

образом. В конечном итоге из-за процесса образования агрегатов первоначальная система разбивается на несколько подсистем, в каждой из которых прослеживается тенденция дальнейшего укрупнения частиц. Число подсистем и количество частиц в них к некоторому фиксированному моменту времени для рассмотренных систем зависят от начальной конфигурации расположения частиц в цепочке.

Полученные результаты, особенно связанные с возможностью образования агрегатов частиц в неизотермической аэродисперсной системе, могут быть использованы при проведении конкретных расчетов, связанных с динамикой таких систем, а также при разработке и конструировании устройств для улавливания аэрозольных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Epstein P. S. Zur Theorie des Radiometers // Z. Physik.— 1929.— Bd 54, N 7—8.
2. Гайдуков М. Н., Мелехов А. П. Поведение цепочки крупных сферических частиц в неоднородно нагретом газе // ИФЖ.— 1984.— Т. 47, № 1.
3. Яламов Ю. И., Мелехов А. П., Гайдуков М. Н. Термофорез гидродинамически взаимодействующих аэрозольных частиц // ДАН СССР.— 1986.— Т. 287, № 2.
4. Яламов Ю. И., Галоян В. С. Динамика капель в неоднородных вязких средах.— Ереван: Луйс, 1985.
5. Яламов Ю. И., Юшканов А. А., Подоскин А. Б. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // ДАН СССР.— 1980.— Т. 254, № 2.
6. Ламб Г. Гидродинамика.— М.; Л.: Техиздат, 1947.
7. Brenner H. The Stokes resistance of a slightly deformed sphere // Chem. Engng Sci.— 1964.— V. 19, N 8.
8. Морс Ф. М., Фешбах Г. Ф. Методы теоретической физики.— М.: ИЛ, 1960.— Т. 2.
9. Захаров А. Ю., Турчанинов В. И. STIFF-программа для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений (адаптация для ЭВМ БЭСМ-6).— М.: МГУ, 1977.

г. Ереван

Поступила 11/XI 1987 г.,
в окончательном варианте — 23/VI 1989 г.

УДК 536.25

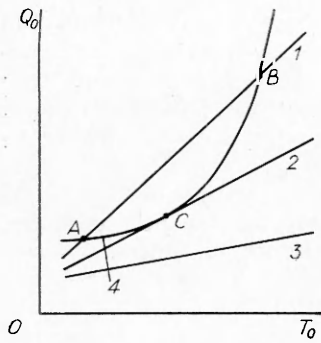
А. Ю. Гилев, А. А. Непомнящий, И. Б. Симановский

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ С ЗАВИСЯЩИМ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

Известно, что термокапиллярная неустойчивость равновесия в системе с границей раздела может иметь как монотонный, так и колебательный характер [1—4]. Существенное влияние на устойчивость системы оказывает присутствие источников и стоков тепла на поверхности раздела, которое может быть обусловлено химической реакцией, испарением, поглощением излучения и т. д. Задача об устойчивости равновесия в условиях поверхностного тепловыделения относительно монотонных возмущений решена в [5]. В [6] исследована устойчивость равновесия двухслойной системы по отношению к монотонным и колебательным возмущениям при наличии не зависящего от температуры тепловыделения на границе раздела.

В настоящей работе данная задача решается с учетом зависимости поверхностного тепловыделения от температуры. Показано, что в некоторых случаях эта зависимость может приводить к расширению области колебательной неустойчивости.

1. Пусть пространство между двумя твердыми горизонтальными пластинами $y = a_1$ и $y = -a_2$, на которых поддерживаются температуры соответственно T_1 и T_2 , заполнено двумя слоями вязких несмешивающихся жидкостей. Ось x направлена горизонтально, y — вертикально вверх. Полагаем, что термокапиллярная конвекция осуществляется при наличии силы тяжести, это позволяет считать границу раздела плоской и недеформируемой ($y = 0$). Тем не менее влияние архимедовой подъемной силы на конвекцию предполагается пренебрежимо малым по сравнению с термокапиллярным эффектом, что наблюдается для тонких пленок жидкости. Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности, температуропроводности равны $\eta_m, \nu_m, \kappa_m, \chi_m$ ($m = 1$ для верхней



Р и с. 1

жидкости, $m = 2$ — для нижней). Коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0 - \alpha T$.

Предположим, что на границе раздела сред задано поверхностное тепловыделение Q_T , определяемое температурой границы T_0 (это имеет место, например, в случае гетерогенной химической реакции). Типичная зависимость тепловыделения от температуры (при гетерогенной химической реакции) изображена на рис. 1 (линия 4). В условиях механического равновесия тепловыделение Q_0 и вертикальные градиенты температуры A_m ($m = 1, 2$) рассчитываются из условия теплового баланса $-\kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_2 = Q_0$

(количество тепла, продуцируемое на границе раздела жидкостей, должно быть равно количеству тепла, отводимому к твердым границам системы) и соотношения $A_1 a_1 + A_2 a_2 = -s\theta$ ($s = 1$ при подогреве снизу, $s = -1$ при нагреве сверху); $\theta = |T_1 - T_2|$. Находим, что $A_1 = -(s\theta\kappa_2 + Q_0 a_2)/(a_1\kappa_2 + a_2\kappa_1)$, $A_2 = -(s\theta\kappa_1 - Q_0 a_1)/(a_1\kappa_2 + a_2\kappa_1)$. Равновесные значения температуры границы T_0 и тепловыделения Q_0 определяются из системы уравнений

$$(1.1) \quad T_0 = \frac{T_1 \kappa_1 a_2 + T_2 \kappa_2 a_1 + Q_0 a_1 a_2}{a_1 \kappa_2 + a_2 \kappa_1};$$

$$(1.2) \quad Q_0 = Q_T(T_0).$$

На рис. 1 показаны различные возможности взаимного расположения графиков зависимости (1.1) (линии 1—3) и (1.2) (линия 4). Видно, что система может иметь два решения (если теплопроводности сред достаточно велики), единственное решение (в критическом случае) или не иметь решений (при недостаточном теплоотводе). В дальнейшем предполагаем, что хотя бы одно решение системы (1.1), (1.2) существует.

Введем обозначения: $\eta = \eta_1/\eta_2$, $\nu = \nu_1/\nu_2$, $\kappa = \kappa_1/\kappa_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$, $a = a_2/a_1$. В качестве единиц длины, времени, функции тока и температуры выберем соответственно a_1 , a_1^2/ν_1 , ν_1 и θ . Безразмерный градиент температуры в равновесии равен $A_1 = -(s + Q a \kappa)/(1 + \kappa a)$ в верхней жидкости и $A_2 = -\kappa(s - Q)/(1 + \kappa a)$ — в нижней, где $Q = Q_0 a_1/\theta \kappa_1$.

Наложим на состояние равновесия возмущения функции тока ψ'_m и температуры T'_m :

$$(\psi'_1, T'_1, \psi'_2, T'_2) = (\psi_1(y), T_1(y), \psi_2(y), T_2(y)) \exp [ikx - (\lambda + i\omega)t]$$

(k — волновое число, $\lambda + i\omega$ — комплексный декремент).

Линеаризованные уравнения для возмущений функции тока и температуры имеют вид [4]

$$(1.3) \quad (\lambda + i\omega) D \psi_m = -d_m D^2 \psi_m, \\ -(\lambda + i\omega) T_m - ik \psi_m A_m = (e_m / \text{Pr}) D T_m,$$

где $D = d^2/dy^2 - k^2$; $b_1 = e_1 = 1$; $d_2 = 1/\nu$; $e_2 = 1/\chi$; $\text{Pr} = \nu_1/\chi_1$ — число Прандтля.

Обозначая дифференцирование по y штрихом, запишем условия на твердых границах

$$(1.4) \quad y = 1: \psi_1 = \psi'_1 = T_1 = 0, \quad y = -a: \psi_2 = \psi'_2 = T_2 = 0$$

и на границе раздела

$$(1.5) \quad y = 0: \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi'_1 = \psi'_2, \quad T_1 = T_2, \quad \kappa T'_1 = T'_2 - Q_T T_1, \\ \eta \psi''_1 - ik \text{Mr} T_1 = \psi''_2, \quad \text{Mr} = \alpha \theta a_1 / (\eta_2 \nu_1), \quad Q_T = (dQ_T/dT_0) a_1 \kappa_2^{-1}.$$

Граница устойчивости равновесия определяется условием $\lambda = 0$. В рас-

сма триваемом приближении в уравнениях для возмущений функции тока отброшены слагаемые $ikGb_m T_m$, описывающие архимедову подъемную силу ($G = \frac{\rho_1 \alpha_m \beta_1^3}{\nu_1^2} -$ число Грасгофа, $b_1 = 1$, $b_2 = \beta_2/\beta_1$, β_m — коэффициент теплового расширения m -й жидкости) [7]. Если плотности и коэффициенты теплового расширения обеих сред не слишком различаются между собой, для оценки условия применимости данного приближения естественно использовать критерий, известный для конвекции в однослойной системе [8]:

$$(1.6) \quad a_m \ll a_c, \quad a_c \sim \min_m (\alpha/g\rho_m\beta_m)^{1/2}.$$

При анализе влияния поверхностного тепловыделения на возникновение термокапиллярной неустойчивости равновесия удобно ввести параметр $Mg_Q = MgQ = \alpha Q_0 a_1^2 / (\eta_2 \nu_1 \kappa_1)$, который в отличие от Q не зависит от θ и остается постоянным при изменении разности температур между верхней и нижней границами системы. Различным значениям Mg_Q отвечает разная интенсивность тепловыделения на границе раздела.

2. Краевая задача (1.1)–(1.5) для монотонной неустойчивости ($\lambda = \omega = 0$) допускает аналитическое решение [5]. Выражение для критического значения Mg_Q имеет вид

$$(2.1) \quad Mg_Q = \frac{s Mg(\chi C_2 - C_1) - 8(1 + \kappa a)(\kappa Pr)^{-1} k [k(\kappa D_1 + D_2) - Q_T](\eta B_1 + B_2)}{\chi C_2 + \kappa a C_1}.$$

Здесь $B_1 = (s_1 c_1 - k)/(s_1^2 - k^2)$; $B_2 = (s_2 c_2 - \kappa a)/(s_2^2 - k^2 a^2)$;
 $C_1 = (s_1^3 - k^3 c_1)/[s_1(s_1^2 - k^2)]$; $C_2 = (s_2^3 - k^3 a^3 c_2)/(s_2^2 - k^2 a^2)$;
 $D_1 = c_1/s_1$; $D_2 = c_2/s_2$, $s_1 = \text{sh } k$; $s_2 = \text{sh } \kappa a$; $c_1 = \text{ch } k$; $c_2 = \text{ch } \kappa a$.

Равновесие устойчиво при $Mg_Q > Mg_{Q*}$, где $Mg_{Q*} = \max Mg_Q(k)$. Это означает, что тепловыделение оказывает на неустойчивость стабилизирующее влияние, а теплопоглощение — дестабилизирующее [5, 6]. Из выражения (2.1) видно, что увеличение Q_T приводит к повышению $Mg_Q(k)$ (дестабилизация), а уменьшение Q_T — к понижению $Mg_Q(k)$ (стабилизация).

Сама постановка задачи о возникновении термокапиллярной конвекции имеет смысл только в области

$$(2.2) \quad Q_T < Q_{T*} = \kappa + 1/a,$$

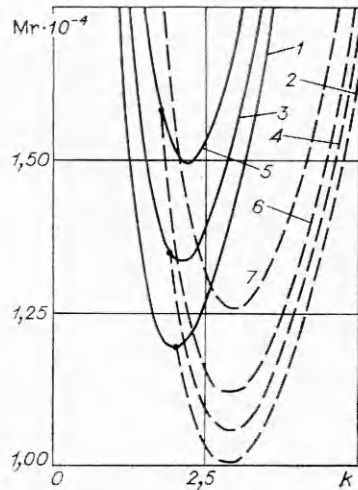
в которой нейтральная кривая (2.1) обладает экстремумом. Нетрудно убедиться в том, что условие (2.2) выполнено для равновесия, которому соответствует точка A на рис. 1, и не выполнено для точки B . Для точки C справедливо равенство $Q_T = Q_{T*}$. В области $Q_T > Q_{T*}$ для любых значений Mg наблюдается неустойчивость равновесия по отношению к пространственно-однородным ($k = 0$) и длинноволновым (малые k) возмущениям, обусловленная явлением теплового взрыва [5].

Рассмотрим особый случай $\chi = 1$, $a = 1$, для которого в отсутствие источников и стоков тепла монотонная неустойчивость не наблюдается. При наличии теплопоглощения монотонная нейтральная кривая имеет вид

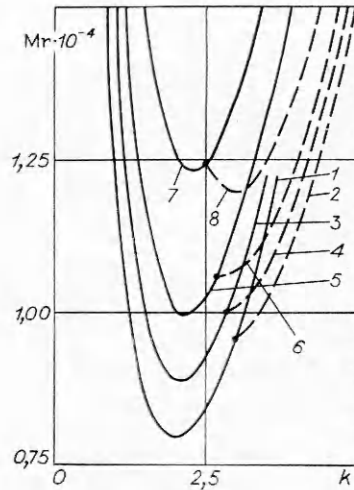
$$(2.3) \quad Mg_Q(k) = - \frac{8(1 + \kappa)(1 + \eta)k [k(\kappa + 1)c_1 - Q_T s_1](s_1 c_1 - k)}{\kappa Pr (s_1^3 - k^3 c_1)}$$

и не зависит от параметра Mg .

Для получения границ колебательной неустойчивости задачу необходимо решать численно. Рассмотрим систему с параметрами $\eta = \nu = 0,5$, $\kappa = \chi = Pr = a = 1$. Ограничимся случаем подогрева снизу. Монотонная неустойчивость реализуется при $Mg_Q < Mg_{Q*} < 0$, где Mg_{Q*} — экстремум выражения (2.3). При $Mg_Q > Mg_{Q*}$ колебательная неустойчивость является единственным возможным механизмом неустойчивости равновесия. На рис. 2 приведены нейтральные кривые при $Q = -0.02$: $Q_T = 0$ (линии 1, 2), $-0,5$ (3, 4), $-1,1$ (5, 6), $-2,4$ (линия 7). Здесь и в



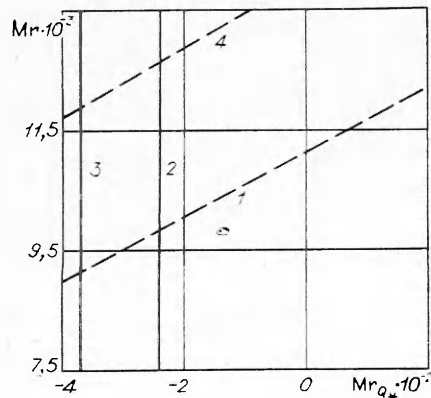
Р и с. 2



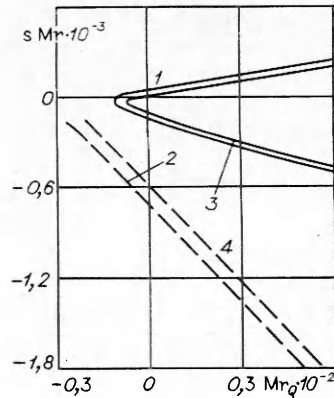
Р и с. 3

дальнейшем монотонные нейтральные кривые показаны сплошными линиями, а колебательные — штриховыми. На рис. 3 нейтральные кривые построены при $Q = -0,03$: $Q_T = 0$ (линии 1, 2), $-0,5$ (3, 4), $-1,1$ (5, 6), $-2,4$ (7, 8). Из рис. 2, 3 видно, что с увеличением параметра $|Q_T|$ ($Q_T < 0$) стабилизируются и монотонная и колебательная моды неустойчивости. Границы области устойчивости, полученные посредством определения экстремумов нейтральных кривых для монотонных и колебательных возмущений, показаны на рис. 4 ($Q_T = 0$ (линии 1, 2), $-2,4$ (3, 4)). С ростом $|Q_T|$ область колебательной неустойчивости расширяется вследствие понижения значения Mr_{Q*} , соответствующего порогу монотонной неустойчивости.

Рассмотрим теперь систему реальных жидкостей трансформаторное масло — муравьиная кислота со следующим набором физических параметров: $\eta_1 = 0,0198$ Н·с/м², $\nu_1 = 0,225 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\kappa_1 = 0,111$ Вт/(м·К), $\chi_1 = 0,736 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\eta_2 = 0,178 \cdot 10^{-2}$ Н·с/м², $\nu_2 = 0,146 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $\kappa_2 = 0,271$ Вт/(м·К), $\chi_2 = 1,03 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\beta_1 = 0,692 \cdot 10^{-3}$ 1/К, $\beta_2 = 1,03 \cdot 10^{-3}$ 1/К. Безразмерные параметры для этой системы равны: $\eta = 11,1$, $\nu = 15,4$, $\kappa = 0,41$, $\chi = 0,714$, $Pr = 306$. Заметим, что толщины слоев, для которых нарушается используемое приближение, согласно (1.6), составляют (полагаем $\alpha \sim 0,1 \cdot 10^{-3}$ Н/(м·К)) $a_c \sim 4$ мм. Обсудим случай $a = 1,667$. Порог теплового взрыва для этой системы достигается при $Q_T = Q_{T*} = 1,01$. На рис. 5 представлены границы областей устойчивости по отношению к монотонным и колебательным возмущениям для $Q_T = 0$ (линии 1, 2), $1,01$ (3, 4); соответствующий тип не-

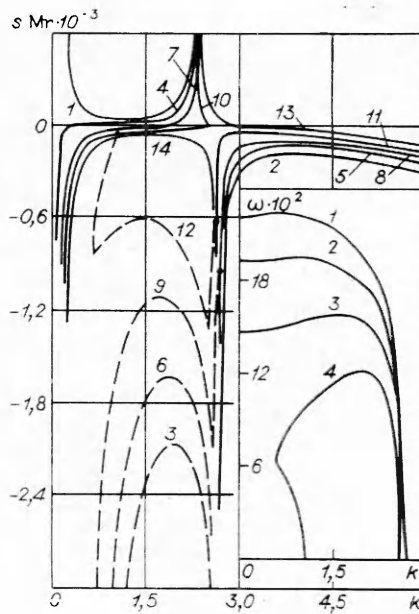


Р и с. 4



Р и с. 5

устойчивости реализуется в области, лежащей левее изображенных на рисунке границ. Видно, что увеличение Q_T приводит к дестабилизации равновесия по отношению к обеим модам неустойчивости, однако монотонная неустойчивость остается наиболее опасной. При $Q_T > Q_{T*}$ равновесие неустойчиво по отношению к монотонно нарастающим длинноволновым возмущениям для любых sMg , Mg_Q . Изменение формы нейтральных кривых при $Q = 0,03$ ($Q_T = 0$ (линии 1–3), 1,1 (4–6), 2,4 (7–9), 3,6 (10–12), 4,8 (13, 14)) и зависимости частоты колебаний от волнового числа при $Q_T = 0$; 1,1; 2,4; 3,6 (линии 1–4) в области теплового взрыва показаны на рис. 6. В этой области длинноволновые возмущения ($k \rightarrow 0$) всегда нарастают, для конечных k область затухания возмущений при не слишком больших Q_T имеет сложную форму. При достаточно больших Q_T колебательная мода неустойчивости исчезает и область затухания возмущений принимает вид $k > k_*$; граничное волновое число k_* с ростом Mg уменьшается при $s > 0$ (подогрев снизу) и увеличивается при $s < 0$ (нагрев сверху).



Р и с. 6

Таким образом, зависимость поверхностного тепловыделения от температуры оказывает существенное влияние на монотонную и колебательную моды термокапиллярной неустойчивости, причем увеличение тепловыделения с ростом температуры ($Q_T > 0$) оказывает дестабилизирующее, а уменьшение ($Q_T < 0$) — стабилизирующее воздействие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sternling C. V., Scriven L. E. Interfacial turbulence: hydrodynamic instability and the Marangoni effect // AIChE J.— 1959.— V. 5, N 4.
2. Smith K. A. On convective instability induced by surface-tension gradients // J. Fluid Mech.— 1966.— V. 24, N 2.
3. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе // ДАН СССР.— 1983.— Т. 272, № 4.
4. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. О колебательной конвективной неустойчивости равновесия двухслойных систем при наличии термокапиллярного эффекта // ПМТФ.— 1985.— № 1.
5. Френцель Г., Линде Х. Линейный анализ неустойчивости Марангони в двухфазной системе с источником или стоком тепла на межфазной границе // Теорет. основы хим. технологии.— 1986.— Т. 20, № 4.
6. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Возникновение термокапиллярной конвекции в двухслойной системе с тепловыделением на поверхности раздела // ПМТФ.— 1990.— № 1.
7. Гилев А. Ю., Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Возникновение конвекции в двухслойной системе, обусловленное совместным действием рэлеевского и термокапиллярного механизмов неустойчивости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 1.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.

г. Пермь

Поступила 5/IV 1989 г.,
в окончательном варианте — 26/I 1990 г.