ОХЛАЖДЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ ГАЗА, ТЕКУЩЕГО В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

В. Н. Ветлуцкий, А. Т. Онуфриев

(*Новосибирск*)

Излагается приближенный метод решения задачи об охлаждении излучением серого газа, текущего в плоском канале. В качестве уравнений, описывающих перенос энергии излучением, приняты уравнения в диффузионном приближении [1, 2, 3]. Система уравнений решается методом интегральных соотношений А. А. Дородницына [4].

Чтобы получить качественные представления о рассматриваемой задаче и иметь возможность проверить точность численного метода, получены решения линейных задач.

В качестве примера реального течения газа приведен расчет для течения воздуха при начальной температуре потока 10 000° К и при давлениях 10 и 100 *атм*.

В работе не учитывается молекулярная или турбулентная теплопроводность, учет которой в некоторых случаях может сильно изменить картину распределения температуры.

Обозначения

V — скорость потока,
ρ — плотность газа,
p — давление,
T — температура,
m — молекулярный вес,
R_0 — абсолютная газовая постоянная,
γ — отношение удельных теплоемкостей,
h — энтальпия,
q — плотность потока энергии, определяемого излучением,
q_- — плотность потока энергии, определяемого молекулярной теплопроводностью,
l — длина пробега излучения,
$\varkappa$ — коэффициент поглощения,
u — плотность излучения,
c — скорость света,
u_1 — равновесная плотность излучения,
a — полуширина канала,
λ — поправочный множитель в граничном условии,
M — отношение скорости потока к скорости звука,
τ_* — половина оптической толщины канала на входе,
N — число Нуссельта,
R — число Рейнольдса,
P — число Прандтля

$$p = \frac{\rho R T}{m}, \qquad l = \frac{1}{\varkappa}, \qquad \lambda = \lambda\left(\frac{a}{l}\right), \qquad 2\tau_* = \frac{2a}{l_*}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \qquad u_1 = \frac{4\sigma T^4}{c}, \qquad M = \frac{V}{a_0}, \qquad A = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\sigma T_*^{\,4}}{P_* V_*}$$

Индекс $*$ обозначает значение величины на входе в канал.

1. **Уравнения.** Будет рассматриваться такой интервал температур, в котором можно пренебречь плотностью излучения по сравнению с внутренней энергией газа, что позволяет сделать упрощения в уравнении энергии. Принята гипотеза локального термодинамического равновесия: газ излучает по закону Планка в соответствии с температурой вещества в рассматриваемой точке. Пробег излучения принят усредненным по частотам. Уравнения переноса излучения взяты в диффузионном приближении. Молекулярная теплопроводность не учитывается. Это соответствует случаям, когда $q \gg q_-$ в ядре потока. Влияние молекулярной теплопроводности скажется лишь на изменении профиля температуры у стенки канала, а величина плотности потока тепла сохранится. Если же q_- сравнимо и больше q, то учет молекулярной теплопроводности при тех же условиях приведет к изменению профиля температуры и величины плотности потока тепла к стенке канала. Этот эффект хорошо показан в работе [5], где рассматривалось течение Куэтта для серого излу-

чающего газа между плоскими стенками, имеющими разные температуры и излучающимися, как черные тела. Уравнения переноса энергии излучением и уравнение энергии имеют вид

$$l \operatorname{div} \mathbf{q} = cu_1 - cu, \qquad \mathbf{q} = -\frac{l}{3} \operatorname{grad} cu$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{V}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = -\operatorname{div} \mathbf{q} \tag{1.1}$$

2. Граничные условия. Примем, что со стороны стенок нет входящего в поток излучения. Граничные условия в диффузионном приближении

$$|q_n| = \left|\frac{l}{3}\frac{\partial cu}{\partial n}\right| = \frac{cu}{2} \tag{2.1}$$

неточны. Для их уточнения в теории переноса нейтронов [6] предлагается прием, заключающийся во введении в граничное условие множителя, который зависит от отношения пробега излучения и характерного геометрического размера задачи. Коэффициент $\lambda = \lambda(a / l)$ определяется из точного решения какого-либо простейшего случая для рассматриваемой геометрии задачи. В качестве такой простой задачи взят случай излучения газа, помещенного между двумя плоскостями и имеющего постоянную температуру

$a/l = 0$	0.1	0.15	0.3	0.6	1.0	2.0	3.0	∞
$\lambda = 1.333$	1.136	1.062	0.952	0.859	0.804	0.762	0.758	0.757

Таким образом, граничные условия имеют вид

$$|q_n| = \left|\frac{l}{3}\frac{\partial cu}{\partial n}\right| = \frac{cu}{3\lambda}$$

3. Течение излучающего газа в плоском канале. Рассматривается следующая задача. Поток горячего газа, параллельный оси x, втекает в канал, ширина которого $2a$. Температура потока в начальном сечении T_*, температура стенок канала принимается равной нулю. Делаем следующие упрощения: жидкость идеальная, линии тока остаются параллельными оси канала, величина скорости потока ограничена неравенством $M^2 \ll 1$, давление постоянно во всем потоке, поперечные плотности потоков тепла много больше продольных, это справедливо при условии $A \ll 1$.

С учетом сделанных предположений система уравнений запишется в виде

$$c'_p \frac{\partial T'}{\partial x'} = -\frac{\partial q'}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial q'}{\partial y'} = 4\tau_* \frac{T'^4 - \varphi}{l'}, \qquad q' = -\frac{4l'}{3\tau_*}\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0 \quad \text{при } y' = 0, \qquad q' = \frac{4}{3}\frac{\varphi}{\lambda} \quad \text{при } y' = 1$$

с начальным условием $T' = 1$ при $x' = 0$

Здесь введены безразмерные величины

$$T' = \frac{T}{T_*}, \qquad q' = \frac{q}{\sigma T_*^4}, \qquad \varphi = \frac{cu}{4\sigma T_*^4}, \qquad c'_p = \frac{c_p}{c_{p*}}$$

$$l' = \frac{l}{l_*}, \qquad \tau_* = \frac{a}{l_*}, \qquad y' = \frac{y}{a}, \qquad x' = A\frac{x}{a}$$

1°. Вначале рассмотрим некоторые «модельные» линейные задачи, которые решаются точно и дают качественную картину течения. Для линеаризации уравнений примем $l = 1$ и $c'_p = T'^3$. В этом случае получаем уравнение

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x' \partial y'^2} + 16\tau_* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} - 3\tau_*^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = 0$$

с граничными условиями

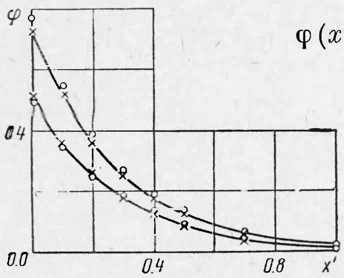
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0 \quad \text{при } y' = 0, \qquad \varphi = -\frac{\lambda}{\tau_*}\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \quad \text{при } y' = 1, \quad x' \geqslant 0$$

$$T' = 1 \quad x' = 0, \quad \text{при } -1 \leqslant y' \leqslant 1$$

Уравнение решается преобразованием Лапласа [7]. Для плотности излучения получается выражение

$$\varphi(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\cos(\tau_* \sqrt{3}\, k_n y')}{\cos(\tau_* \sqrt{3}\, k_n)} \exp\left(-\frac{16\tau_* k_n^2}{1 + k_n^2} x'\right) \tag{3.2}$$

$$D_n = 2(1 + k_n^2)^{-1}\left[1 + \frac{\tau_*}{\lambda}(1 + 3\lambda^2 k_n^2)\right]^{-1}$$



Фиг. 1

Здесь k_n — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}(\tau_* \sqrt{3}\, k_n) = \lambda \sqrt{3}\, k_n \tag{3.3}$$

При замене переменной $t = x / V$ получим задачу о нестационарном охлаждении полосы газа, которая рассматривалась в работе [8].

На фиг. 1 приведены зависимости плотности излучения по длине канала: верхняя кривая $\varphi(x', 0)$ на оси; нижняя кривая $\varphi(x', 1)$ на стенке в случае $\lambda = 0.757$, $\tau_* = 2/3$, рассчитанные по формуле (3.2); точки $n = 1$ и крестики $n = 2$ вычислены по методу интегральных соотношений. Поток тепла зависит от оптической толщины канала. С ростом τ_* количество тепла, приходящего на стенку канала фиксированной длины, резко растет, достигает максимума при $\tau_* = 1 \div 3$ и затем уменьшается [1].

2°. Рассмотрим в линейной постановке случай, когда вдоль стенок канала параллельно основному потоку подается холодный газ. Считается, что перемешивания нет, и принимаются все прежние предположения. В этом случае принимаем в граничном условии коэффициент $\lambda = 2/3$, а уравнение переноса энергии излучением возьмем в виде

$$\frac{4}{3}\, l \operatorname{div} \mathbf{q} = cu_1 - cu \tag{3.4}$$

Система уравнений для обеих областей течения сводится к двум уравнениям вида (3.1), которые решаются преобразованием Лапласа. Принимая $A_1 / l_1 = A_2 / l_2$, получаем решение в виде конечных формул. На стенке канала величина плотности излучения будет

$$\varphi_2(x', 1) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_0 + (1 - \theta_0)\sin \tau_1 z_n [\sin(\tau_1 + \tau_2) z_n]^{-1}}{(1 + z_n^2)[1 + (\tau_1 + \tau_2)(1 + z_n^2)]} \exp\frac{-z_n^2 x'}{1 + z_n^2}$$

$$\theta_0 = \left(\frac{T_{2*}}{T_{1*}}\right)^4, \qquad \tau_1 = \frac{2a_1}{3l_1}, \qquad \tau_2 = \frac{2a_2}{3l_2}, \qquad x' = \frac{A_1}{l_1} x \tag{3.5}$$

Здесь z_n — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}(\tau_1 + \tau_2) z_n = z_n \tag{3.6}$$

На фиг. 2 приведены зависимости плотности потока энергии на стенке канала при $\theta_0 = 10^{-4}$, $\tau_1 = 1$ и различных значениях оптической толщины экранирующего слоя τ_2. Полагая $\tau_1 = \infty$, получаем течение в полубес-

[1] Качественный характер лучистого теплообмена в потоке излучающей среды в плоском и цилиндрическом каналах был исследован в работе [9] на основе приближенного рассмотрения переноса излучения с пренебрежением лучистым обменом между отдельными элементами среды.

конечном пространстве с защитным слоем

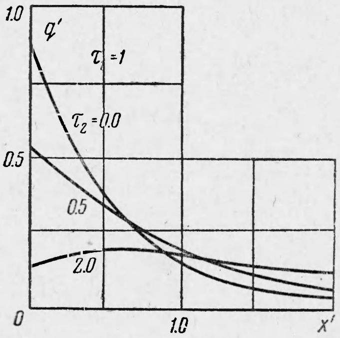
$$\varphi_2(x', 1) = \frac{\theta_0}{2} \exp \frac{-x'}{2} \left[I_1\left(\frac{x'}{2}\right) + I_0\left(\frac{x'}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi}(1 - \theta_0) \int_0^\infty (\cos \tau_2 z - z \sin \tau_2 z)(1 + z^2)^{-2} \exp\left(\frac{-z^2 x'}{1 + z^2}\right) dz \qquad (3.7)$$

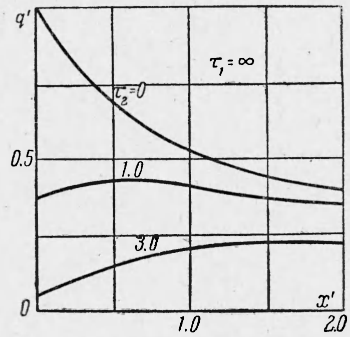
На фиг. 3 дана зависимость плотности потока тепла на стенке канала от x' для различных значений τ_2.

При $\tau_2 = 0$ переходим к случаю обтекания пластины полубезграничным потоком [10].

Экранирующий слой даже при небольшой его оптической толщине может значительно снизить плотность потока тепла вблизи от входа. При удалении вниз по потоку экранирующее влияние ослабевает.



Фиг. 2

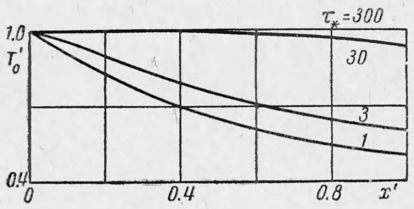


Фиг. 3

4. Нелинейный случай. Применение метода интегральных соотношений А. А. Дородницына. Систему уравнений запишем в виде

$$c'_p \frac{\partial T'}{\partial x'} = 4\tau_* \frac{\varphi - T'^4}{l'}, \qquad \frac{\partial q'}{\partial y'} = -4\tau_* \frac{\varphi - T'^4}{l'}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = -\frac{3}{4}\tau_* \frac{q'}{l'} \qquad (4.1)$$

В n-м приближении между осью и стенкой канала проводится $n - 1$-линия на равном расстоянии. Правые части уравнений аппроксимируются полиномами



Фиг. 4

$$\frac{\varphi - T'^4}{l'} = \sum_{k=0}^{N} A_k (y')^{2k}$$
$$\frac{q'}{l'} = \sum_{k=1}^{N} B_k (y')^{2k-1} \qquad (4.2)$$

Коэффициенты A_k и B_k выражаются через значения функций на линиях. Эти аппроксимации подставляются в правые части второго и третьего уравнений системы, и уравнения интегрируются поперек канала от оси до каждой линии. В результате получается $2n$ соотношений.

Первое уравнение записывается вдоль каждой $n + 1$-линии. С учетом граничного условия

$$q_1' = \frac{4}{3\lambda} \varphi_1'$$

(индексом 1 обозначены величины на стенке, индексом 0 — на оси канала) система замыкается. Условие $q_0' = 0$ выполняется тождественно.

Численное интегрирование аппроксимирующей системы

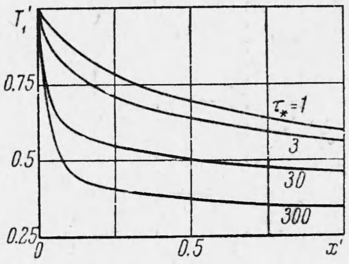
$$c'_{p_0}\frac{dT_0'}{dx'} = 4\tau_*\frac{\varphi_0 - T_0'^4}{l_0'}$$

$$c'_{pi}\frac{dT_i'}{dx'} = 4\tau_*\frac{\varphi_i - T_i'^4}{l_i'}$$

$$q_i' = -4\tau_*\sum_{k=0}^{N}\frac{A_k}{2k+1}(y')^{2k+1}$$

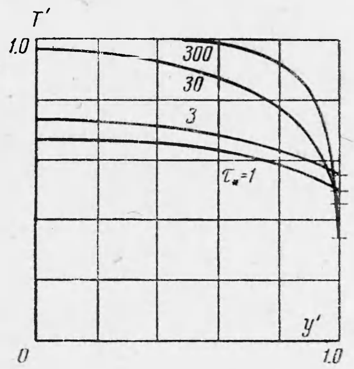
$$\varphi_i - \varphi_0 = -\frac{3}{4}\tau_*\sum_{k=1}^{N}\frac{B_k}{2k}(y')^{2k}$$

$$q_1' = \frac{4}{3\lambda}\varphi_1 \qquad (4.3)$$

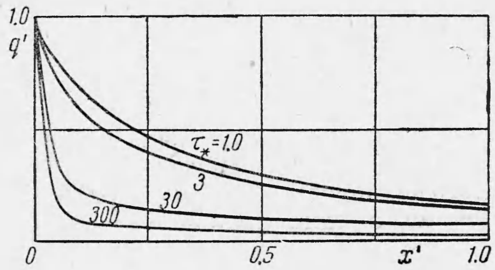


Фиг. 5

проведено на электронной машине СО АН. Совпадение с требуемой точностью результатов в двух последних приближениях свидетельствует о практической сходимости метода. Для проверки точности метода проведено сравнение результатов счета с аналитическим решением, полученным для линейной задачи в предыдущем пункте.

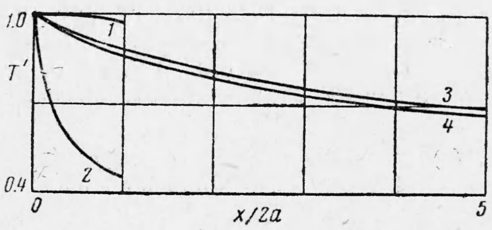


Фиг. 6



Фиг. 7

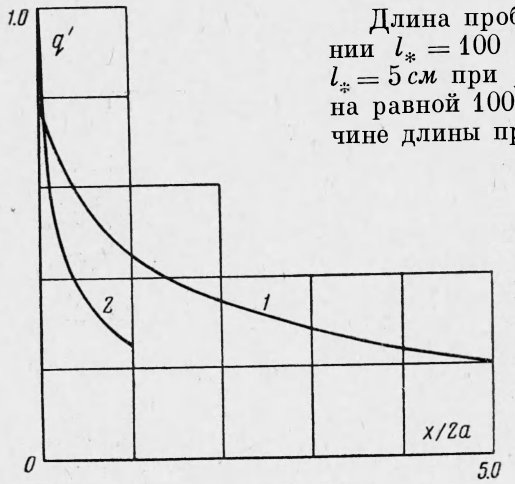
Это сравнение приведено на фиг. 1. Распределения температуры при $c_p' = 1$, $l' = 1$, $\lambda = 0.757$ и значениях $\tau_* = 1.3$, 30, 300 приведены на фиг. 4 — по длине канала на оси, на фиг. 5 — по длине канала на стенке и на фиг. 6 — поперек канала на расстоянии от входа $x = 1$, на фиг. 7 — плотности потока тепла. Для τ_* порядка единицы достаточно третьего приближения, для $\tau_* = 30$ необходимо десятое и для $\tau_* = 300$ в окрестности входа ($0 \leqslant x' \leqslant 0.2$) десятого приближения оказалось недостаточно. С увеличением x' сходимость улучшается. Аппроксимация тригонометрическими функциями оказалась хуже.



Фиг. 8

5. **Расчет течения воздуха, имеющего начальную температуру 10000° K, при охлаждении его только излучением.** В качестве примера реального течения газа были просчитаны случаи течения воздуха при начальной температуре на входе в канал 10000° K и давлениях в потоке, равных 10 и 100 *атм*. Значения c_p' были представлены в виде рядов по тригонометрическим функциям с погрешностью менее одного процента по данным работы [11]. Значения коэффициентов поглощения взяты из работы [12] и аппроксимированы степенными зависимостями от температуры с погрешностью до 10% в отдельных точках

$$l' = (T')^{-3.2}$$



Фиг. 9

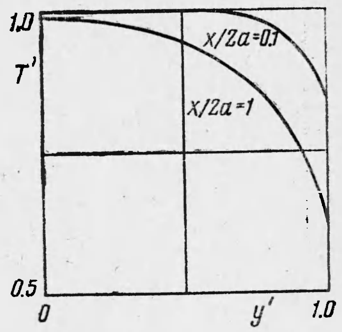
Длина пробега излучения в начальном сечении $l_* = 100$ *см* при давлении $p = 10$ *атм* и $l_* = 5$ *см* при $p = 100$ *атм*. Ширина канала выбрана равной 100 *см*. Значение λ вводится по величине длины пробега излучения на оси.

Для случая течения воздуха в плоском канале ($T_* = 10^4$ K) на фиг. 8 приведены зависимости температуры T от $x/2a$ на стенке (кривые 2 и 4) и на оси (кривые 1 и 3): кривые 1 и 2 соответствуют $p = 100$ *атм*, кривые 3 и 4 —давлению $p = 10$ *атм*; зависимость плотности потока тепла на стенке от $x/2a$ дана на фиг. 9: кривая 1 соответствует давлению $p = 10$ *атм*, кривая 2 — $p = 100$ *атм*; на фиг. 10 дано распределение температуры поперек канала при разных $x/2a$ для $p = 100$ *атм*. При $p = 10$ *атм* температура поперек канала почти не меняется, как видно из фиг. 8.

Оценка плотности потока тепла из-за обычной теплопроводности при турбулентном течении, проведенная по формуле [13]

$$N = 0.023\, R^{0.8} P^{0.4} \quad \text{при } R = 10^6, \qquad P = 1$$

и температуре в центре канала, показывает, что $q \gg q_-$ для $p = 10$ *атм* на расстоянии во много калибров щели, при $p = 100$ *атм* на расстоянии в один калибр потоки сравнимы, т. е. в этом случае для определения профиля температуры и потока тепла на стенку необходим учет обычной теплопроводности. При этих оценках принято $A = 0.1$.



Фиг. 10

Поступила 9 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика. М., ГИТТЛ, 1952.
2. Суринов Ю. А. Лучистый обмен при наличии поглощающей и рассеивающей среды. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 9, стр. 1331; № 10, стр. 1455.
3. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С., Райзер Ю. А. Об охлаждении воздуха излучением. ЖЭТФ, 1958, т. 34, вып. 5, стр. 1278—1287; вып. 6, стр. 1447—1454.
4. Дородницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых задач аэрогидродинамики. Тр. III Всесоюзн. матем. съезда, 1956, № 2.
5. Немчинов И. В., Фонарев А. С. Течение Куэтта с учетом переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 3.
6. Девисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1961.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1956.
8. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1.
9. Андрианов В. Н., Шорин С. Н. Лучистый теплообмен в потоке излучающей среды. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 5, стр. 46—53.
10. Онуфриев А. Т. Об охлаждении излучением полубесконечного объема газа. ПМТФ, 1961, № 2.
11. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Ионов В. П., Плешанов А. С., Рождественский И. Б., Самуйлов Е. В. Термодинамические функции воздуха. АН СССР, 1960.
12. Kivel B. Radiation from hot air and its effect on stagnation-point heating. Journal of the Aerospace sciences, 1961, vol. 28, No. 2, p. 96—102.
13. Кутателадзе С. С., Боришанский В. М. Справочник по теплопередаче. Госэнергоиздат, 1959.