

ТРИ ТЕОРЕМЫ О ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

УДК 539.3

Б. В. Нерубайло

Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва

Известно, что поведение оболочек при действии нагрузок сингулярного характера (в частности, сосредоточенных и кусочно-постоянных) может быть удовлетворительно описано дифференциальными уравнениями в частных производных восьмого порядка или более высокого порядка в зависимости от строгости исходных гипотез. Смягчение гипотез приближает уравнения теории оболочек к уравнениям трехмерной теории упругости. Высокий порядок уравнений теории оболочек, построенный еще в прошлом веке, когда практически отсутствовали эффективные вычислительные средства, а необходимость уточнения расчетных моделей все возрастала, порождал потребность в построении новых теорий, которые, как правило, сводились к упрощению уравнений общей теории оболочек. Это, например, относится к теории пологих оболочек (уравнения Власова — Доннелла для цилиндрических оболочек), к полубезмоментной теории оболочек [1]. Данные уравнения применяются как самостоятельно при решении тех или иных задач прочности и устойчивости конструкций, так и в качестве компонентов при построении решений методами асимптотического синтеза (МАС) [2, 3], где они играют роль так называемых элементарных напряженных состояний [4]. Последние с помощью определенной процедуры [2] «склеиваются», давая в итоге полное напряженно-деформированное состояние оболочки. Такой подход показал высокую эффективность при определении напряженно-деформированного состояния оболочек, подверженных воздействию нагрузок сингулярного характера. В настоящей работе получены верхние оценки погрешности решений, найденных на основе применения МАС.

Рассмотрим асимптотическую погрешность приближенных уравнений. Согласно [4], под асимптотической погрешностью будем понимать модуль отношения наибольшего из отброшенных членов разрешающего уравнения к наибольшему из сохраненных членов. Пусть имеется дифференциальное уравнение в частных производных r -го порядка (r — четное число) с малым параметром h_*^2 при старшей производной или перед оператором, содержащим старшие производные:

$$(h_*^2 \mathcal{L} + M)\Phi(\alpha, \beta) = af(\alpha, \beta). \quad (1)$$

Здесь \mathcal{L} — дифференциальный оператор, содержащий частные производные порядка r и ниже; M — оператор, содержащий производные порядка $(1/2)r$; $f(\alpha, \beta)$ — кусочно-непрерывная функция; a — постоянный коэффициент.

В случае круговых цилиндрических оболочек операторы \mathcal{L} и M принимают следующий вид:

в общей теории оболочек

$$\mathcal{L} = \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 1)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \nabla^2, \quad M = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}; \quad (2)$$

в теории пологих оболочек (уравнения Власова — Доннелла)

$$\mathcal{L} = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2, \quad M = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}; \quad (3)$$

в полубезмоментной теории оболочек

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2, \quad \bar{M} = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}; \quad (4)$$

в теории простого краевого эффекта

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}, \quad M = 1; \quad (5)$$

для изгибного тангенциального состояния

$$\mathcal{L} = \nabla^2 \nabla^2, \quad M = 0. \quad (6)$$

Пусть возникшее в оболочке напряженно-деформированное состояние характеризуется величиной, которую назовем показателем изменяемости напряженного состояния, понимая под изменяемостью на данном участке поверхности оболочки модуль отношения среднего значения производной какой-либо функции к среднему значению самой функции. Пусть показатель изменяемости ρ связан с относительной толщиной оболочки и номером гармоники n при разложении функции $f(\alpha, \beta)$ в ряд Фурье по окружной координате β соотношением [4]

$$n = h_*^{-\rho}, \quad h_*^2 = h^2 / 12 R^2. \quad (7)$$

В соотношении (7) величина n характеризует изменяемость n -й гармоники разложения функции $f(\alpha, \beta)$ в ряд Фурье, а также решений в виде рядов для разрешающей функции и ее производных.

В зависимости от величины ρ можно прийти к различным приближенным уравнениям теории оболочек, операторы которых записаны в (2)–(6). Они, как отмечалось, представляют самостоятельный интерес и могут описывать то или иное элементарное напряженное

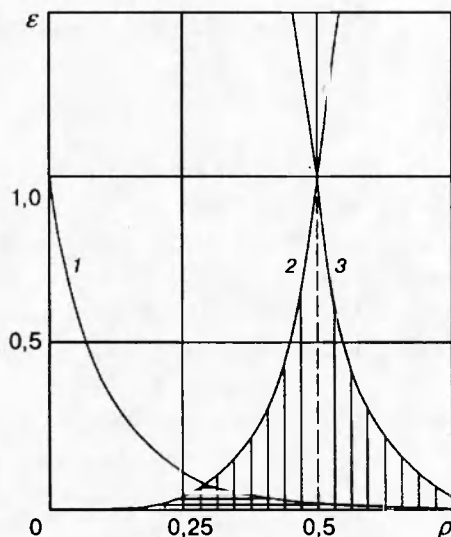


Рис. 1

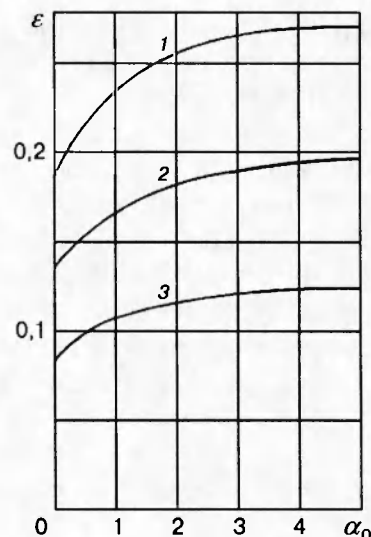


Рис. 2

состояние в одном из МАС.

Характер поведения асимптотической погрешности ε в зависимости от ρ показан на рис. 1 (кривая 1 — теория пологих оболочек, 2 — полубезмоментная теория и краевой эффект, 3 — уравнения изгибного и тангенциального состояний) [2, 3]. Равенство асимптотической погрешности единице при $\rho = 1/2$ означает, что при переходе от полных уравнений к приближенным в характеристическом уравнении (и в разрешающем уравнении соответственно) отбрасываются члены, порядок которых один и тот же по сравнению с остающимися.

Предположим, что построено напряженно-деформированное состояние оболочки при действии на нее сосредоточенной и кусочно-постоянной нагрузки, а за основу приняты уравнения общей теории оболочек, а затем уравнения пологих оболочек (уравнения Власова — Доннелла). Запишем на основе метода интеграла Фурье решение, когда функция $f(\alpha, \beta)$ кусочно-постоянная. Тогда, применяя уравнения общей теории оболочек, получим

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha, \beta) &= \frac{6(1-\nu^2)}{\pi\alpha_n\beta_n} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \frac{P}{ER} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \cos \alpha \lambda d\lambda, \\ ERP^{-1}w(\alpha, \beta) &= \frac{6(1-\nu^2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{w(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \cos \alpha \lambda d\lambda, \\ P^{-1}G_i(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{g_i(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda \mathcal{L}(\lambda, n)} \cos \alpha \lambda d\lambda.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda, n) &= (\lambda^2 + k^2n^2 - 1)^2(\lambda^2 + k^2n^2)^2 + 2(1-\nu)\lambda^2(\lambda^4 - k^4n^4) + (1-\nu^2)c^{-2}\lambda^4, \\ w(\lambda, n) &= (\lambda^2 + k^2n^2)^2, \quad g_1(\lambda, n) = (\lambda^2 + \nu k^2n^2 - \nu)w(\lambda, n) + (1-\nu^2)\lambda^2 k^2n^2, \\ g_2(\lambda, n) &= (k^2n^2 + \nu\lambda^2 - 1)w(\lambda, n), \quad c^2 = h_*^2, \\ \theta_n &= \frac{k\beta_0}{\pi} \quad (n=0), \quad \theta_n = \frac{2}{\pi n} \sin kn\beta_0 \quad (n=1, 2, 3, \dots);\end{aligned}\quad (9)$$

P — полная нагрузка, действующая на один из k участков прямоугольной формы, расположенных в начальном сечении бесконечно длинной оболочки; $2\alpha_0 R$, $2\beta_0 R$ — протяженность нагруженного участка поверхности оболочки соответственно в продольном и окружном направлении.

Решение для действия k сосредоточенных радиальных сил P можно записать согласно (8), если осуществить предельный переход $\alpha_0 \rightarrow 0$, $\beta_0 \rightarrow 0$.

Действительную погрешность при вычислении разрешающей функции и искомых факторов в оболочке на основе приближенных уравнений определим как $\varepsilon = 1 - \eta$, где η — отношение значения какого-либо фактора (перемещение, усилие, момент), найденного на основе этих уравнений, к соответствующему значению, полученному согласно общей теории оболочек. Тогда при применении уравнений Власова — Доннелла имеет место

Теорема 1. *Погрешность ε в определении разрешающей функции $\Phi(\alpha, \beta)$ и ее производных до $(r-1)$ -го порядка включительно минимальна для сосредоточенного воздействия и возрастает по мере увеличения нагруженной области, оставаясь наименьшей для старших производных и для содержащих их искомым факторов.*

Отсюда следует, что в выражениях (8) наибольшая погрешность появляется у нормального перемещения w , а наименьшая — у продольного G_1 и окружного G_2 изгибающих моментов. Это подтверждается многочисленными результатами, относящимися к оболоч-

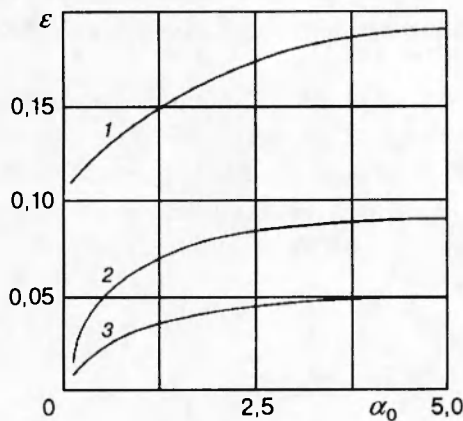


Рис. 3

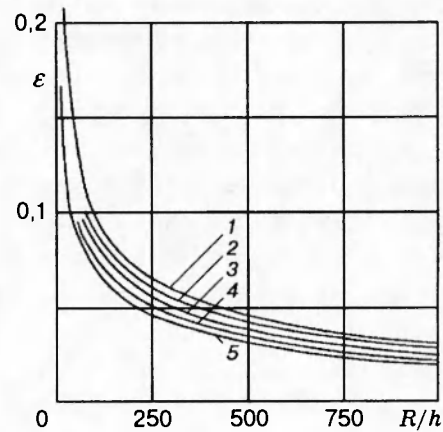


Рис. 4

кам конечной длины [5].

Рассмотрим нагружение оболочки по отрезкам образующей различной длины: нагрузка симметрична относительно середины оболочки, имеющей шарнирное закрепление на торцах.

На рис. 2 показана зависимость погрешности радиального перемещения ϵ для оболочек с различной относительной толщиной от длины нагруженного отрезка образующей. Здесь кривые 1-3 соответствуют $R/h = 15; 100; 300, l/R = 10$ (l, R — длина и радиус оболочки).

Для продольного усилия, продольного момента, окружного момента (соответственно кривые 1-3) аналогичные зависимости представлены на рис. 3 для оболочки с $l/R = 10, R/h = 15$. Из рис. 2, 3 видно, что наибольшая погрешность получается для радиального перемещения. Причем погрешность для всех факторов растет с увеличением l/R и длины нагруженного отрезка, достигая наибольшего значения при нагружении по всей образующей оболочки. Для более тонких оболочек погрешность ϵ меньше, что хорошо согласуется с выводами работы [6]. При нагружении оболочек по квадратным областям ($\alpha_0 = \beta_0 = \delta_0$), как и в случае нагружения по отрезкам образующей, наибольшую погрешность ϵ имеет радиальное перемещение.

На рис. 4 показана зависимость погрешности радиального перемещения для различных размеров нагруженных областей от относительной толщины оболочки, имеющей $l/R = 8$; нагрузка приложена в середине оболочки; кривые 1-5 соответствуют $\delta_0 = 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; 0$ ($\delta_0 = 0$ отвечает действию сосредоточенной силы). Обратим внимание на одно важное обстоятельство, которое определило выбор объекта исследований в данной работе — бесконечно длинную оболочку: при фиксированных толщине оболочки и размерах нагруженной области увеличение длины оболочки всегда приводит к возрастанию погрешности.

Отметим, что решение на основе уравнений Власова — Доннелла получается заменой выражений (9) на более простые:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda, n) &= (\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + (1 - \nu^2) c^{-2} \lambda^4, \\ g_1(\lambda, n) &= (\lambda^2 + \nu k^2 n^2) w(\lambda, n), \quad g_2(\lambda, n) = (k^2 n^2 + \nu \lambda^2) w(\lambda, n). \end{aligned} \tag{10}$$

Представляет интерес сравнение погрешности ϵ в определении разрешающей функции, ее производных и искомых силовых и деформационных факторов, когда нагруженные области прямоугольной формы ($|\alpha| \leq \alpha_0, |\beta| \leq \beta_0$) и квадратной ($|\alpha| \leq \delta_0, |\beta| \leq \delta_0$, где $\delta_0 = \max(\alpha_0, \beta_0)$). В этом случае имеет место

Теорема 2. Погрешность ε при нагружении оболочки по квадратной области является верхним пределом погрешности ε для любой прямоугольной области, вписывающейся в данную квадратную область.

Пусть теперь вместо дифференциального уравнения общей теории оболочек напряжено-деформированное состояние будет построено на основе одного из двух МАС.

При применении первого МАС полное напряженное состояние при $n \leq \bar{n}$ получается на основе уравнений полубезмоментной теории (4) и теории краевого эффекта (5), а при $n \geq \bar{n} + 1$ — на основе уравнений Власова — Доннелла (3), тогда вместо решения по общей теории оболочек, записанного в форме (8), получим

$$\begin{aligned}
 ERP^{-1}w(\alpha, \beta) = & \frac{6(1-\nu^2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \left[\sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\alpha^4)} \cos \alpha \lambda d\lambda + \right. \\
 & + \frac{1}{4\alpha^4} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\mu_n^0 \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} \cos \alpha \lambda d\lambda + \\
 & \left. + \sum_{n+1}^\infty \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{w(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda[(\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + 4\alpha^4 \lambda^4]} \cos \alpha \lambda d\lambda \right], \\
 P^{-1}G_2(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2\pi\alpha_0\beta_0} \left[\nu \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda^4 + 4\alpha^4} \cos \alpha \lambda d\lambda + \right. \\
 & + \frac{1}{4\alpha^4} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{g_{2n}^0 \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} \cos \alpha \lambda d\lambda + \\
 & \left. + \sum_{n+1}^\infty \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{g_2(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda[(\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + 4\alpha^4 \lambda^4]} \cos \alpha \lambda d\lambda \right]. \tag{11}
 \end{aligned}$$

В качестве номера гармоники \bar{n} , при котором «склеиваются» решения согласно уравнениям (3)–(5), берется округленное до ближайшего целого числа значение n , найденное по формуле [3]

$$n^4 = (2/k^4)\sqrt{3}(R/h). \tag{12}$$

При применении второго МАС получим решение путем соответствующих упрощений решения (11), а именно последних членов, являющихся решением уравнений (3). Полное напряженное состояние складывается, таким образом, из полубезмоментного решения, краевого эффекта ($n \leq \bar{n}$), решения на основе уравнений Власова — Доннелла ($\bar{n} + 1 < n \leq n^*$), изгибного состояния ($n \geq n^* + 1$):

$$\begin{aligned}
 ERP^{-1}w(\alpha, \beta) = & \frac{6(1-\nu^2)}{\pi\alpha_0\beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \left[\sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\sin \alpha_0 \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\alpha^4)} \cos \alpha \lambda d\lambda + \right. \\
 & + \frac{1}{4\alpha^4} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{w_n^0 \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} \cos \alpha \lambda d\lambda + \\
 & \left. - \sum_{\bar{n}+1}^{n^*} \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{w(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda[(\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + 4\alpha^4 \lambda^4]} \cos \alpha \lambda d\lambda + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n^*+1}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \lambda}{\lambda(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} \cos \alpha \lambda d\lambda \Big], \\
 P^{-1} G_2(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2\pi \alpha_0 \beta_0} \left[\nu \sum_{n=0}^{\bar{n}} \bar{\theta}_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda^4 + 4\alpha^4} \cos \alpha \lambda d\lambda + \right. \\
 & + \frac{1}{4\alpha^4} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{g_{2n}^{\circ} \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda(\lambda^4 + 4\mu_n^4)} \cos \alpha \lambda d\lambda + \\
 & + \sum_{n+1}^{n^*} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{g_2(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda}{\lambda[(\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + 4\alpha^4 \lambda^4]} \cos \alpha \lambda d\lambda + \\
 & \left. + \sum_{n^*+1}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{(k^2 n^2 + \nu \lambda^2) \sin \alpha_0 \lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} \cos \alpha \lambda d\lambda \right]. \tag{13}
 \end{aligned}$$

В выражениях (11), (13) приняты следующие обозначения:

$$\omega_n^{\circ} = k^4 n^4; \quad g_{2n}^{\circ} = k^4 n^4 (k^2 n^2 - 1); \quad \alpha^4 = 3(1 - \nu^2)(R/h)^2.$$

В качестве номера гармоники n^* берется округленное до ближайшего целого числа значение n , найденное по формуле [3]

$$n^4 = (2/k^4)(1 - \nu^2)(R/h)^{5/2}. \tag{14}$$

Итак, в случае применения второго МАС напряженно-деформированное состояние оболочки может быть получено по формулам (13). Причем «склеивание» решений приближенных уравнений (3)–(6) производится при значениях \bar{n} , n^* , определяемых по формулам (12), (14). Оба эти метода дают решения, практически совпадающие с точным, при значительно меньших затратах времени при численной реализации. Кроме того, применение МАС открывает возможности получения удобных, легко обозримых аналитических решений или конечных расчетных формул.

Известно, что погрешность теории оболочек, построенной с точностью гипотез Кирхгофа — Лява, составляет величину порядка h/R по сравнению с единицей. Возникает вопрос об оценке погрешности различных приближенных уравнений и МАС [6–9]. Пусть имеется дифференциальное уравнение (1) с погрешностью порядка h/R по сравнению с единицей [6–8], содержащее малый параметр h_4^2 при старших производных. Для расщепленных уравнений, вытекающих из (1), приведены кривые изменения асимптотической погрешности (см. рис. 1). Критериальное значение \bar{n} найдено исходя из условия минимума асимптотической погрешности, а значение n^* — из условия возможного пренебрежения в уравнении (1) членами порядка $(h/R)^{1/2}$ по сравнению с единицей (последнее обстоятельство превращает уравнение общей теории эллиптического типа в полигармоническое $\nabla^8 \Phi = 0$). Тогда имеет место

Теорема 3. Если погрешность точного уравнения теории оболочек (1), содержащего малый параметр h_4^2 при старших производных, составляет величину порядка h/R по сравнению с единицей, то погрешность первого и второго МАС не превышает величину порядка $(h/R)^{1/2}$ по сравнению с единицей.

Обширный численный материал, приведенный в работах [2, 3, 5], а также в других источниках, подтверждает справедливость положений, заключенных в сформулированных здесь теоремах. Однако вопрос об аналитическом доказательстве сформулированных в виде теорем положений остается эвристическим.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант N2J000).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Власов В. З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Избр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. **Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991.
3. **Нерубайло Б. В.** Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983.
4. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
5. **Нерубайло Б. В., Сибиряков В. А.** К вопросу о погрешности уравнений Доннелла — Власова // Прикл. механика. 1970. Т. 6, вып. 6. С. 112–115.
6. **Новожилов В. В., Финкельштейн Р. Л.** О погрешности гипотез Кирхгофа — Лява в теории // ПММ. 1943. Т. 7. С. 331–340.
7. **Муштари Х. М.** Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа — Лява // ПММ. 1947. Т. 11, вып. 5. С. 517–520.
8. **Hoff N. J.** The accuracy of Donnell's equations // J. Appl. Mech. 1955. V. 22, N 3. P. 329–334.
9. **Kempner J.** Remarks on Donnell's equations // J. Appl. Mech. 1955. V. 22, N 1. P. 117–118.

*Поступила в редакцию 2/X 1995 г.,
в окончательном варианте — 4/I 1996 г.*
