

АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В. М. Корнев, Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

Задача о собственных несимметричных колебаниях круговой конической оболочки с вершиной расчленяется на две, одна из которых определяет решение типа краевого эффекта, а другая — более медленно меняющееся решение. Указаны диапазоны длин волн, для которых данное расчленение является асимптотически точным при стремящейся к нулю толщине оболочки. Первое решение выписано в явном виде, второе получено численным методом для конической оболочки со свободным и с шарнирно опертым краем. Численное решение указывает на то, что система уравнений, описывающая медленно меняющуюся часть решения, имеет точки поворота достаточно сложной структуры.

1. Собственные колебания круговой конической оболочки из однородного изотропного упругого материала опишем системой двух дифференциальных уравнений В. З. Власова ([1], стр. 253, 368) относительно функции усилий $v(x, y, t)$ и прогиба $w(x, y, t)$ ($x \in [0, a]$ и $y \in [0, 2\pi]$ — меридиональная и окружная координаты на срединной поверхности, t — время). Известные выражения для продольных усилий N_1, S, N_2 и изгибных деформаций κ_1, τ, κ_2 через функции v, w представим в виде

$$\begin{aligned} N_1 &= -BR^{-2}(l^2 D_2^2 + q_1 D_1)v, \quad S = BR^{-2}l(D_1 - q_1)D_2 v, \\ N_2 &= -BR^{-2}D_1^2 v \\ \kappa_2 &= -R^{-2}(l^2 D_2^2 + q_1 D_1)w, \quad \tau = -R^{-2}l(D_1 - q_1)D_2 w, \quad \kappa_1 = -R^{-2}D_1^2 w \\ &\quad (B = CEh, \quad C = h / \sqrt{12(1 - \nu^2)}) \\ &\quad (l = l(x) = a/x, \quad q_1 = q_1(x) = 1/x, \quad a = 1 / \sin \theta), \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечного расширения материала, h — постоянная толщина, R — радиус основания оболочки, D_1 и D_2 — операторы однократного дифференцирования по координатам x и y соответственно, θ — угол наклона образующей конуса к оси вращения.

В вершине оболочки (при $x = 0$) потребуем ограниченности статических и геометрических характеристик деформации, определяемых выражениями (1.1), а на ее краю (при $x = a$) зададим следующие граничные условия (M_1 — меридиональный изгибающий момент, Q_1 — меридиональное поперечное усилие):

$$N_1 = 0, \quad S = 0, \quad M_1 = 0, \quad Q_1 = 0 \quad \text{или} \quad w = 0 \quad (1.2)$$

Одна из этих двух систем условий определяет свободный край (случай $Q_1 = 0$), другая — разновидность шарнирного опирания (случай $w = 0$).

Задача состоит в отыскании частных решений исходной системы, имеющих вид

$$\begin{aligned} v_n(x, y, t) &= \varphi_n(x) \psi_n(y, t), \quad w_n(x, y, t) = \chi_n(x) \psi_n(y, t), \\ \psi_n(y, t) &= \exp(iny + i\omega t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где n — целое число, ω — действительное число, $i = \sqrt{-1}$.

Подстановка выражений (1.3) в уравнения В. З. Власова приводит к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi_n(x)$ и $\chi_n(x)$

$$\begin{aligned} P_\mu \varphi_n + 2lD_1^2 \chi_n &= 0, & 2lD_1^2 \varphi_n - (P_\mu - \lambda) \chi_n &= 0 & (1.4) \\ (P_\mu = \mu^2 P_2^{(4)} - 2\mu \mu_n l^2 P_1^{(2)} + \mu_n^2 l^4, & P_2^{(4)} = Q^{(2)} Q^{(2)}, & P_1^{(2)} = 0.5(Q^{(2)} + l^{-2} Q^{(2)l^2}), \\ Q^{(2)} = D_1^2 + q_1 D_1, & \lambda = 2\omega_p R^2 / \mu^2 E \cos \theta, & \mu^2 = 2C / R \cos \theta, & \mu_n = \mu n^2) \end{aligned}$$

ρ — плотность материала, индекс в круглых скобках указывает порядок дифференциального оператора.

Уравнения (1.4) содержат регулярную особенность в нуле. Физический смысл имеют лишь те их решения, которые являются аналитическими в точке $x = 0$. Из (1.2) следуют граничные условия в точке $x = a$:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= 0, & D_1 \varphi_n &= 0, & G_1^{(2)} \chi_n &= 0, & \gamma \chi_n - (1 - \gamma) G_2^{(3)} \chi_n &= 0 & (1.5) \\ (G_1^{(2)} = D_1^2 + v q_1 D_1, & G_2^{(3)} = D_1 (\mu P^{(2)} - \mu_n^2 l^2) - \mu_n^2 l^2 (1 - v) (D_1 - q_1)) \end{aligned}$$

Здесь введен вспомогательный параметр γ , принимающий значения 0 и 1. В случаях $\gamma = 0$ имеем $Q_1 = 0$, т. е. свободный край, в противном случае $w = 0$, т. е. шарнирно опертый край.

Решение задачи о колебаниях рассматриваемой оболочки заключается в определении таких положительных собственных значений λ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) системы (1.4), которым соответствуют собственные функции φ_{nm} и χ_{nm} , удовлетворяющие требуемым условиям.

2. Область значений геометрического параметра μ ограничим условием $\mu^2 \ll 1$, исключив тем самым из рассмотрения весьма пологие оболочки. При этом величина μ_n^2 не будет обязательно малой, ибо число n может быть как угодно большим. Примем [2, 3], что

$$n = C_0 \mu^{-\alpha} \quad (\alpha \geq 0, C_0 \approx 1) \quad (2.1)$$

Система (1.4) состоит из уравнений с малым параметром при старших производных. При $\mu = 0$ она определяет некоторую вырожденную систему, несовпадающую, вообще говоря, с системой безмоментной теории. Для значений $\alpha > 1/2$ вырожденная система является тривиальной. Оставляя пока этот случай в стороне, ограничим значения параметра α из (2.1) условием

$$0 \leq \alpha \leq 1/2 \quad (2.2)$$

В этой области определим укороченную по отношению к (1.4) систему уравнений

$$\begin{aligned} P^{(2)} \varphi_n^\circ + 2lD_1^2 \chi_n^\circ &= 0, & 2lD_1^2 \varphi_n^\circ - (P^{(2)} - \lambda^\circ) \chi_n^\circ &= 0 & (2.3) \\ (P^{(2)} = -2\mu \mu_n l^2 P_1^{(2)} + \mu_n^2 l^4) \end{aligned}$$

которая отличается от вырожденной лишь членами, исчезающими при $\mu \rightarrow 0$. Однако благодаря этим членам она сохраняет ту же особенность и, следовательно, тот же характер решения в нуле, что и полная система (1.4).

Укороченная система (2.3) имеет четвертый порядок. Такой же порядок имеет и система безмоментной теории, которая следует из (2.3) при $P^{(2)} \equiv 0$. При переходе от (1.4) к (2.3) опущены старшие производные с малым параметром — те члены, которые порождают решения типа краевого эффекта.

Из результатов работы [4] следует, что на достаточном удалении от точки $x = a$ решение укороченной системы с погрешностью, не превышающей порядка μ^2 , определяет решение полной системы. В окрестности же точки $x = a$ различие может оказаться существенным, ввиду того что решение укороченной системы не обладает достаточным произволом для удовлетворения всех граничных условий. Возникающие невязки могут быть компенсированы за счет решений типа краевого эффекта.

Для выявления таких решений «заморозим» коэффициенты уравнений (1.4) в некоторой точке $x = \xi$ ($0 < \xi \leq a$) (см. [5]). В результате будем иметь систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$P_{\mu\xi}\varphi_n + 2l_\xi D_1^2 \chi_n = 0, \quad 2l_\xi D_1^2 \varphi_n - (P_{\mu\xi} - \lambda)\chi_n = 0$$

Вводя необходимое число раз дифференцируемую функцию $z_n(x)$, такую что

$$\varphi_n = -2l_\xi D_1^2 z_n, \quad \chi_n = P_{\mu\xi} z_n \quad (2.4)$$

сведем эту систему к одному дифференциальному уравнению восьмого порядка

$$Q_\xi(D_1)z_n = \lambda \mu_n^2 l^4 z_n \quad (2.5)$$

$$Q_\xi(D_1) = \mu^4 Q_{4\xi}^{(8)} - 4\mu^3 \mu_n l_\xi^2 Q_{3\xi}^{(6)} + (4l_\xi^2 + 6\mu^2 \mu_n^2 l_\xi^4 - \lambda \mu^2) Q_{2\xi}^{(4)} -$$

$$- 2\mu \mu_n l_\xi^2 (2\mu_n^2 l_\xi^4 - \lambda) Q_{1\xi}^{(2)} + \mu_n^4 l_\xi^8, \quad Q_{i\xi}^{(k)} = D_1^k + \sum_{j=0}^{k-1} q_{ij}(\xi) D_1^j$$

причем некоторые из коэффициентов q_{ij} могут зависеть от положительных степеней параметра μ .

Потребуем, чтобы на всем отрезке $0 \leq x \leq a$ выполнялось условие

$$q_2 \equiv 4l^2 + 6\mu^2 \mu_n^2 l^4 - \lambda \mu^2 \geq 0 \quad (1) \quad (2.6)$$

Тогда соответствующий $Q_\xi(D_1)$ вырожденный оператор будет иметь четвертый порядок при любом ξ из промежутка $0 < \xi \leq a$. Выполнение этого условия обеспечим за счет следующего ограничения величины параметра λ [6]:

$$\lambda = O(\mu^{-\beta}), \quad \beta < 2 \quad (2.7)$$

Характеристическое уравнение $Q_\xi(s) = 0$ имеет восемь корней:

$$s_k(\xi, \lambda, \mu) \text{ и } s_{k+4}(\xi, \lambda, \mu) = \mu^{-1} r_k(\xi, \lambda, \mu) \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

причем s_k и r_k являются аналитическими функциями параметра μ , (см. лемму 1 из [5]). С погрешностью, не превышающей порядка μ , значения r_k определяются из алгебраического уравнения

$$r_k^4 + q_2(\xi) = 0$$

В силу (2.6) имеем $|\operatorname{Re}\{r_k\}| \geq O(1)$, так что это уравнение определяет (для данного ξ) четыре попарно сопряженных комплексных числа. Два из них имеют отрицательные действительные части, а два — положительные. Поэтому вырождение оператора $Q_\xi(D_1)$ в оператор четвертого порядка является регулярным (в смысле [5]) для любого ξ из промежутка $0 < \xi \leq a$.

Каждому из значений r_k соответствует частное решение

$$z_{k\xi}(x) = \exp(\mu^{-1} r_k(\xi) x)$$

уравнения (2.5). С помощью формул (2.4) через него определяется и частное решение исходной системы (1.4) в окрестности точки $x = \xi$. Пусть r_1 и r_2 имеют положительную действительную часть, а r_3 и r_4 — отрицательную. При $\xi = a$ корням $\mu^{-1}r_1$ и $\mu^{-1}r_2$ соответствуют убывающие от края решения, а корням $\mu^{-1}r_3$ и $\mu^{-1}r_4$ — растущие. Следовательно, лишь первые два решения имеют характер краевого эффекта. Поэтому общее решение типа краевого эффекта в окрестности точки $x = a$ имеет вид

$$z_{na} = \sum_{k=1}^2 C_k \exp(\mu^{-1}r_k(a)(x-a))$$

Соответствующие ему функции

$$\varphi_n^I = -2D_1^2 z_{na}, \quad \chi_n^I = P_{\mu a} z_{na} \quad (2.8)$$

описывают быстро изменяющуюся часть решения системы (1.4).

Согласно теореме об асимптотическом представлении [4] имеем

$$\lambda_m = \lambda_m^\circ + \mu \delta_m, \quad \varphi_{nm} = \varphi_{nm}^\circ + \varphi_{nm}^I + \mu \zeta_{nm}, \quad \chi_{nm} = \chi_{nm}^\circ + \chi_{nm}^I + \mu \eta_{nm} \quad (2.9)$$

если только функции $\varphi_{nm}^\circ + \varphi_{nm}^I$ и $\chi_{nm}^\circ + \chi_{nm}^I$ удовлетворяют граничным условиям (1.5) (λ_m° — простое собственное значение укороченной системы, φ_{nm}° и χ_{nm}° — ее собственные функции, φ_{nm}^I и χ_{nm}^I — отвечающие значению $\lambda = \lambda_m^\circ$ решения типа краевого эффекта, норма величин δ_m , ζ_{nm} , η_{nm} не превышает по порядку нормы впереди стоящих членов соответствующих выражений). Возможность удовлетворения всех граничных условий имеется, так как эти функции содержат четыре произвольных постоянных: две дает решение системы (2.3), подчиненное условиям аналитичности в нуле, и две — решение (2.8).

Попытаемся теперь расчленить четыре условия (1.5) на две такие пары, которые, будучи порознь отнесены к укороченной системе (2.3) и уравнению краевых эффектов (2.5), позволят последовательно определить их решения, ненарушающие асимптотического представления (2.9).

Для выделения тех условий, которым следует подчинить общее решение типа краевого эффекта, осуществим в (1.5) подстановку (2.4). Тогда граничные условия в точке $x = a$ примут вид

$$A_1 z_n = 0, \quad A_2 z_n = 0, \quad A_3 z_n = 0, \quad A_4(\gamma) z_n = 0 \quad (\gamma = 0, 1) \quad (2.10)$$

$$(A_1 = D_1^2, \quad A_2 = D_1^3, \quad A_3 = G_1^{(2)} P_{\mu a}^{(4)}, \quad A_4(\gamma) = [\gamma - (1 - \gamma) G_2^{(3)}] P_{\mu a}^{(4)})$$

Так как коэффициенты двух последних из граничных операторов зависят от малого параметра μ , то воспользуемся модификацией [3] известного правила расчленения граничных условий [4, 7].

Если граничные условия имеют вид

$$A_i^{(k)} z \equiv \sum_{j=0}^k a_{ij} D_1^j z = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (2.11)$$

причем $a_{ij} = O(\mu^{x_{ij}})$, то прежде всего следует добиться того, чтобы они не содержали малый параметр в отрицательной степени и чтобы этот параметр не был общим множителем какого-либо из условий. Иначе говоря, условия (2.11) следует заменить на

$$\mu^{-x_i} A_i^{(k)} z = 0, \quad \alpha_i = \inf_j (x_{ij}) \quad (2.12)$$

Затем надо определить характеристический показатель β_{ij} каждого члена (2.12) по формуле

$$\beta_{ij} = j + \alpha_i - \alpha_{ij}$$

Граничные условия имеют канонический вид, если каждое из них разрешено относительно члена с наибольшим характеристическим показателем $\beta_i = \sup_j (\beta_{ij})$ и если все они расположены в порядке строгого возрастания своих наибольших показателей. После того как канонический вид граничных условия установлен, их расчленение производится по правилу: к уравнению краевых эффектов относится столько последних граничных условий, сколько частных решений типа краевого эффекта имеет оно в данной граничной точке. Оставшиеся граничные условия относятся к уравнениям, описывающим медленно меняющуюся часть решения.

Вернемся непосредственно к условиям (2.10). Полагая, что

$$vq_1(a) = v \sin \theta = O(\mu^{\alpha_0})$$

определим их наибольшие характеристические показатели

$$\beta_1 = 2, \beta_2 = 3, \beta_3 = \inf_{(\alpha, \alpha_0)} (6 - 2\alpha, 6 - 4\alpha + \alpha_0), \beta_4 = \begin{cases} 7 - 6\alpha & \text{при } \gamma = 0 \\ 4 - 4\alpha & \text{при } \gamma = 1 \end{cases}$$

Для значений α из (2.2) имеем

$$\beta_3 \geq 4, \beta_4 \geq \{4 \text{ при } \gamma = 0, 2 \text{ при } \gamma = 1\}$$

Так как в случае $\gamma = 0$ (свободный край) характеристические показатели β_3 и β_4 всегда больше, чем β_1 и β_2 , то последние два из условий (1.5) следует отнести к уравнению (2.5) или к его решению в точке $x = a$ (2.8), а первые два — к системе (2.3). В случае $\gamma = 1$ (шарнирно опертый край) дело обстоит немного сложнее. При $0 \leq \alpha < 1/4$ расчленение граничных условий то же самое, что и в случае $\gamma = 0$, тогда как при $1/4 < \alpha < 1/2$ характеристические показатели β_2 и β_3 больше, чем β_1 и β_4 , поэтому к (2.5) следует отнести второе и третье из условий (1.5), а к (2.3) — первое и четвертое.

Теперь может быть дана окончательная формулировка расчлененных задач. Выписывая граничные условия для укороченной системы, заменим в соответствующих условиях (1.5) φ_n на φ_n° и χ_n на χ_n° . Значит, в точке $x = a$

$$\varphi_n^\circ = 0, D_1\varphi_n^\circ = 0 \text{ при } \gamma = 0, 0 \leq \alpha < 1/2 \text{ и при } \gamma = 1, 0 \leq \alpha < 1/4 \quad (2.13)$$

$$\varphi_n^\circ = 0, \chi_n^\circ = 0 \text{ при } \gamma = 1, 1/4 < \alpha < 1/2 \quad (2.14)$$

(в нуле, как и прежде, требуем аналитичности функций φ_n° и χ_n°). Граничные условия для решения типа краевого эффекта (2.8) получим из соответствующих условий (1.5) путем замены φ_n на $\varphi_n^\circ + \varphi_n^I$ и χ_n на $\chi_n^\circ + \chi_n^I$. В результате будем иметь в точке $x = a$

$$G_1^{(2)}\chi_n^I = -G_1^{(2)}\chi_n^\circ, G_2^{(3)}\chi_n^I = -G_2^{(3)}\chi_n^\circ \begin{cases} \text{при } \gamma = 0, 0 \leq \alpha < 1/2 \text{ и} \\ \text{при } \gamma = 1, 0 \leq \alpha < 1/4 \end{cases} \quad (2.15)$$

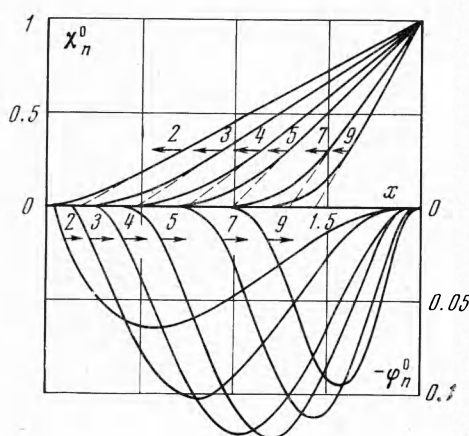
$$D_1\varphi_n^I = -D_1\varphi_n^\circ, G_1^{(2)}\chi_n^I = -G_1^{(2)}\chi_n^\circ \text{ при } \gamma = 1, 1/4 < \alpha < 1/2 \quad (2.16)$$

Из асимптотического представления (2.9) следует, что при выполнении условий (1.5) значения λ_m° и функции $\varphi_{mn}^\circ + \varphi_{nm}^I, \chi_{nm}^\circ + \chi_{mn}^I$ опреде-

ляют собственные значения и собственные функции полной задачи с погрешностью, не превышающей порядка μ . Если же потребовать, чтобы эта погрешность лишь исчезала вместе с μ , т. е. иметь в виду только асимптотику полной задачи, то область значений параметра α может быть расширена до пределов $0 \leq \alpha < 1$. Характеристическое уравнение $Q_\xi(s) = 0$ имеет во всей этой области четыре корня вида $\mu^{-1}r_k$ и четыре корня меньшего порядка. В точке $x = a$ первым корням соответствуют два частных решения типа краевого эффекта. Следовательно, условия, позволяющие расчленив исходную систему уравнений, выполнены. Вопрос о расчленении граничных условий решается, как и выше, путем определения их характеристических показателей. Так как теперь

$$\beta_3 > 2, \beta_4 > (1 \text{ при } \gamma = 0, 0 \text{ при } \gamma = 1)$$

то в числе граничных условий для системы (2.3) может оказаться любое из условий (2.10), а значит, любое из условий (1.5).



Фиг. 1

3. Наличие у системы (1.4) решений, не только быстро убывающих, но и быстро растущих от края, вызывает серьезные трудности при ее численном интегрировании. Такого рода трудности возникают во многих краевых задачах теории оболочек. Для борьбы с ними в некоторых работах применяются специальные методы. Так, в [8] с этой целью использован метод подавления быстро растущих решений, в [9] — модифицированный метод прогонки, в [10] — метод ортогонализации. Однако все эти методы позволяют в большей или меньшей степени расширить область допустимых значений параметра μ , теряя свою эффек-

тивность при достаточно малых его значениях.

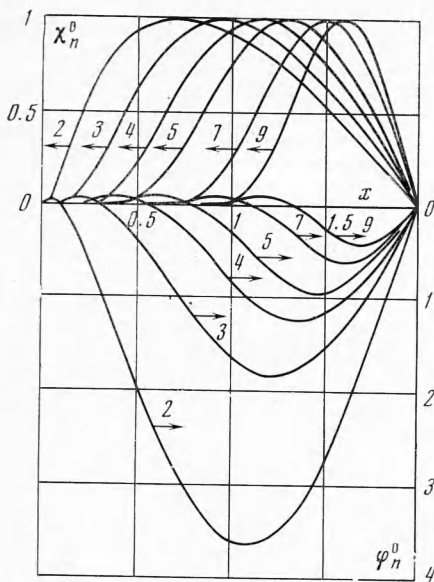
В противоположность им асимптотический метод тем эффективнее, чем меньше μ . Неблагоприятные для разностной аппроксимации быстро меняющиеся решения он выделяет в явной форме, а применение численных методов к решению укороченной (вырожденной) задачи не вызывает затруднений, ибо ее решения являются более плавными. К тому же порядок укороченной системы уравнений вдвое ниже, чем порядок исходной.

Для иллюстрации высказанных утверждений о характере решения укороченной задачи приведем результаты численного интегрирования системы (2.3) при условиях (2.13) и (2.14) в точке $x = a$ и условиях $\varphi_n^0 = \chi_n^0 = 0$ в точке $x = 0$. Результаты получены методом прогонки [11]. В качестве объекта для расчета была взята коническая оболочка с геометрическими параметрами: $\theta = \pi / 6$ (т. е. $a = 2$), $\mu^2 = 1 / 200$.

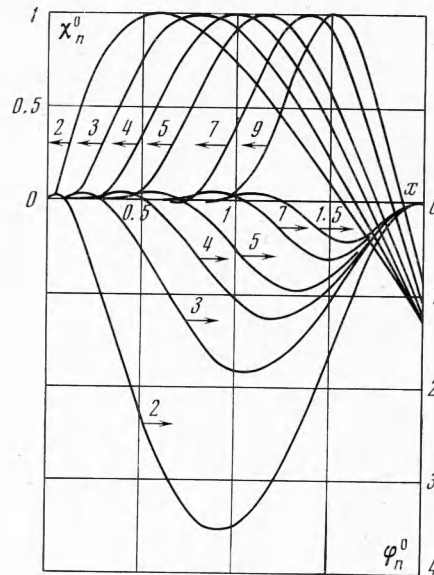
Вычисленные с точностью до третьей значащей цифры (для этого потребовалось не более 50 шагов по координате) собственные значения параметра частоты λ^0 приведены в ниже:

n	2	3	4	5	7	9
λ_1^0	0.22	0.66	1.50	2.94	8.70	20.6
λ_1^0	23.3	15.5	15.3	18.3	30.9	55.0
λ_2^0	37.8	24.5	23.3	26.3	40.7	67.8

В первой строке указаны значения параметра волнообразования n , для которого производились вычисления. Вторая и третья строки дают первые собственные значения укороченной задачи с краевыми условиями (2.13) и (2.14) соответственно. В четвертой строке приведены вторые собственные значения, соответствующие краевым условиям (2.13). Все приведенные собственные значения удовлетворяют условию $\beta < 2$. При изменении n от 2 до 9 параметр α меняется в пределах $0.25 \lesssim \alpha \lesssim 0.65$. Для оболочки со свободным краем ($\gamma = 0$) во всем этом диапазоне граничные условия, соответствующие укороченной системе, имеют вид (2.13). Поэтому все числа,



Фиг. 2



Фиг. 3

приведенные во второй строке, можно понимать как приближенные собственные значения полной задачи при $\gamma = 0$. Для оболочки с шарнирно опертым краем ($\gamma = 1$) граничные условия имеют вид (2.14) в области $0.25 < \alpha \lesssim 0.65$. При $\alpha \approx 0.25$ укороченная задача не дает асимптотики полной ни при условиях (2.13), ни при (2.14). Этому значению α соответствует $n = 2$. Следовательно, приближенными собственными значениями полной задачи в случае $\gamma = 1$ являются те числа третьей строки, которые отвечают значениям $n \geq 3$.

На фиг. 1—3 дано графическое изображение собственных функций, соответствующих приведенным в таблице собственным значениям. При этом кривые фиг. 1 отвечают второй строке, фиг. 2 — третьей, фиг. 3 — четвертой. Стрелки указывают в сторону той шкалы, по которой следует отсчитывать ординаты точек той или иной кривой, цифры над стрелками — значения параметра n .

Характерной особенностью всех изображенных кривых является наличие у них точек поворота, т. е. таких точек, по разные стороны от которых асимптотическое представление функций φ_n^0 и χ_n^0 различно. Например, функции χ_n^0 , изображенные на фиг. 1, при движении от точки поворота влево имеют экспоненциально затухающий характер, а при движении от нее вправо растут линейно относительно x ; сами точки поворота приближенно определяются пересечением штриховых линий с осью абсцисс. Точки поворота функций φ_n^0 на фиг. 1 и функций φ_n^0 , χ_n^0 на фиг. 2, 3 отде-

ляют ветви экспоненциального вида от ветвей колебательного вида. С ростом параметра n точки поворота обеих функций смещаются к краю $x = a$, причем решение все более локализуется в его окрестности.

Поступила 21 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в В. З. Избранные труды, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Усп. матем. н., 1960, т. 15, вып. 5.
3. К о р н е в В. М. К формулировке граничных условий упрощенных уравнений оболочек вращения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
4. W a s o w W. On the asymptotic solutions of boundary value problems for ordinary differential equations containing a parameter. J. Math. and Phys., 1944, vol. 23, No. 3.
5. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.
6. А л у м я э Н. А. Асимптотическое интегрирование уравнений статической устойчивости конической оболочки вращения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
7. M o s e r J. Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equations of even order. Commun Pure and Appl. Math., 1955, vol. 8, No. 2.
8. З а р г а м и, Р о б и н з о н. Численный метод расчета свободных колебаний сферических оболочек. Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 7.
9. П ш е н и ч н о в Г. И. Свободные осесимметричные колебания тонких упругих оболочек вращения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 5.
10. Г р и г о л ю к Э. И., М а л ь ц е в В. П., М я ч е н к о в В. И., Ф р о л о в А. Н. Об одном методе решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1.
11. Ш к у т и н Л. И. Определение критической величины давления для пологих конических оболочек. В кн. «Труды 6-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок», Баку, 1966; М., «Наука», 1966.