) показать, что для каждого μ с $\operatorname{Re} \mu \geqslant 0$ знаки левой и правой частей (4.7) противоположны. В случае $\varepsilon > 0$ для доказательства утверждения 2 нужно преобразовать мнимую часть (4.1) к виду

$$\mu_2/2 = -(\mu_2 - l_2)/2 - (G_1 + 1/2)l_2 - \gamma_0\omega^2 l_2 - \left(1 + G_1 + \gamma_0\varkappa_*^{-1}\omega^2\right) \times$$
$$\times \operatorname{Im}[R \operatorname{cth}(Rh)] - \varepsilon(\mu_2 - X_2/2) - \varepsilon(G_1 + 1/2)X_2$$

и показать, что $\operatorname{sgn}(\mu_2 - X_2/2) = \operatorname{sgn} \mu_2$.

При $\mu = 0$ из (4.1) получаем критическую зависимость $G_1^*(\omega^2)$. Эта зависимость определяется формулой (3.7), если заменить в ней χ_* на $\rho_*\chi_*$. Фронт кристаллизации устойчив относительно монотонных возмущений, если $G_1 > \max\limits_{\omega^2} G_1^*(\omega^2)$. Если $\gamma_0 = 0$, то $\max\limits_{\omega^2} G_1^*(\omega^2) = G_1^*(\infty) = -1/2$, а при $G_1 > -1/2$, согласно утверждению 2, колебательная неустойчивость невозможна. Таким образом, при $\gamma_0 = 0$ критерий устойчивости совпадает с критерием тепловой задачи.

5. В случае $\rho_* = 1$, $D_* \neq 0$ поле скоростей не испытывает возмущений ($\psi \equiv 0$), и мы приходим к термодиффузионной постановке задачи. При $\rho_* = 1$ и $h \to \infty$ решение спектральной задачи (2.2)—(2.4) приводит к следующему уравнению для собственных значений μ:

$$\mu = -G_1(l-1) - \varkappa_*^{-1}G_2(s + \chi_*) - \gamma_0\omega^2\left(\varkappa_*^{-1}s + l\right) + \tag{5.1}$$
$$+ m_0 G_c\left(\varkappa_*^{-1}s + l\right) - m_0 G_c Z,$$

где $s = -\chi_*/2 + Q_\omega(\chi_*, \mu)$ и $\tau = -D_*/2 + Q_\omega(D_*, \mu)$ — корни уравнений

$$(5.2)\qquad s^2 + \chi_* s - \omega^2 - \chi_*\mu = 0, \quad \tau^2 + D_*\tau - \omega^2 - D_*\mu = 0;$$

$$(5.3)\qquad Z = \left(\varkappa_*^{-1}s + l\right)(\mu + kD_*)(\tau + kD_*)^{-1}.$$

Для разбавленного бинарного сплава из уравнения Вант-Гоффа (см. [1]) следует $m(k-1) > 0$. Таким образом, $m_0G_c > 0$. Исключим из рассмотрения отрицательные значения G_1. При $G_1 \geqslant 0$ в расплаве может, однако, иметь место концентрационное переохлаждение [1, 6], характеризующееся градиентами $G_1 < m_0G_c$.

Обозначим через $F_{(1)}$ и $F_{(2)}$ функции

$$(5.4)\qquad F_{(1)}(\omega^2, k, D_*, m_0G_c) = m_0G_c\tau_0(\tau_0 + kD_*)^{-1},$$

$$F_{(2)}(\omega^2, \chi_*, \varkappa_*, G_1) = \left[G_1(l_0 - 1) + \varkappa_*^{-1}G_2(s_0 + \chi_*)\right]\left(\varkappa_*^{-1}s_0 + l_0\right)^{-1},$$

где $\tau_0 = -D_*/2 + \sqrt{D_*^2/4 + \omega^2}$; $s_0 = -\chi_*/2 + \sqrt{\chi_*^2/4 + \omega^2}$.

С помощью уравнения (5.1) можно найти условие устойчивости относительно монотонных возмущений. Используя обозначения (5.4), это условие запишем в виде

$$(5.5)\qquad F_{(1)} - F_{(2)} - \gamma_0\omega^2 \begin{cases} < 0 & \text{(при всех } \omega) \text{ — устойчивость,} \\ > 0 & \text{(при некотором } \omega) \text{ — неустойчивость.} \end{cases}$$

Если величины l, τ, s и μ ($l_1, \tau_1, s_1 > 0$) удовлетворяют уравнениям (3.2), (5.2), а Z определяется формулой (5.3), то справедливо равенство

$$(5.6)\qquad \operatorname{sgn} Z_2 = \operatorname{sgn} s_2 = \operatorname{sgn} \mu_2.$$

Пусть $\gamma_0 = 0$. Докажем утверждение 3. Если

$$(5.7)\qquad \varkappa_* < 1, \quad m_0G_c < \varkappa_*(1 - \varkappa_*)^{-1}$$

или

$$(5.8)\qquad \varkappa_* > 1, \quad m_0G_c < 1,$$

то граница устойчивости определяется значением $\mu = 0$ (устойчивость процесса определяется условиями (5.5)).

Пусть выполняются условия (5.7). Утверждение следует из результатов последовательного рассмотрения нескольких случаев: а) $G_1 \geqslant m_0G_c$, $G_2 \geqslant m_0G_c$. Из (5.1) находим

$$(5.9)\qquad \mu_2 = -(G_1 - m_0G_c)l_2 - \varkappa_*^{-1}(G_2 - m_0G_c)s_2 - \gamma_0\omega^2\left(\varkappa_*^{-1}s_2 + l_2\right) - m_0G_cZ_2.$$

С учетом (3.5), (5.6) отсюда следует, что собственные значения μ вещественны; б) $G_2 > m_0G_c \geqslant G_1$. Преобразуем мнимую часть (5.1) к виду

$$(5.10)\qquad \mu_2(1 + G_1 - m_0G_c) = -(m_0G_c - G_1)(\mu_2 - l_2) - \varkappa_*^{-1}(G_2 - m_0G_c)s_2 - \gamma_0\omega^2\left(\varkappa_*^{-1}s_2 + l_2\right) - m_0G_cZ_2.$$

Так как $G_2 > m_0G_c$ и $\varkappa_* \leqslant 1$, то $1 + G_1 - m_0G_c > 0$. Из уравнения (5.10) с учетом (3.6), (5.6) следует вещественность всех собственных значений μ, для которых $\mu_1 \geqslant -\omega^2$; в) $G_1 < m_0G_c$, $G_2 < m_0G_c$. В этом случае $m_0G_c > \left(G_1 + \varkappa_*^{-1}G_2\right)\left(\varkappa_*^{-1} + 1\right)^{-1}$, и из (5.5) следует неустойчивость при $\omega \to \infty$; г) $G_1 > m_0G_c \geqslant G_2$. Эти неравенства несовместны, если $m_0G_c < \varkappa_*(1 - \varkappa_*)^{-1}$.

При выполнении условий (5.8) для доказательства утверждения нужно пересмотреть случаи «б» и «г». В случае «б» нужно перенести в уравнении (5.9) в левую часть выражение $m_0G_cl_0$ и заметить, что $\operatorname{sgn}(\mu_2 - m_0G_cl_2) = \operatorname{sgn}\mu_2$, если $\mu_1 \geqslant -\omega^2$ и $m_0G_c < 1$. Аналогично в случае «г» можно доказать вещественность всех собственных значений μ, если перенести в левую часть уравнения (5.9) член $m_0 G_c \varkappa_*^{-1} s_2$.

В утверждении доказана справедливость принципа смены устойчивости [7] при малых значениях градиента G_c, соответствующих малым значениям концентрации примеси $c_0 = c_\infty/k$ на невозмущенном фронте. При затвердевании германия его тепловые коэффициенты χ и $\varkappa$ уменьшаются. Для металлов типичной является ситуация $\varkappa_* < 1$, $\chi_* < 1$. Для сплава Pb — Sn $k = 0{,}3$, $\varkappa_* = 0{,}54$, условия (5.6) выполняются, если концентрация олова $c_0 \lesssim 3{,}3 \cdot 10^{-3}$, а для германия, легированного галием, $k = 0{,}1$, $\varkappa_* = 1{,}6$, и при $c_0 \lesssim 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ выполняются условия (5.8).

В термодиффузионной постановке задача об устойчивости плоского фронта кристаллизации рассматривалась в [1], где предполагалось, что

$$\omega^2 \gg \max(1/2,\ \chi_*/2). \tag{5.11}$$

Учитывая (5.11), авторы работы [1] пренебрегли конвективными членами в уравнениях теплопроводности и, исходя из стационарных уравнений для переноса тепла и примеси, получили критерий устойчивости ($\gamma_0 = 0$):

$$m_0 G_c\left(\varkappa_*^{-1} + 1\right) - G_1 - \varkappa_*^{-1} G_2 \begin{cases} < 0 \text{ — устойчивость,} \\ > 0 \text{ — неустойчивость.} \end{cases} \tag{5.12}$$

Если фронт кристаллизации неустойчив согласно критерию (5.12), то из (5.5) следует его неустойчивость при $\omega \to \infty$. Укажем четыре случая, в которых, исследуя поведение функций F_1 и F_2, удалось показать эквивалентность условий (5.5) и (5.12) (из устойчивости по критерию (5.12) следует устойчивость из условий (5.5)):

1) $\chi_* = 1, \quad \varkappa_* \leqslant 1$;
2) $1/3 \leqslant \chi_* < 1, \quad D_* > 1, \quad k \geqslant 1$;
3) $1/3 \leqslant \chi_* < 1, \quad 1/2 < k < 1, \quad D_* > (2k-1)^{-1}$;
4) $D_* \gg 1, \quad k^2 D_* \gg 1$.

Для металлов характерными являются значения $D_* \gtrsim 10^4$, и последнее условие можно считать выполненным при $k \gtrsim 10^{-1}$.

Заметим, что критерий (5.12) можно получить, если заменить дисперсионное соотношение (5.1) приближенным уравнением

$$\mu = -G_1 l_m - \varkappa_*^{-1} G_2 s_m + m_0 G_c\left(\varkappa_*^{-1} s_m + l_m\right) - m_0 G_c Z_m \tag{5.13}$$

и принять справедливость принципа смены устойчивости. В уравнении (5.13) $l_m = \sqrt{\omega^2 + \mu}$, $s_m = \sqrt{\omega^2 + \chi_* \mu}$ ($l_{m1}, s_{m1} > 0$), а Z_m получается из Z заменой s и l на s_m, l_m.

Справедливо утверждение: при $\varkappa_* \geqslant 1$, $\chi_* \geqslant 1$ и при $\varkappa_* < 1$, $\chi_* \leqslant 1$, $G_1 \geqslant G_2$ каждое решение μ уравнения (5.13) вещественно, а при $\varkappa_* < 1$, $G_1 < G_2$ граница устойчивости определяется значением $\mu = 0$.

Пусть $\rho_* \neq 1$, $D_* \neq 0$ (общий случай). Если в функции $F_{(2)}$ заменить параметр χ_* на $\rho_* \chi_*$, то условия устойчивости относительно монотонных возмущений будут по-прежнему определяться с помощью (5.5). Условия эквивалентности 1—4 остаются в силе, если заменить в них χ_* на $\rho_* \chi_*$.

Задача о малых возмущениях (2.2)—(2.4) не содержит ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$. Для абсолютно несжимаемых сред тяжесть не влияет на устойчивость фронта кристаллизации. Конвективная неустойчивость процесса кристаллизации изучалась в [8].

Автор благодарит В. В. Пухначева за постоянное внимание к работе.

Поступила 17 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Маллинз В., Секерка Р.** Устойчивость плоской поверхности раздела фаз при кристаллизации разбавленного бинарного сплава.— В кн.: Проблемы роста кристаллов. М.: Мир, 1964.

2. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973.
3. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
4. **Рубинштейн Л. И.** Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.
5. **Turland B. D., Peckover R. S.** The stability of planar melting fronts in two-phase thermal Stefan problems.— J. Inst. Maths. Applics, 1980, vol. 25, N 1.
6. **Sekerka R. F.** Morphological stability.— In: Crystal Growth: An Introduction. Amsterdam; North-Holland, 1973.
7. **Линь Цзя-цзяо.** Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
8. **Coriell S. R., Cordes M. R. et al.** Convective and interfacial instabilities during unidirectional solidification of a binary alloy.— J. of Crystal Growth, 1980, vol. 49, N 1.

УДК 621.384.6 : 537.82

ОСОБЕННОСТИ УВЛЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО КОНТУРА ДВИЖУЩИМСЯ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А. Д. Подольцев, В. Т. Чемерис

(*Киев*)

В настоящее время вопросы ускорения макрочастиц размером несколько миллиметров до скоростей 10^6—10^8 см/с представляют существенный интерес для физики высокотемпературной плазмы [1]. Так,одним из наиболее перспективных методов подпитки термоядерного реактора топливом считается вбрасывание в зону реакции с необходимой частотой таблеток термоядерного топлива. Одним из возможных методов получения термоядерного реактора с инерционным удержанием является импульсный нагрев при высокоскоростном соударении макрочастицы с мишенью, когда частица или мишень изготовлены из термоядерного вещества.

Приближенные оценки, приведенные в [1], показывают, что одним из возможных методов ускорения составной крупинки дейтерий — проводник или сверхпроводник является индукционное ускорение в магнитном поле при взаимодействии этого поля с наведенным на крупинке дипольным магнитным моментом. Элементарная оценка предельной скорости для диамагнитной частицы сферической формы дана в [1, 2].

В данной работе в рамках теории электрических цепей для движущихся контуров рассматриваются вопросы захвата и увлечения неподвижного проводящего тела, имеющего форму кольцевого контура, движущимся магнитным полем применительно к проблеме ускорения макрочастиц. Проведенные на простых расчетных моделях исследования позволяют выявить особенности процесса захвата проводника волной магнитного поля. Полученные количественные оценки применимы при рассмотрении ускорения идеально проводящего тела или же тела с конечной электропроводностью, размер которого в направлении диффузии магнитного поля меньше глубины проникновения поля (тонкий проводник).

Постановка задачи. Считая индукторную систему, создающую движущуюся волну магнитного поля, идеально распределенной, будем полагать, что по ее катушкам перемещается токовая зона. При независимости цепей питания катушек эту токовую зону в некотором приближении можно рассматривать как движущийся с постоянной скоростью $v_1 = \text{const}$ электропроводный контур *1* (фиг. 1) с начальным током i_{10}, встречающий на своем пути покоящийся контур *2*, т. е. ускоряемое тело. При сближении контуров в результате взаимодействия магнитного поля движущегося контура *1* с наведенным дипольным магнитным моментом контура *2* происходит увлечение последнего. Магнитную связь между контурами будем характеризовать коэффициентом связи $k(x) = M/\sqrt{L_1L_2}$, где x — расстояние между контурами, $M(x)$ — взаимная индуктивность, а L_1 и L_2 — соответственно индуктивность первого и второго контура. При $k \to 1$ контуры сближаются так, что потоки рассеяния между ними стремятся к нулю.

1. Рассмотрим первоначально случай, когда активные сопротивления обоих контуров пренебрежимо малы. Исходя из постоянства потокосцеплений, пронизывающих контуры, получим $\Psi_1 = L_1i_1 + Mi_2 = L_1i_{10}$, $\Psi_2 = L_2i_2 + Mi_1 = 0$, откуда $i_1 = i_{10}/[1 - k^2(x)]$. Тогда магнитная энергия системы двух контуров равна $W_{12} = W_{10}/[1 - k^2(x)]$, где $W_{10} = L_1i_{10}^2/2$ — начальная магнитная энергия первого контура. Запишем с учетом выражения для W_{12} уравнение баланса энергии двух