ПМТФ, № 6, 1965

О ВОЗМОЖНЫХ УПРОЩЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВУТЕМПЕРАТУРНОЙ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

В. М. Коровин

(*Москва*)

При исследованиях поведения ионизованного газа в электромагнитных полях обычно используют уравнения сохранения массы, импульса и энергии, уравнения состояния, уравнения Максвелла и закон Ома, дающий связь между электрическим полем и током, протекающим в плазме. В однородной и изотропной среде эта зависимость сводится к простой пропорциональности между плотностью тока и напряженностью электрического поля [1,2]. В общем случае она носит более сложный характер. Возможные формы закона Ома для полностью ионизованной однотемпературной плазмы исследовались в работе [3], а для двутемпературной плазмы — в [4]. При этом в работе [4] показано, что в законе Ома, вообще говоря, необходимо учитывать члены, пропорциональные градиентам температур, и что в том случае, когда температура электронов значительно превосходит температуру ионов, становится необходимым учет и вязких членов. Для облегчения описания трехкомпонентной однотемпературной плазмы в работе [5] уравнения движения для каждой из компонент, написанные с учетом ряда упрощающих предположений, заменяются уравнением движения для смеси и двумя диффузионными уравнениями (законами Ома). В частично ионизованном газе один закон Ома (связь плотности тока и электрического поля) исследовался в работах [6,7], при этом предполагалось, что среда — невязкая и однотемпературная, и, кроме того, при записи силы трения между компонентами не учитывалась анизотропия.

В работе проводится упрощение приведенных в [8-10] уравнений для двутемпературной плазмы, содержащей электроны, однократно заряженные ионы и нейтральные атомы. Учитывается влияние вязкости компонент и термосил. Столкновения частиц считаются упругими и предполагается, что $T_e \geqslant T$, где $T = T_i = T_a$. При исследовании совершается переход от уравнений движения для каждой из компонент к уравнению движения для смеси и двум диффузионным уравнениям (законам Ома). Исследуется зависимость возможных форм диффузионных уравнений от концентрации среды, параметров, описывающих анизотропию коэффициентов переноса и т. д., исследуется необходимость учета вязких членов и термосил. Выписываются безразмерные критерии, при которых законы Ома значительно упрощаются (можно выбросить вязкие члены, градиенты давлений и т. д.).

1. Система уравнений для трехкомпонентной двутемпературной плазмы. Уравнения переноса для частично ионизованной многотемпературной плазмы имеют вид [8]

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = 0 \qquad (1.1)$$

$$m_\alpha n_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \nabla p_\alpha + \operatorname{div}(\pi_\alpha - m_\alpha n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha) - n_\alpha e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}\right) = \mathbf{R}_\alpha \qquad (1.2)$$

$$\frac{3}{2}\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{3}{2} p_\alpha \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{q}_\alpha + P_{\alpha ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - m_\alpha n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{F}_\alpha =$$

$$= 3k \sum_\beta m_\alpha m_\beta n_\alpha \tau_{\alpha\beta}{}^{-1}(T_\beta - T_\alpha) \qquad (1.3)$$

Здесь e_α, n_α, m_α — соответственно заряд, плотность и масса частиц α-сорта; c — скорость света, k — постоянная Больцмана, $\tau_{\alpha\beta}$ — время столкновения частиц α- и β-сортов; T_α, $\mathbf{q}_\alpha$, $\mathbf{u}_\alpha$ — температура, тепловой поток и средняя скорость α-компоненты плазмы. Кроме того, вводится средняя относительная скорость $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$ частиц α-сорта, где $\mathbf{u}$ — средняя скорость всей смеси. В (1.2) и (1.3) использованы обозначения

$$\frac{d_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \nabla), \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla), \qquad \mathbf{F}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right) - \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

$$P_{\alpha ik} = p_\alpha \delta_{ik} + \pi_{\alpha ik}$$

при этом $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, π_α — тензор вязких напряжений, а p_α — парциальное давление α-компоненты плазмы. Предполагается, что каждая из компонент является совершенным газом, т. е. $p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha$.

Плазма считается квазинейтральной $n_e \approx n_i$. Вид тепловых потоков и вязких членов, входящих в уравнения (1.2), (1.3), приведен в [9].

Введем плотность электрического тока $\mathbf{j} = -n_e e(\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i)$ и скорость проскальзывания ионов $\mathbf{s} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a$. Тогда для $\mathbf{R}_\alpha$ имеем

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha^{(1)} + \mathbf{R}_\alpha^{(2)}, \qquad \mathbf{R}_\alpha^{(1)} = \mathbf{R}_\alpha^{(j)} + \mathbf{R}_\alpha^{(s)}, \qquad \mathbf{R}_\alpha^{(2)} = \mathbf{R}_\alpha^{(t)} + \mathbf{R}_\alpha^{(T)}$$

$$\mathbf{R}_\alpha^{(j)} = \gamma_\alpha^{\parallel}\mathbf{j}_\parallel + \gamma_\alpha^{\perp}\mathbf{j}_\perp + \frac{\gamma_\alpha^\wedge}{B}\mathbf{j}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{R}_\alpha^{(s)} = \nu_\alpha^{\parallel}\mathbf{s}_\parallel + \nu_\alpha^{\perp}\mathbf{s}_\perp + \frac{\nu_\alpha^\wedge}{B}\mathbf{s}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{R}_\alpha^{(t)} = \delta_\alpha^{\parallel}\nabla_\parallel T_e + \delta_\alpha^{\perp}\nabla_\perp T_e + \frac{\delta_\alpha^\wedge}{B}\nabla T_e\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{R}_\alpha^{(T)} = \vartheta_\alpha^{\parallel}\nabla_\parallel T + \vartheta_\alpha^{\perp}\nabla_\perp T + \frac{\vartheta_\alpha^\wedge}{B}\nabla T\times\mathbf{B}$$

Символы $\parallel$ и $\perp$ у векторов указывают, что берутся компоненты, соответственно параллельные и перпендикулярные магнитному полю; γ_α, ν_α, δ_α, ϑ_α связаны с χ_α, μ_α, λ_α, используемыми в [9]:

$$\gamma_\alpha^{\parallel(\perp,\wedge)} = \frac{a_\alpha^{\parallel(\perp,\wedge)}}{n_e e} - \chi_e^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(1)} - \chi_i^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(2)} - \chi_a^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(3)}$$

$$\nu_\alpha^{\parallel(\perp,\wedge)} = d_\alpha^{\parallel(\perp,\wedge)} - \mu_e^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(1)} - \mu_i^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(2)} - \mu_a^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(3)}$$

$$\delta_\alpha^{\parallel(\perp,\wedge)} = -\lambda_e^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(1)}, \qquad \vartheta_\alpha^{\parallel(\perp,\wedge)} = -\lambda_i^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(2)} - \lambda_a^{\parallel(\perp,\wedge)} b_\alpha^{(3)}$$

$$a_\alpha^{\parallel} = a_\alpha^{\perp} = a_\alpha, \qquad d_\alpha^{\parallel} = d_\alpha^{\perp} = d_\alpha, \qquad a_\alpha^{\wedge} = d_\alpha^{\wedge} = 0$$

$$a_i = -n_i m_e \tau_{ie}^{-1}, \quad a_a = -n_e m_e \tau_{ea}^{-1}, \quad d_i = -{}^1/_2 n_i m_a \tau_{ia}^{-1}, \quad d_e = a_a$$

$$b_i^{(1)} = -\frac{a_i}{5p_e}, \qquad b_e^{(2)} = -\frac{\varepsilon a_i}{5p_i}, \qquad b_e^{(3)} = -\frac{\varepsilon a_a}{5p_a} \tag{1.4}$$

$$b_a^{(1)} = -\frac{d_e}{5p_e}, \qquad b_a^{(2)} = -\frac{d_i}{10p_i}, \qquad b_i^{(3)} = -\frac{d_i}{10p_a}, \qquad \varepsilon = \frac{m_e}{m_i}$$

При этом имеют место условия

$$\sum_\alpha a_\alpha = \sum_\alpha d_\alpha = 0, \qquad \sum_\alpha b_\alpha^{(l)} = 0 \qquad (l = 1, 2, 3) \tag{1.5}$$

Для замыкания системы (1.1)—(1.3) нужно использовать уравнения состояния для каждой компоненты и уравнения Максвелла.

2. Анализ коэффициентов переноса. Для практического использования коэффициентов требуется знание динамики столкновений частиц. Будем для определенности считать, что частицы всех компонент представляют собою сферы и что столкновение заряженной и нейтральной, а также двух нейтральных частиц между собою описывается законами упругого удара [1]. В соответствии с этим для геометрических сечений столкновений частиц α- и β-сорта $Q_{\alpha\beta}$ имеем выражения

$$Q_{aa} = Q_{ia} = 4Q_{ea}, \qquad Q_{ea} = \pi a_0^2$$

где a_0 — радиус первой боровской орбиты. Для заряженных частиц примем кулоновское взаимодействие. При известных $Q_{\alpha\beta}$ становятся известными и времена столкновений $\tau_{\alpha\beta}$ (формулы (2.16) — (2.18) работы [9]).

Введем параметры $\omega_e\tau_e^*$, $\omega_i\tau_i^*$ и $\omega_i\tau_{ia}$, характеризующие анизотропию. Здесь ω_e и ω_i — циклотронные частоты электронов и ионов, равные [6]

$$\omega_e = \frac{eB}{m_e c} = 1.76\cdot 10^7 B, \qquad \omega_i = \frac{eB}{mc} = 0.96\cdot 10^4 \frac{m_p}{m} B$$

где m_p — масса протона, $e = |e_e|$ — заряд электрона.

Для эффективных времен между столкновениями имеем выражения [9]

$$\tau_e^{*-1} = 0.4\tau_{ee}^{-1} + 1.3(\tau_{ei}^{-1} + \tau_{ea}^{-1}), \qquad \tau_i^{*-1} = 0.4\tau_{ii}^{-1} + 0.74\tau_{ia}^{-1} + 3\varepsilon\tau_{ie}^{-1}$$

Параметры $\omega_e\tau_e^*$ и $\omega_i\tau_{ia}$ связаны соотношением

$$\omega_i\tau_{ia} = {}^1/_{80}\,\varepsilon^{1/2}\theta^{-1/2}[13\sqrt{2} + (13\sqrt{2} + 8)\tau]\,\omega_e\tau_e^*$$

$$\left(\theta = \frac{T}{T_e}, \quad \tau = \frac{\tau_{ea}}{\tau_{ei}} = Q\alpha, \quad \alpha = \frac{n_i}{n_a}, \quad Q = \frac{Q_{ei}}{Q_{ea}} \approx 5\cdot 10^{10}\frac{\ln\Lambda}{T_e^2}\right)$$

Здесь $\ln\Lambda$ — кулоновский логарифм; для не слишком плотной плазмы $\ln\Lambda \approx 10$.

Отметим, что параметр τ существенно связан со степенью ионизации плазмы. Так, $\tau \to \infty$ соответствует полностью ионизованный плазме (в реальном диапазоне температур), а $\tau \to 0$ соответствует слабо ионизованной плазме.

Нетрудно видеть, что в зависимости от величин T_e и α параметр $\omega_i\tau_{ia}$ может быть как меньше, так и больше параметра $\omega_e\tau_e^*$, однако всегда при этом $\omega_i\tau_i^* \ll \omega_e\tau_e^*$.

Проведем оценки в коэффициентах трения (1.4). Три последних слагаемых в выражениях для $\gamma_\alpha\|$, $\gamma_\alpha\perp$, $\nu_\alpha\|$, $\nu_\alpha\perp$, а также коэффициенты $\gamma_\alpha\wedge$, $\nu_\alpha\wedge$ появляются вследствие учета в уравнениях движения членов, пропорциональных относительным тепловым потокам компонент.

Вклады тепловых потоков ионов и нейтралов (третье и четвертое слагаемое) в выражениях (1.4) для $\gamma_e\|$, $\gamma_e\perp$, по сравнению с вкладом теплового потока электронов (второе слагаемое), имеют соответственно порядки

$$\varepsilon^{1/2}\theta^{3/2}\tau(1+\tau)^{-1} \ll 1, \qquad \varepsilon^{5/2}\theta^{-3/2}(1+\tau)^{-1} \ll 1$$

так что ими можно пренебречь и получить

$$\gamma_e\| = \frac{a_e}{n_e e}(1-x), \qquad \gamma_e\perp = \frac{a_e}{n_e e}\left(1 - \frac{x}{1+\omega_e^2\tau_e^{*2}}\right), \qquad \gamma_e\wedge = -\frac{a_e}{n_e e}\frac{x\omega_e\tau_e^*}{1+\omega_e^2\tau_e^{*2}} \qquad (2.1)$$

$$\left(x = \frac{1-3\tau}{13 + (13 + 4\sqrt{2})\tau}\right)$$

Легко видеть, что в этих выражениях главную роль играет первый член.

Сравним члены в выражениях (1.4) для γ_i, γ_a.

Если $\varepsilon\theta^{5/2} \ll \tau \ll \varepsilon^{-1}\theta Q$, то в выражениях для коэффициентов γ_i, γ_a также можно пренебречь вкладами тепловых потоков ионов и нейтралов по сравнению с электронами, и поэтому коэффициенты приобретают такой же вид, как и выражения для γ_e (2.1), с заменой a_e на a_i и a_a соответственно. В общем случае в коэффициентах γ_i можно пренебречь лишь вкладом нейтралов. При этом вклад теплового потока ионов может быть как меньше вклада электронного теплового потока, так и значительно превосходить его. В выражениях (1.4) для γ_a можно не учитывать вклад теплового потока ионов. Вклад нейтралов может быть как меньше, так и значительно больше вклада электронов. Из анализа выражений (2.1) заключаем, что в предельном случае при $\omega_e\tau_e^* \to \infty$ коэффициент трения $\gamma_e\|$ на 16% больше $\gamma_e\perp$, если $\tau \to \infty$, и лишь на 7%, если $\tau \ll 1$. В случае конечных τ различие коэффициентов $\gamma_e\|$ и $\gamma_e\perp$ заключено в этих пределах.

[1] Во всех оценках, проводимых в дальнейшем, существенным образом используются порядки отношений $Q_{\alpha\beta} / Q_{\gamma\delta}$. В общем случае для оценки этих отношений можно воспользоваться теоретическими и экспериментальными данными работ [11–14].

Зная коэффициент [1]

$$\mu_e^{\parallel} = -5p_e y, \qquad y = 10^{-1}\,[13 + (13 + 4\sqrt{2})\,\tau]^{-1} + \frac{20\varepsilon Q\,(1-\theta)}{13Q + (13 + 4\sqrt{2})\,\alpha}\,\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

можно произвести оценки в выражениях для ν_α. При этом оказывается, что в коэффициентах $\nu_e^{\parallel}$ и $\nu_e^{\perp}$ можно пренебречь последними тремя слагаемыми по сравнению с первым, а в $\nu_e^{\wedge}$ — вторым и третьим слагаемым. В результате получаем

$$\nu_e^{\parallel} = \nu_e^{\perp} = a_e, \qquad \nu_e^{\wedge} = a_e y\,(1+\tau)\,\omega_e\tau_e^*\,(1 + \omega_e^2\tau_e^{*2})^{-1}$$

В выражениях (1.4) для $\nu_i^{\parallel}$, $\nu_i^{\perp}$ всегда можно пренебречь вторым и четвертым слагаемыми по сравнению с первым. В том случае, если $\theta \lesssim \varepsilon$, т. е. температура электронов значительно превосходит температуру ионов, при $\tau \to 0$ третье слагаемое в выражениях для $\nu_i^{\parallel}$ и $\nu_i^{\perp}$ (вклад теплового потока ионов) превосходит первое, так что эти коэффициенты могут существенно отличаться друг от друга.

Если $\alpha \ll \varepsilon^{-1/2}\,\theta^{-1/2}$, то $\nu_a^{\parallel} = \nu_a^{\perp} = d_a$, а в выражении (1.4) для $\nu_a^{\wedge}$ можно пренебречь первым слагаемым; при этом оказывается, что

$$\nu_a^{\wedge} \sim d_a y \theta^{-1/2}\,\omega_e\tau_e^*\,(1 + \omega_e^2\tau_e^{*2})^{-1}$$

При $\alpha \gtrsim \varepsilon^{-1/2}\,\theta^{-1/2}$ член, связанный с вкладом теплового потока нейтралов в коэффициентах $\nu_a^{\parallel}$ и $\nu_a^{\perp}$ (четвертое слагаемое), имеет один порядок с первым слагаемым, и между $\nu_a^{\parallel}$, $\nu_a^{\perp}$ может быть существенное различие. В выражении (1.4) для $\nu_a^{\wedge}$ в этом случае остается лишь последний член. Нетрудно видеть, что в слабо ионизованной плазме при $\varepsilon\theta^{5/2} \ll \tau \ll 1$ выражение для $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ упрощается.

$$\mathbf{R}_\alpha^{(1)} = \frac{a_\alpha}{n_e e}\,\mathbf{j} + d_\alpha \mathbf{s}$$

Так, при $T_e \sim 10^4$ °K, $T_i \sim 10^3$ °K (что соответствует $\theta \sim 10^{-1}$) в выражении для силы трения можно пренебречь анизотропией при $10^{-9} \ll \alpha \ll 10^{-3}$. Если же

$$\tau \ll \max\{\varepsilon^{-3/2}\theta^{1/2},\ \varepsilon^{-1/2}\theta^{-1/2}Q\}$$

(при указанных выше температурах электронов и ионов это соответствует $\alpha \ll 10^2$), то в выражении для $\mathbf{R}_\alpha^{(1)}$ можно пренебречь анизотропией силы трения между ионной и нейтральной компонентами

$$\mathbf{R}_\alpha^{(1)} = \gamma_\alpha^{\parallel}\,\mathbf{j}_{\parallel} + \gamma_\alpha^{\perp}\,\mathbf{j}_{\perp} + \frac{\gamma_\alpha^{\wedge}}{B}\,\mathbf{j}\times\mathbf{B} + d_\alpha \mathbf{s}$$

В общем случае каждая из компонент характеризуется тремя коэффициентами теплопроводности. Если $\omega_i\tau_i^* \ll 1$, то имеем лишь один коэффициент теплопроводности $\lambda_i^{\parallel} = \lambda_i^{\perp}$ у ионов и один коэффициент $\lambda_a^{\parallel} = \lambda_a^{\perp}$ у нейтралов. В изотропном случае, т. е. при $\omega_e\tau_e^* \ll 1$, у электронов остается также только один коэффициент $\lambda_e^{\parallel} = \lambda_e^{\perp}$ и, кроме того, получаются простые выражения для сил трения

$$\mathbf{R}_\alpha^{(1)} = \gamma_\alpha^{\parallel}\,\mathbf{j} + \nu_\alpha^{\parallel}\,\mathbf{s}, \qquad \mathbf{R}_\alpha^{(2)} = \delta_\alpha^{\parallel}\,\nabla T_e + \vartheta_\alpha^{\parallel}\,\nabla T$$

Легко установить, что всегда

$$\frac{\delta_a^{\parallel}}{\delta_e^{\parallel}} = \frac{\delta_a^{\perp}}{\delta_e^{\perp}} = \frac{\delta_a^{\wedge}}{\delta_e^{\wedge}} = \frac{1}{1+\tau}, \quad \frac{\vartheta_a^{\parallel}}{\vartheta_e^{\parallel}} \sim \frac{\alpha\,(1-\beta)\varepsilon^{-3/2}\,\theta^{1/2}}{\alpha + \beta + \alpha\theta^2\,(1+\alpha)} \quad \left(\beta = \frac{Q_{aa}}{Q_{ii}} \sim 10^{-10}\,\frac{T^2}{\ln\Lambda}\right) \qquad (2.2)$$

3. Преобразование уравнений движения. Вместо скоростей компонент $\mathbf{u}_\alpha$ введем среднюю скорость $\mathbf{u}$, плотность тока $\mathbf{j}$ и скорость проскальзывания ионов $\mathbf{s}$ и перейдем к уравнению движения для смеси в целом и двум диффузионным уравнениям

$$\mathbf{u} = \frac{m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i + m_a n_a \mathbf{u}_a}{m_e n_e + m_i n_i + m_a n_a} \approx \frac{n_i \mathbf{u}_i + n_a \mathbf{u}_a}{n_i + n_a}$$

Здесь и далее предполагаем, что $m_i = m_a = m$, $\varepsilon = m_e / m \ll 1$.

---

[1] П о л я н с к и й В. А. Явления переноса в многотемпературной плазме. Канд. дис., МГУ, 1965.

Легко показать, что

$$\mathbf{u}_e = -\frac{1}{n_e e}\mathbf{j} + \xi_a \mathbf{s} + \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}_i = \xi_a \mathbf{s} + \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}_a = -\xi_i \mathbf{s} + \mathbf{u} \tag{3.1}$$

$$\xi_a = \frac{m_a n_a}{m_e n_e + m_i n_i + m_a n_a} \approx \frac{n_a}{n_i + n_a}, \qquad \xi_i \approx \frac{n_i}{n_i + n_a}$$

где ξ_a и ξ_i — относительные концентрации нейтралов и ионов.

Суммируя уравнения движения (1.2), получаем

$$m(n_i + n_a)\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p - \operatorname{div}\pi + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B} \tag{3.2}$$

$$p = p_e + p_i + p_a, \qquad \pi = \pi_e + \pi_i + \pi_a$$

где p, π — давление и тензор вязкости всей смеси. Следуя обычной схеме, выведем диффузионные соотношения. Обозначим

$$m_\alpha n_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} - \operatorname{div} m_\alpha n_\alpha \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \operatorname{div} m_\alpha n_\alpha (\mathbf{u}\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}\mathbf{u} + \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}) \equiv \mathbf{I}_\alpha$$

и введем характерные параметры: размер L, скорость U и время $T = L / U$. Пренебрегая членом I_e по сравнению с I_i (здесь учтено, что $\varepsilon \ll 1$), сложим уравнения движения для электронов и ионов. Заменим в получившемся соотношении $\mathbf{u}_i$, а в уравнении движения для нейтралов — $\mathbf{u}_a$ на $\mathbf{u}$. Такая замена соответствует пренебрежению членами порядков $\xi_a s / T$ и $\xi_i s / T$ по сравнению с членами s / τ_{ia} и s / τ_{ai}, содержащимися в правых частях уравнений. Исключая из этих двух выражений член $d\mathbf{u} / dt$, приходим к уравнению, связывающему $\mathbf{s}_\parallel$, $\mathbf{s}_\perp$ и $\mathbf{s}\times\mathbf{B}$. Из этого уравнения нетрудно найти один из законов Ома: выражение для $\mathbf{s} = \mathbf{s}_\parallel + \mathbf{s}_\perp$. Подставим $\mathbf{s}_\parallel$, $\mathbf{s}_\perp$ и $\mathbf{s}\times\mathbf{B}$ в правую часть уравнения движения электронной компоненты и воспользуемся при записи силы Лоренца первым соотношением (3.1). Пренебрегая I_e по сравнению с электромагнитным членом, получаем обобщенный закон Ома (связь $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$).

Ограничимся рассмотрением частично ионизованной плазмы, когда $\alpha \lesssim 1$. Принимая во внимание (1.5) и опуская члены высшего порядка малости, находим, что законы Ома имеют вид

$$\mathbf{s} = r^\parallel \mathbf{j}_\parallel + r^\perp \mathbf{j}_\perp - r^\wedge \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \frac{1}{d_i}(\mathbf{G} + \mathbf{K} + \mathbf{R}_a^{(2)}) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma^\parallel}\mathbf{j}_\parallel + \frac{1}{\sigma^\perp}\mathbf{j}_\perp + \frac{1}{\sigma^\wedge}\mathbf{j}\times\mathbf{B} +$$

$$+ \varkappa^\parallel (\mathbf{G}_\parallel + \mathbf{K}_\parallel + \mathbf{R}_{a\parallel}^{(2)}) + \varkappa^\perp (\mathbf{G}_\perp + \mathbf{K}_\perp + \mathbf{R}_{a\perp}^{(2)}) -$$

$$- \varkappa^\wedge (\mathbf{G}\times\mathbf{B} + \mathbf{K}\times\mathbf{B} + \mathbf{R}_a^{(2)}\times\mathbf{B}) + \frac{1}{n_e e}(\mathbf{B}_e^{(2)} - \nabla p_e - \operatorname{div}\pi_e) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{G} = \xi_a \nabla (p_e + p_i) - \xi_i \nabla p_a, \qquad \mathbf{K} = \xi_a \operatorname{div}(\pi_e + \pi_i) - \xi_i \operatorname{div}\pi_a$$

После ряда упрощений, при которых существенно используются условия $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon\theta \ll 1$, $\alpha \lesssim 1$, $T_e \lesssim 10^4\,°\mathrm{K}$, коэффициенты, входящие в уравнения (3.3), (3.4), можно представить следующим образом:

$$r^\parallel = \frac{\gamma_a^\parallel}{d_i}, \qquad r^\perp = \frac{1}{n_e e}\left(n_e e \frac{\gamma_a^\perp}{d_i} + \xi_a \omega_i \tau_{ia}\right), \qquad r^\wedge = \frac{\xi_a}{c d_i}$$

$$\sigma^\parallel = \frac{n_e e}{\gamma_e^\parallel}, \qquad \sigma^\perp = \frac{n_e e}{\gamma_e^\perp (1 + \Delta)}, \qquad \sigma^\wedge = \frac{c n_e e}{1 + \xi_a \omega_i \tau_{ia}},$$

$$\varkappa^\parallel = \frac{1}{n_e e}\frac{d_e}{d_i}, \quad \varkappa^\perp = \frac{1}{n_e e}\left(\frac{d_e}{d_i} + \xi_a \frac{\nu_a^\wedge}{d_a}\omega_i \tau_{ia}\right), \quad \varkappa^\wedge = r^\wedge, \qquad \Delta = \xi_a^2 \omega_i \tau_{ia} \frac{B}{c\gamma_e^\perp}$$

4. Оценка членов в уравнениях (3.2)—(3.4). Будем считать, что в уравнении (3.2) порядок инерционного члена, сил давления и вязких сил не превышает порядка электромагнитных сил (в противном случае вообще можно пренебречь влиянием на среду электромагнитных сил).

Отсюда следует

$$|\nabla p| \lesssim \frac{1}{c}|\mathbf{j}\times\mathbf{B}|, \qquad |\operatorname{div}\pi| \lesssim \frac{1}{c}|\mathbf{j}\times\mathbf{B}| \tag{4.1}$$

Заметим, что при любых $\omega_e\tau_e^*$ и $\omega_i\tau_i^*$ среди пяти коэффициентов вязкости, которыми в общем случае характеризуется каждая компонента, есть, по крайней мере, один ($\eta_\alpha^{(0)}$), порядок которого больше или равен порядку остальных коэффициентов вязкости этой компоненты

$$\eta_e^{(0)} \sim p_e\tau_e, \qquad \eta_i^{(0)} \sim p_i\tau_i, \qquad \eta_a^{(0)} \sim p_a\tau_a$$

где τ_α выражаются формулами (2.6) работы [9].

Сравнивая коэффициенты вязкости, получаем

$$\frac{\eta_e^{(0)}}{\eta_a^{(0)}} \sim \varepsilon^{1/2}\theta^{-1/2}\frac{1+\alpha}{1+\tau}\alpha, \qquad \frac{\eta_i^{(0)}}{\eta_a^{(0)}} \sim \alpha\frac{1+\alpha}{1+\tau\theta^{-2}} \tag{4.2}$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $\alpha \lesssim 1$, $T_e \lesssim 10^4$ °K, из формул (4.2) заключаем, что в уравнении (3.2) вязкие силы целиком определяются нейтралами, т. е. $\pi = \pi_a$, так что

$$|\operatorname{div}\pi_e| \ll \frac{1}{c}|\mathbf{j}\times\mathbf{B}|, \qquad |\operatorname{div}\pi_i| \ll \frac{1}{c}|\mathbf{j}\times\mathbf{B}|, \qquad |\operatorname{div}\pi_a| \lesssim \frac{1}{c}|\mathbf{j}\times\mathbf{B}| \tag{4.3}$$

$$\mathbf{K} = -\xi_i \operatorname{div}\pi_a$$

Воспользовавшись этими оценками, находим, что в выражении (3.3) отношение вязких сил к электромагнитным имеет порядок

$$\frac{1}{r^\wedge d_i}\frac{|\mathbf{K}|}{|\mathbf{j}\times\mathbf{B}|} \lesssim \alpha \tag{4.4}$$

Принимая во внимание (4.3), легко видим, что в законе Ома (3.4) членом $\operatorname{div}\pi_e$ в последней скобке правой части всегда можно пренебречь, а отношения вязких членов $\varkappa^\parallel\mathbf{K}_\parallel$ и $\varkappa^\wedge\mathbf{K}\times\mathbf{B}$ к электромагнитному $(1/\sigma^\wedge)\,\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ имеют порядки

$$\varkappa^\parallel\sigma^\wedge\frac{|\mathbf{K}_\parallel|}{|\mathbf{j}\times\mathbf{B}|} \lesssim \varepsilon^{1/2}\theta\,[1 - y(1+\tau)], \qquad \varkappa^\wedge\sigma^\wedge\frac{|\mathbf{K}\times\mathbf{B}|}{|\mathbf{j}\times\mathbf{B}|} \lesssim \alpha\frac{\omega_i\tau_{ia}}{1+\omega_i\tau_{ia}} \tag{4.5}$$

Сравнивая коэффициенты переноса, получаем

$$\frac{r^\perp}{r^\parallel} \sim 1 + 10^{-1}(1+\tau)\,\omega_e\tau_e^*, \qquad \frac{r^\wedge B}{r^\perp} \sim \frac{(1+\tau)\,\omega_e\tau_e^*}{1+(1+\tau)\,\omega_e\tau_e^*}$$

$$\frac{\sigma^\perp}{\sigma^\parallel} \sim \frac{1}{1+\omega_e\tau_e^*\omega_i\tau_{ia}}, \qquad \frac{\sigma^\perp B}{\sigma^\wedge} \sim \frac{(1+\omega_i\tau_{ia})\,\omega_e\tau_e^*}{1+\omega_e\tau_e^*\omega_i\tau_{ia}} \tag{4.6}$$

$$\frac{\varkappa^\perp}{\varkappa^\parallel} \sim 1 - 10^{-1}y\frac{(1+\tau)\,\omega_e^2\tau_e^{*2}}{1+\omega_e^2\tau_e^{*2}}, \qquad \frac{\varkappa^\wedge B}{\varkappa^\parallel} \sim \frac{(1+\tau)(1+\omega_e\tau_e^*)\,\omega_e\tau_e^*}{1+\omega_e^2\tau_e^{*2}+y(1+\tau)(\omega_e\tau_e^*-1)\,\omega_e\tau_e^*}$$

При любых соотношениях между градиентами парциальных давлений имеют место оценки

$$|\mathbf{G}| \lesssim |\nabla p|, \qquad |\nabla p_e| \lesssim |\nabla p| \tag{4.7}$$

Будем считать, что

$$|\mathbf{E}| \sim \frac{1}{c}|\mathbf{u}\times\mathbf{B}| \tag{4.8}$$

Если же $|\mathbf{E}| \gg c^{-1}|\mathbf{u}\times\mathbf{B}|$, то член $c^{-1}\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ в (3.4) можно опустить.

5. Возможные формы законов Ома. Приведенные оценки (4.4), (4.5) показывают, что в законах Ома для трехкомпонентной плазмы, вообще говоря, необходимо учитывать вязкие члены. Выпишем возможные упрощенные формы этих соотношений. При этом будем существенным образом пользоваться оценками (2.2), (4.1)—(4.8), из которых заключаем, что относительная величина членов в законах Ома определяется величиной следующих безразмерных параметров: α, τ, θ, $\omega_e\tau_e^*$.

Легко показать, что при $\theta \gtrsim \varepsilon^{1/4}$ в выражении $\varkappa^{\parallel}\mathbf{R}_{a\parallel}^{(2)}$, входящем в правую часть (3.4), можно пренебречь членами, пропорциональными градиенту электронной температуры по сравнению с аналогичным слагаемым, входящим в член $(1 / n_e e)\,\mathbf{R}_e^{(2)}$. Если $\omega_e\tau_e^* \ll \varepsilon^{-3/4}\theta^{1/2}$, то соответствующими слагаемыми можно также пренебречь и в выражениях $\varkappa^{\perp}\mathbf{R}_{a\perp}^{(2)}$, $\varkappa^{\wedge}\mathbf{R}_a^{(2)} \times \mathbf{B}$, входящих в это же уравнение.

При дальнейших оценках будем сравнивать вязкие силы и силы давления с электромагнитными членами. При этом оказывается, что в обоих законах Ома в тех случаях, когда не нужно учитывать члены, пропорциональные $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, не нужно учитывать также силы вязкости и давления. Кроме того, в выражении (3.3) вязкость и градиенты давлений можно не учитывать в слабо ионизованной плазме, когда $\alpha \ll 1$, а в (3.4) вязкие члены выпадают при более слабом ограничении $\alpha\omega_i\tau_{ia} \ll 1$.

1°. Пусть $\omega_e\tau_e^* \sim 1$, $\varepsilon^{1/2}\beta \lesssim \alpha \ll 1$, $\theta \gtrsim \varepsilon^{1/4}$. Если $\tau \lesssim \varepsilon^{-1/4}$, то в выражении $(1 / n_e e)\,\mathbf{R}_e^{(2)}$ можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными $\nabla_{\parallel}T$, $\nabla_{\perp}T$, $\nabla T \times \mathbf{B}$, по сравнению с членами $\varkappa^{\parallel}\mathbf{R}_{a\parallel}^{(T)}$, $\varkappa^{\perp}\mathbf{R}_{a\perp}^{(T)}$, $\varkappa^{\wedge}\mathbf{R}_a^{(T)} \times \mathbf{B}$. Кроме того, из уравнения (3.3) выпадают градиенты давлений всех компонент, а в (3.4) остается лишь градиент электронного давления.

1°. 1. Если $\tau \sim \varepsilon^{-1/4}$ (например, пусть $T_e \sim 10^4$ °K, $\alpha \sim 10^{-2}$), то можно считать, что $\varkappa^{\parallel} = \varkappa^{\perp}$, однако $\sigma^{\parallel}$ и $\sigma^{\perp}$ существенно отличаются друг от друга; различие между $r^{\parallel}$ и $r^{\perp}$ менее значительно. В обоих законах Ома проявляется анизотропия в токах и термосилах. Законы Ома принимают вид

$$\mathbf{s} = r^{\parallel}\mathbf{j}_{\parallel} + r^{\perp}\mathbf{j}_{\perp} - r^{\wedge}\mathbf{j}\times\mathbf{B} + \frac{1}{d_i}\mathbf{R}_a^{(2)} \tag{5.1}$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma^{\parallel}}\mathbf{j}_{\parallel} + \frac{1}{\sigma^{\perp}}\mathbf{j}_{\perp} + \frac{1}{\sigma^{\wedge}}\mathbf{j}\times\mathbf{B} + \varkappa^{\parallel}\mathbf{R}_a^{(T)} -$$

$$- \varkappa^{\wedge}\mathbf{R}_a^{(T)}\times\mathbf{B} + \frac{1}{n_e e}(\mathbf{R}_e^{(t)} - \nabla p_e) \tag{5.2}$$

1°.2. Если $\tau \sim 1$ (при $T_e \sim 10^4$ °K это соответствует $\alpha \sim 10^{-3}$), то $r^{\perp}$ превышает $r^{\parallel}$ менее чем на 10%, а разница между $\sigma^{\parallel}$ и $\sigma^{\perp}$ может быть в несколько раз больше, чем между $r^{\perp}$ и $r^{\parallel}$. В диффузионном уравнении (3.3) можно не учитывать анизотропию в токах

$$\mathbf{s} = r^{\parallel}\mathbf{j} - r^{\wedge}\mathbf{j}\times\mathbf{B} + \frac{1}{d_i}\mathbf{R}_a^{(2)} \tag{5.3}$$

Второе соотношение имеет прежний вид (5.2).

1°.3. При $\tau \ll 1$ в обоих уравнениях исчезает анизотропия в токах. Законы Ома принимают вид

$$\mathbf{s} = r^{\parallel}\mathbf{j} - r^{\wedge}\mathbf{j}\times\mathbf{B} + \frac{1}{d_i}\mathbf{R}_a^{(2)} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma^{\parallel}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sigma^{\wedge}}\mathbf{j}\times\mathbf{B} + \varkappa^{\parallel}\mathbf{R}_a^{(T)} - \varkappa^{\wedge}\mathbf{B}_a^{(T)}\times\mathbf{B} + \frac{1}{n_e e}(\mathbf{R}_e^{(t)} - \nabla p_e)$$

В случаях (1°.2), (1°.3) можно считать, что

$$r^{\parallel} = r_0, \quad \sigma^{\parallel} = \sigma_0, \quad \sigma^{\perp} = \frac{\sigma_0}{1 + \xi_a^2\omega_e\tau_0\omega_i\tau_{ia}}, \quad \sigma^{\wedge} = cn_e e$$

$$r_0 = \frac{1}{n_e e}\frac{a_a}{d_i}, \quad \sigma_0 = \frac{n_e e^2\tau_0}{m_e}, \quad \tau_0^{-1} = \tau_{ei}^{-1} + \tau_{ea}^{-1} \tag{5.5}$$

и уравнения значительно упрощаются.

2°. Пусть $\varepsilon \lessapprox \omega_e \tau_e^* \ll 1$, $\theta \gtrsim \varepsilon^{1/4}$. Возможны следующие случаи.

2°. 1. Если $\alpha \sim 1$, $\tau \sim \varepsilon^{-3/4}$ (это соответствует $T_e \sim 10^4$ °K), то в первом соотношении необходимо учитывать вязкость нейтралов и силы давления; при этом анизотропия коэффициентов переноса отсутствует

$$\mathbf{s} = r^{\parallel}\mathbf{j} - r^{\wedge}\mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{d_i}(\mathbf{G} - \xi_i \operatorname{div} \pi_a + \mathbf{R}_a^{(2)}) \qquad (5.6)$$

Во втором выражении градиент электронного давления следует опустить, анизотропия также отсутствует

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma_0}\mathbf{j} + \varkappa^{\parallel}\mathbf{R}_a^{(T)} - \varkappa^{\wedge}\mathbf{R}_a^{(T)} \times \mathbf{B} + \frac{1}{n_e e}\mathbf{R}_e^{(t)} \qquad (5.7)$$

Второй член в правой части, вообще говоря, нельзя выбрасывать.

2°.2. При $\varepsilon^{1/2}\beta \lesssim \alpha \ll 1$ и $\tau \lesssim 1$ законы Ома приобретают вид

$$\mathbf{s} = r_0\mathbf{j} + \frac{1}{d_i}\mathbf{R}_a^{(2)} \qquad (5.8)$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma_0}\mathbf{j} + \varkappa^{\parallel}\mathbf{R}_a^{(T)} + \frac{1}{n_e e}\mathbf{R}_e^{(t)} \qquad (5.9)$$

3°. Если $\varepsilon^{1/2}\beta \lesssim \alpha \lesssim 1$, $\tau \lesssim \varepsilon^{-3/4}$, $\theta \gtrsim \varepsilon^{1/4}$, то при $\omega_e \tau_e^* \lesssim \varepsilon$ законы Ома сводятся к форме 2°.2.

При $|\nabla_{\parallel} T| / |\nabla_{\parallel} T_e| \sim |\nabla_{\perp} T| / |\nabla_{\perp} T_e| \lesssim 1$ во всех выписанных соотношениях можно опустить члены, пропорциональные градиенту ионной температуры.

Автор благодарит В. В. Гогосова за предложенную тему настоящей работы и внимательное руководство.

Поступила 26 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
2. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. Изд. иностр. лит., 1959.
3. Баранов В. Б., Любимов Г. А. О форме закона Ома в полностью ионизованном газе. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
4. Гогосов В. В. О возможных упрощениях уравнений полностью ионизованной двутемпературной плазмы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
5. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», Госатомиздат, 1963.
6. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
7. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
8. Алиевский М. Я., Жданов В. М. Уравнения переноса для неизотермической многосортной плазмы. ПМТФ, 1963, № 5.
9. Алиевский М. Я., Жданов В. М., Полянский В. А. Тензор вязких напряжений и тепловой поток в двутемпературном частично ионизованном газе. ПМТФ, 1964, № 3.
10. Полянский В. А. Диффузия и проводимость в частично ионизованной многотемпературной газовой смеси. ПМТФ, 1964, № 5.
11. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. Госатомиздат, 1961.
12. Месси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. Изд. иностр. лит., 1958.
13. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория жидкостей и газов. Изд. иностр. лит., 1961.
14. Dalgagno A. Charged particles in the upper atmosphere. Ann. geophys., 1961, vol. 17, p. 16 (русск. перев.: Успехи физ. наук, 1963, т. 79, № 1).