О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОЙ СРЕДЕ

С. И. Мешков, Ю. А. Россихин

(Воронеж)

Дробно-экспоненциальные функции, введенные Ю. Н. Работновым [1] в качестве ядер интегральных операторов, оказываются весьма эффективными при применении принципа Вольтерра к решению статических [1,2] и динамических [3,4] задач наследственной теории упругости. Это объясняется тем, что дробно-экспоненциальные ядра допускают расшифровку соответствующих упругих операторов по вполне определенным правилам. Исследование диссипативных процессов при гармоническом деформировании таких сред позволяет установить эквивалентность между дробно-экспоненциальными ядрами и функциями распределения констант релаксации (ретардации) [5, 6]. Например, порядок дробности однозначно определяет радиус векторной диаграммы комплексного модуля (податливости) [7], которая представляет собой круговые диаграммы Коль-Коля, соответствующие вполне определенной функции распределения констант релаксации (ретардации).

Дальнейшее исследование диссипативных процессов можно провести на примере звуковой волны, распространяющейся в неограниченной среде, упругие операторы которой определяются дробно-экспоненциальными функциями памяти.

1. Система уравнений теории наследственной упругости позволяет записать уравнение движения относительно вектора перемещения u_i в следующем виде:

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda u_{k,ki} + \mu(u_{k,ki} + u_{i,jj}) \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность среды; точка над буквой u означает производную по времени, а индекс, стоящий после запятой, указывает пространственное дифференцирование по соответствующей координате. Упругие операторы определены следующим образом:

$$\lambda = \lambda\,(1 + \Lambda^*), \qquad \Lambda^*\varepsilon = \int_0^\infty \Lambda\,(s)\,\varepsilon\,(t - s)\,ds$$

$$\mu = \mu\,(1 + M^*), \qquad M \;= \int_0^\infty M\,(s)\,\varepsilon\,(t - s)\,ds \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде затухающей волны

$$u_i = A_i \quad \exp[i\omega t - (\alpha + i\omega / c)x_k\nu_k] \tag{1.3}$$

Здесь ν_i — означает единичный вектор в направлении распространения волны со скоростью $c > 0$, частотой $\omega > 0$, коэффициентом затухания $\alpha > 0$ и амплитудой A_i.

Подставляя (1.3) в (1.1), получаем

$$-\rho\omega^2 A_i = (\alpha + i\omega / c)^2 \ \{A_k\nu_k\nu_i\,\lambda[1 + \Lambda(\omega)] + (A_i + A_k\nu_k\nu_i)\mu[1 + M(\omega)]\} \tag{1.4}$$

$$M\,(\omega) = \int_0^\infty M\,(s)\,e^{-i\omega s} ds, \qquad \Lambda\,(\omega) = \int_0^\infty \Lambda\,(s)\,e^{-i\omega s} \ s \tag{1.5}$$

Соотношение (1.4) позволяет определить скорость волны c, коэффициент поглощения α и логарифмический декремент δ, дающий затухание волны в пространстве. При этом следует различать две волны — поперечную и продольную, независимо распространяющихся с разными скоростями c_t и c_l соответственно.

Характеристики поперечной волны определяются из уравнения (1.4), если положить в нем $A_k\nu_k = 0$; получим

$$-\rho\omega^2 = (\alpha_t + i\omega / c_t)\mu[1 + M(\omega)] \tag{1.6}$$

Отсюда легко находим

$$\rho c_t^2 = \mu^\circ \sec^2 {}^1\!/_2 \varphi_t, \quad \mu^\circ = \mu\,|\,1 + M(\omega)| \tag{1.7}$$

$$\alpha_t = \omega c_t^{-1} \ \mathrm{tg}\ {}^1\!/_2\,\varphi_t, \ \ \delta = 2\pi \ \ \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2\varphi_t \tag{1.8}$$

$$\mathrm{tg}\ \varphi_t = \frac{\mathrm{Im}\,[1 + M\,(\omega)]}{\mathrm{Re}\,[1 + M\,(\omega)]}\,, \qquad 0 \leqslant \varphi_t \leqslant \frac{1}{2}\,\pi \tag{1.9}$$

Здесь μ°— абсолютная величина комплексного модуля, которая может быть принята в качестве определения динамического модуля, а $\mathrm{tg}\varphi_t$ — обычный тангенс угля механических потерь для одномерного случая.

Для продольной волны $A_k\nu_k \neq 0$. Тогда, умножая соотношение (1.4) на ν_i и проводя суммирование по повторяющимся индексам, получим

$$-\rho\omega^2 = (\alpha_l + i\omega c_l^{-1})^2\,\{\lambda\,[1 + \Lambda\,(\omega)] + 2\mu\,[1 \tag{1.10}$$

Отсюда аналогично поперечной волне имеем

$$\rho e^2 = N \sec^2 {}^1/_2\varphi_l, \quad N = |N^*| = |\lambda[1 + \Lambda(\omega)] + 2\mu[1 + M(\omega)]| \tag{1.11}$$

$$\alpha_l = \omega c_l^{-1} \operatorname{tg} {}^1/_2\varphi_l, \qquad \delta = 2\pi \operatorname{tg} {}^1/_2\varphi_l \tag{1.12}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_l = \operatorname{Im}N^* / \operatorname{Re}N^*, \qquad 0 \leqslant \varphi_l \leqslant {}^1/_2\pi \tag{1.13}$$

Для дальнейшего удобно характеристики продольной волны выразить через упругие операторы всестороннего сжатия и сдвига. Это достигается при помощи соотношения

$$N^* = K[1 + K^*(\omega)] + {}^4/_3\mu[1 + M^*(\omega)] \tag{1.14}$$

На основе теорем о трансформантах Фурье

$$\lim_{\omega\to\infty} \Lambda(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \mathrm{M}(\omega) = 0, \; \lim_{\omega\to\infty} \omega\Lambda(\omega) = -i\Lambda(0), \; \lim_{\omega\to\infty} \omega M(\omega) = -iM(0) \tag{1.15}$$

из соотношений (1.7), (1.8), (1.11) при $\omega \to \infty$ получим

$$\rho c_{t\infty}^2 = \mu_\infty, \qquad \rho c_{l\infty}^2 = K_\infty + {}^4/_3\,\mu_\infty \tag{1.16}$$

$$\alpha_{t\infty} c_{t\infty} = {}^1/_2\, M(0), \qquad \alpha_{l\infty} c_{l\infty} = {}^1/_2\,[\lambda\Lambda(0) + 2\mu M(0)] \tag{1.17}$$

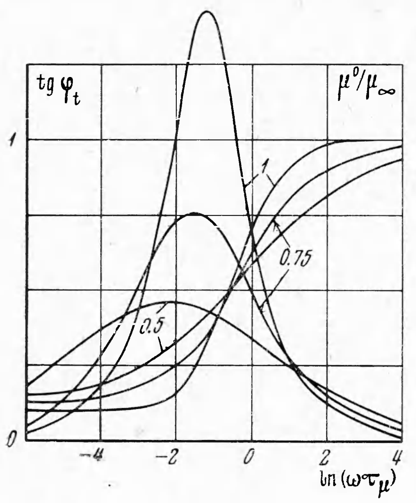
Таким образом, при $\omega \to \infty$ скорости звуковой волны равны соответствующим «нерелаксированным» упругим скоростям, а коэффициенты поглощения определяются наследственными ядрами, взятыми при $t = 0$, т. е. для всех слабо сингулярных ядер при $\omega \to \infty$, α_t и $\alpha_l \to \infty$. При $\omega \to 0$ с учетом условия нормировки

$$\int_0^\infty \Lambda(s)\,ds = \int_0^\infty M(s)\,ds = 1 \tag{1.18}$$

получим

$$\rho c_{t_0}^2 = \mu_0, \quad \rho c_{l_0}^2 = K_0 + {}^4/_3\mu_0, \quad \alpha_{t_0} = \alpha_{l_0} = 0 \tag{1.19}$$

т. е. скорости звуковой волны становятся равны соответствующим «релаксированным» упругим скоростям, а поглощение исчезает.



Фиг. 1

2. Рассмотрим сначала поперечную волну, когда ядро оператора $M(t)$ будет дробно-экспоненциальной функцией

$$M(t) = -\varkappa \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma[(\gamma(n+1))]} \left(\frac{t}{\tau_\mu}\right)^{\gamma(n+1)-1} \tag{2.1}$$

$$\varkappa = \Delta\mu / \mu_\infty\tau_\mu, \quad \Delta\mu = \mu_\infty - \mu_0$$

Здесь μ_∞ и μ_0—соответственно нерелаксированное и релаксированное значения модуля сдвига, τ_μ — время релаксации сдвиговых напряжений, γ — параметр дробности. При $\gamma = 1$ ядро (2.1) вырождается в обычную экспоненту, и наследственные свойства сдвиговой деформации описываются моделью стандартного линейного тела. Подставляя (2.1) в (1.5), для тангенса угла механических потерь (1.9) и динамического модуля (1.7) соответственно получим

$$tg\ \varphi_t = \frac{\Delta\mu \sin\psi}{g}, \quad \psi = \frac{\pi\gamma}{2} \tag{2.2}$$

$$g \equiv \frac{\mu_0}{(\omega\tau_\mu)^\gamma} + \mu_\infty(\omega\tau_\mu)^\gamma + (\mu_0 + \mu_\infty)\cos\psi\ \ \mu^0 = \frac{g \sec\varphi_l}{h}. \tag{2.3}$$

$$h \equiv \frac{1}{(\omega\tau_\mu)^\gamma} + (\omega\tau_\mu)^\gamma + 2\cos\psi$$

Нетрудно установить, что при условии $(\omega\tau_\mu)^{2\gamma} = \mu_0 / \mu_\infty$ тангенс угла механических потерь достигает максимального значения

$$\operatorname{tg}\varphi_m = \frac{\Delta^\pm \sin\psi}{2 + \Delta^\pm \cos\psi}, \qquad \Delta^\pm = \frac{\mu_\infty \pm \mu_0}{\sqrt{\mu_\infty\mu_0}} \tag{2.4}$$

Это хорошо видно на фиг. 1, где в качестве параметра выбрана величина γ, значения которой указаны цифрами на кривых, $\mu_0 / \mu_\infty = 0.1$. Из фигуры видно, что для стандартного линейного тела $\gamma = 1$ динамический модуль $\mu^\circ(\omega)$ достигает своих предельных значений $\mu^\circ(\omega \to 0) = \mu_0$ и $\mu^\circ(\omega \to \infty) = \mu_\infty$ значительно быстрее, чем $\operatorname{tg}\varphi_t \to 0$ при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$. Это объясняется различием асимптотического поведения этих величин, которые при $\gamma = 1$ иллюстрируются следующими соотношениями [8]:

$$\mu^0 = \mu_\infty - \frac{\mu_\infty^2 - \mu_0^2}{2\mu_\infty\omega^2\tau_\mu^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_t = \frac{\Delta\mu}{\mu_\infty\omega\tau_\mu}, \quad \omega\tau_\mu \gg 1 \tag{2.5}$$

$$\mu^0 = \mu_0 + \frac{\mu_\infty^2 - \mu_0^2}{2\mu_0}\omega^2\tau_\mu^2, \quad \operatorname{tg}\varphi_t = \omega\tau_\mu\frac{\Delta\mu}{\mu_0}, \quad \omega\tau_\mu \ll 1 \tag{2.6}$$

С уменьшением параметра дробности γ это различие постепенно исчезает, так как меняется характер асимптотического поведения тангенса угла потерь и динамического модуля

$$\mu^0 = \mu_\infty - \frac{\Delta\mu\cos\psi}{\omega^\gamma\tau_\mu^\gamma}, \quad \operatorname{tg}\varphi_t = \frac{\Delta\mu\sin\psi}{\mu_\infty\omega^\gamma\tau_\mu^\gamma}, \quad \omega\tau_\mu \gg 1 \tag{2.7}$$

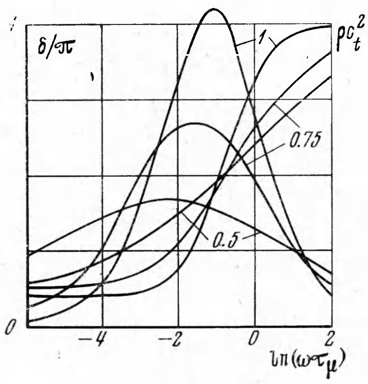
$$\mu^0 = \mu_0 + \Delta\mu(\omega\tau_\mu)^\gamma\cos\psi, \quad \operatorname{tg}\varphi_t = \Delta\mu\mu_0^{-1}(\omega\tau_\mu)^\gamma\sin\psi, \quad \omega\tau_\mu \ll 1 \tag{2.8}$$

Зная $\operatorname{tg}\varphi_t$ и μ^0, нетрудно определить по формулам (1.7) и (1.8) скорость, коэффициент поглощения и логарифмический декремент поперечной волны

$$\rho c_t^2 = qh^{-1}\sec\varphi_t\sec^2 {}^1\!/_2\varphi_t \tag{2.9}$$

$$\alpha_t = \omega(\rho / \mu^0)^{1/2}\sin {}^1\!/_2\varphi_t, \quad \delta = 2\pi\operatorname{tg} {}^1\!/_2\varphi_t \tag{2.10}$$

На фиг. 2 приведены кривые $\rho c_t^2 = f(\ln\omega\tau_\mu)$, $\delta = f(\ln\omega\tau_\mu)$; очевидно, что поведение квадрата скорости отличается от динамического модуля и логарифмического декремента — от тангенса угла потерь. Однако это различие исчезает с уменьшением затухания, величина которого определяется тремя факторами: частотной областью $\omega\tau_\mu$, степенью релаксации μ_0 / μ_∞ и параметром γ, значения которого указаны цифрами у кривых. При фиксированных μ_0 / μ_∞ и γ асимптотическое поведение ρc_t^2 и δ / π при $\omega\tau_\mu \to \infty$ и $\omega\tau_\mu \to 0$ определяется соответствующими выражениями (2.7) и (2.8). При неизменных $\omega\tau_\mu$ и μ_0 / μ_∞ различие между $\operatorname{tg}\varphi_t$ и δ/π, μ^0 и ρc_t^2 исчезает при $\gamma \to 0$, а при $\gamma = 1$ (стандартное линейное тело) становится особенно заметным. При заданных $\omega\tau_\mu$ и γ спараведливы следующие предельные соотношения:



Фиг. 2

$$\lim_{\xi\to 1}\operatorname{tg}\varphi_t = \lim_{\xi\to 1}\delta = 0, \quad \xi \equiv \mu_0/\mu_\infty, \quad \lim_{\xi\to 0}\operatorname{tg}\varphi_t = [\cos\psi + (\omega\tau_\mu)^\gamma]^{-1}\sin\psi \tag{2.11}$$

$$\lim_{\xi\to 1}(\delta/\pi) = \{\cos\psi + (\omega\tau_\mu)^\gamma + [1 + 2(\omega\tau_\mu)^\gamma\cos\psi + (\omega\tau_\mu)^{2\gamma}]^{1/2}\}^{-1}\sin\psi$$

$$\lim_{\xi\to 1}\mu^0 = \mu_\infty = \rho c_\infty^2 t$$

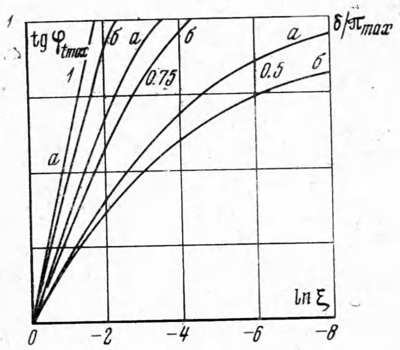
$$\lim_{\xi\to 0}\mu^0 = \mu_\infty[1 + 2(\omega\tau_\mu)^{-\gamma}\cos\psi + (\omega\tau_\mu)^{-2\gamma}]^{-1/2}$$

$$\lim_{\xi\to 0}\rho c_t^2 = 2\mu_\infty[1 + (\omega\tau_\mu)^{-\gamma}\cos\psi + (\mu_\infty^{-1}\lim_{\xi\to 0}\mu^0)^{-1}]^{-1}$$

При одновременном изменении всех величин затухание максимально при условии $(\omega\tau_\mu)^2 = \mu_0 / \mu_\infty$, следовательно, различие между $\operatorname{tg}\varphi_t$ и δ / π, μ^0 и ρc_t^2 наиболее велико. Сравнение величин $\operatorname{tg}\varphi_{mt}$ (кривые, *а*) и $(\delta / \pi)_m$ (кривые *б*) приведено на фиг. 3. Цифрами указаны значения параметра γ. С уменьшением отношения μ_0 / μ_∞ разность между этими величинами возрастает от 0 до $\operatorname{tg}\psi - 2\operatorname{tg}{}^1\!/_2\psi$ при $0 < \gamma < 1$ и стремится к ∞ в случае стандартного линейного тела $\gamma = 1$.

По формулам (2.2)—(2.4) частотная зависимость (дисперсия) соответствующих величин определяется безразмерным параметром $\omega\tau_\mu$, который зависит не только от частоты ω, но и от температуры T, так как по закону Аррениуса $\tau_\mu = \tau_0 \exp (u / kT)$.

Поэтому увеличение температуры эквивалентно уменьшению частоты, и этот факт используется для экспериментального исследования дисперсии. Для коэффициента поглощения $\alpha_t' = \alpha_t c_{t\infty} \omega^{-1}$ эта эквивалентность не имеет места, так как в зависимости от температуры α_t' проходит максимум (фиг. 4), а по отношению ω изменяется монотонно (фиг. 5). Влияние параметра дробности γ, значения которого указаны цифрами у кривых, в обоих случаях неодинаково, что следует из нарушения температурно-частотной эквивалентности.



Фиг. 3

Особенно хорошо это видно при исследовании асимптотического поведения коэффициента α_t

$$\alpha_t = \frac{\Delta\mu\, \omega \sin\psi}{2 c_{t\infty}\, \omega^\gamma \tau_\mu^{\ \gamma}}, \qquad \omega\tau_\mu \gg 1 \quad (2.12)$$

$$\alpha_t = \frac{\Delta\mu\omega^{\gamma+1} \tau_\mu^{\ \gamma} \sin\psi}{2 c_{t_0} \mu_0}, \qquad \omega\tau_\mu \ll 1 \quad (2.13)$$

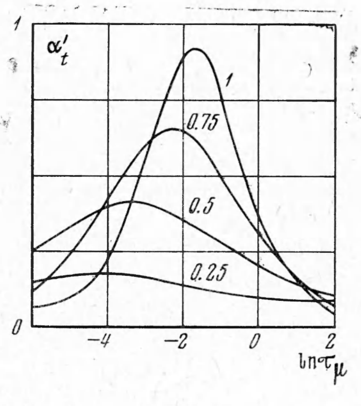
Для $\omega = \mathrm{const}$ при $\tau_\mu \to 0$ и $\tau_\mu \to \infty$ коэффициент поглощения $\alpha_t' \to 0$ (фиг. 4). Для $\tau_\mu = \mathrm{const}$, если $\omega \to 0$, то и $\alpha_t' \to 0$ при любых $\gamma \in (0,1]$. Однако если $\omega \to \infty$, то $\alpha_t' \to \infty$ при $\gamma \neq 1$, и $\alpha_{t\infty}' = \Delta\mu / 2c_{t\infty}\tau_\mu$ при $\gamma = 1$ (фиг. 4).

3. Выпишем характеристики продольной волны, предполагая, что ядро объемной релаксации также выражается дробно-экспоненциальной функцией Ю. Н. Работнова. Тогда

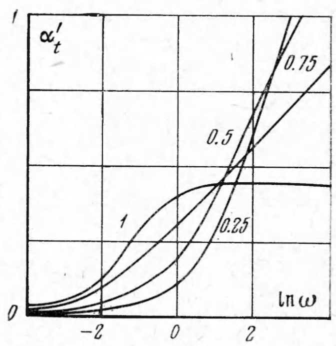
$$\operatorname{tg}\varphi_l = \frac{\Delta K h_K^{-1} \sin\psi_K + {}^4/_3\, \Delta\mu h_\mu^{-1} \sin\psi_\mu}{g_K h_K^{-1} + {}^4/_3\, g_\mu h_\mu^{-1}} \qquad (3.1)$$

$$N = (g_K\, h^{-1} + {}^4/_3\, g_\mu h_\mu^{-1}) \sec\varphi_l \qquad (3.2)$$

Индекс K означает, что соответствующие величины характеризуют объемную релаксацию.



Фиг. 4



Фиг. 5

По формулам (3.1)—(3.3) можно учесть влияние объемной релаксации на сдвиговую. Принципиальная возможность такого влияния обсуждалась в работе [9] для случая $\gamma = \gamma_\mu = \gamma_K$. При заданных релаксационных характеристиках τ_μ, τ_K, μ_0 / μ_∞, K_0 / K_∞ и нерелаксированном коэффициенте Пуассона $\nu_\infty = 0.3$ пик для объемной релаксации наиболее отчетливо проявляется в случае $\gamma = 1$, т. е. когда наследственные свойства сдвигового и объемного модулей описываются моделью стандартного линейного тела.

Так как с уменьшением параметра дробности γ происходит «размытие» спектра, проявление объемной релаксации становится менее заметным, пока, наконец, совсем не исчезает. Об этом свидетельствует характер асимптотического поведения $\operatorname{tg}\varphi_l$ и N.

В случае стандартного линейного тела $\gamma_\mu = \gamma_K = \gamma = 1$ имеем

$\omega \gg 1$

$$\operatorname{tg} \varphi_l = \frac{1}{K_\infty + {}^4/_3\, \mu_\infty} \left(\frac{\Delta K}{\omega \tau_K} + \frac{4}{3} \frac{\Delta\mu}{\omega \tau_\mu} \right) \tag{3.3}$$

$$N = K_\infty + \frac{4\mu_\infty}{3} - \frac{1}{K_\infty + {}^4/_3\, \mu_\infty} \left\{ \frac{8\Delta\mu\, [K_\infty + {}^1/_3\, (\mu_\infty + \mu_0)]}{3\omega^2 \tau_\mu^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta K}{2\, (\omega \tau_K)^2} \left[K_\infty + K_0 + \frac{16\, \mu_\infty}{3} \right] - \frac{\Delta K \Delta\mu}{3\omega^2 \tau_\mu \tau_K} \right\}$$

$\omega \ll 1$

$$\operatorname{tg} \varphi_l = (K_0 + {}^4/_3\, \mu_0)^{-1}\, (\Delta K \omega \tau_K + {}^4/_3\, \Delta\mu \omega \tau_\mu) \tag{3.4}$$

$$N = K_0 + {}^4/_3\, \mu_0 + (K_0 + {}^4/_3\, \mu_0)^{-1}\, \{{}^8/_3\, \Delta\mu\, (\omega \tau_\mu)^2\, [K_0 + {}^1/_3\, (\mu_0 + \mu_\infty)] +$$

$$+ {}^1/_2 \Delta K\, (\omega \tau_K)^2\, (K_0 + K_\infty + {}^{16}/_3\, \mu_0) + 4\, \Delta K \Delta\mu \,/\, 3\omega^2 \tau_\mu \tau_K\}$$

С уменьшением параметра γ характер асимптотического поведения тангенса угла потерь и динамического модуля меняется

$\omega \gg 1$

$$\operatorname{tg} \varphi_l = \frac{1}{K_\infty + {}^4/_3\, \mu_\infty} \left[\frac{\Delta K}{(\omega K_K)^\gamma} + \frac{4\Delta\mu}{3\, (\omega \tau_\mu)^\gamma} \right] \sin \psi \tag{3.5}$$

$$N = K_\infty + \frac{4\mu_\infty}{3} - \left[\frac{\Delta K}{(\omega \tau_K)^\gamma} + \frac{4\Delta\mu}{3\, (\omega \tau_\mu)^\gamma} \right] \cos \psi$$

$\omega \ll 1$

$$\operatorname{tg} \varphi_l = (K_0 + {}^4/_3\, \mu_0)^{-1}\, [\Delta K\, (\omega \tau_K)^\gamma + {}^4/_3\, \Delta\mu\, (\omega \tau_\mu)^\gamma]\, \sin \psi \tag{3.6}$$

$$N = K_0 + {}^4/_3\, \mu_0 + [\Delta K\, (\omega \tau_K)^\gamma + {}^4/_3\, \Delta\mu\, (\omega \tau_\mu)^\gamma]\, \cos \psi$$

При исследовании асимптотического поведения коэффициента α_l проявляется нарушение температурно-частотной эквивалентности

$\omega \gg 1$

$$\alpha_l = {}^1/_2\, \omega \rho^{1/2}\, (K_\infty + {}^4/_3\, \mu_\infty)^{-3/2}\, [\Delta K\, (\omega \tau_K)^{-\gamma} + {}^4/_3\, \Delta\mu\, (\omega \tau_\mu)^{-\gamma}]\, \sin \psi \tag{3.7}$$

$\omega \ll 1$

$$\alpha_l = {}^1/_2\, \omega \rho^{1/2}\, (K_0 + {}^4/_3\, \mu_0)^{-3/2}\, [\Delta K\, (\omega \tau_K)^\gamma + {}^4/_3\, \Delta\mu\, (\omega \tau_\mu)^\gamma]\, \sin \psi \tag{3.8}$$

Для $\omega = \text{const}$ при $\tau_\mu \to 0$ и $\tau_\mu \to \infty$ коэффициент поглощения $\alpha_l \to 0$. Для $\tau_\mu = \text{const}$, если $\omega \to 0$, то и $\alpha_l \to 0$ при всех $\gamma \in (0,1]$. Однако если $\omega \to \infty$, то $\alpha_l \to \infty$ при $\gamma \neq 1$ и $\alpha_l \to \text{const}$ при $\gamma = 1$.

Таким образом, использование дробно-экспоненциальных функций в качестве ядер интегральных упругих операторов позволяет исследовать все особенности распространения звуковых волн в упруго-наследственной среде с симметричным релаксационным спектром, так как дробно-экспоненциальному ядру соответствует симметричная функция распределения частот релаксации [5].

Поступила 5 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. Розовский М. И. Об одном свойстве степени специального оператора и его приложении к решению динамических задач. Сб. «Ползучесть и длительная прочность». Новосибирск, СО АН СССР, 1963.
4. Розовский М. И., Синайский Е. С. Колебания осциллятора, обладающего наследственной ползучестью. ПММ, 1966, вып 3.
5. Cole K. S., Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics. I. Alternating current characteristics. J. Chem Phys., 1941, vol. 9, p. 341.
6. Шермергор Т. Д. Расчет функции распределения констант реклаксации по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. вузов., Физика, 1961, № 1.
7. Мешков С. И. К описанию внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, обладающих слабой сингулярностью. ПМТФ, 1967, № 4.
8. Зинер К. Сб. «Упругосгь и неупругость металлов». В сб.: «Упругость и неупругость металлов». М., Изд-во иностр. лит., 1954.
9. Мешков С. И., Пачевская Г. Н. К учету объемной релаксации методом внутреннего трения. ПМТФ, 1967, № 2.