

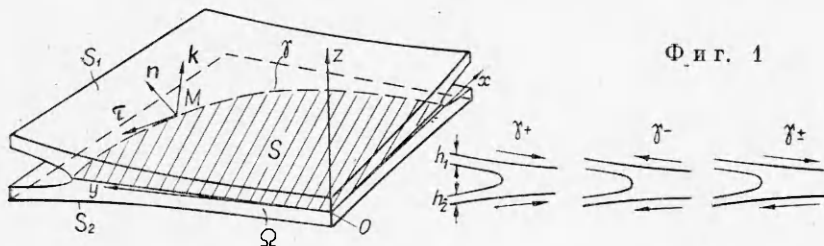
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА

М. А. Галахов, В. П. Ковалев

(Москва)

Толщина смазочной пленки и интегральные силовые характеристики гидродинамического контакта в значительной степени определяются размерами и формой области контакта [1—5]. В данной работе сформулированы условия на границе плоской области контакта с учетом поверхностного натяжения; поставлена задача определения границы в рамках уравнения Рейнольдса.

1. О граничных условиях для уравнения Рейнольдса. Рассмотрим течение тонкого слоя жидкости, разделяющего две поверхности S_1 и S_2 (фиг. 1). Обозначим Ω область, в которой жидкость занимает весь промежуток поперек слоя. Поскольку слой тонкий, поставим в соответствие Ω поверхность S , лежащую внутри Ω на равных расстояниях от S_1 и S_2 . Обозначим $\gamma \in S$ границу области сплошного слоя жидкости. Рассмотрим нестационарную задачу. Пусть Ω , S_1 , S_2 , S , γ зависят от времени. Каждой точке $M \in \gamma$ поставим в соответствие подвижную декартову систему



Фиг. 1

координат $M\xi\eta\zeta$ с ортами \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{k} так, чтобы вектор \mathbf{k} был направлен перпендикулярно S , $\boldsymbol{\tau}$ по касательной к γ , \mathbf{n} — по касательной к S перпендикулярно γ наружу от Ω . Пусть \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 — проекции скоростей поверхностей S_1 и S_2 на S . Будем называть границу входной (γ_+), если $(\mathbf{n}, \mathbf{u}_1) \leq 0$, $(\mathbf{n}, \mathbf{u}_2) \leq 0$, $(\mathbf{n}, \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{n}, \mathbf{u}_2)^2 \neq 0$, выходной (γ_-), если $(\mathbf{n}, \mathbf{u}_1) \geq 0$, $(\mathbf{n}, \mathbf{u}_2) \geq 0$, $(\mathbf{n}, \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{n}, \mathbf{u}_2)^2 \neq 0$, смешанной (γ_{\pm}), если не выполняются условия для γ_+ и γ_- . В приложениях обычно границы бывают либо входными, либо выходными.

Предположим, что течение в Ω описывается уравнением Рейнольдса, которое требует двух граничных условий на всей свободной границе γ . Анализ уравнений Стокса вблизи γ с учетом поверхностного натяжения на границе раздела жидкости с окружающей средой показывает, что, если пренебречь инерционными членами и массовыми силами и считать течение локально не зависящим от координаты η , граничные условия будут иметь следующую структуру:

$$(1.1) \quad p = \frac{2\sigma}{h} p_+ \left[\frac{\sigma}{\mu(\mathbf{u}, \mathbf{n})}, \frac{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{n})}{(\mathbf{u}, \mathbf{n})}, \frac{h_1}{h}, \frac{h_2}{h} \right];$$

$$(1.2) \quad (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_0, \mathbf{n}) = 0$$

на γ_+ ,

$$(1.3) \quad p = \frac{2\sigma}{h} p_{\pm} \left[\frac{\sigma}{\mu(\mathbf{u}_1, \mathbf{n})}, -\frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{n})}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{n})}, \frac{h_1}{h} \right];$$

$$(1.4) \quad (\mathbf{q}_i, \mathbf{n}) = h(\mathbf{u}_1, \mathbf{n}) g \left[\frac{\sigma}{\mu(\mathbf{u}_1, \mathbf{n})}, -\frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{n})}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{n})}, \frac{h_1}{h} \right]$$

на γ_{\pm} при $(\mathbf{u}_1, \mathbf{n}) < 0$,

$$(1.5) \quad p = \frac{2\sigma}{h} p_- \left[\frac{\sigma}{\mu(\mathbf{u}, \mathbf{n})}, \frac{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{n})}{(\mathbf{u}, \mathbf{n})} \right];$$

$$(1.6) \quad (\mathbf{q}_i, \mathbf{n}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{n}) f \left[\frac{\sigma}{\mu(\mathbf{u}, \mathbf{n})}, \frac{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{n})}{(\mathbf{u}, \mathbf{n})} \right]$$

на γ_- . Здесь p — давление; h — зазор между S_1 и S_2 ; $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2$; σ — поверхностное натяжение; μ — вязкость; h_1 и h_2 — толщины слоев жидкости, примыкающие к S_1 и S_2 непосредственно за пределами Ω ; $\mathbf{q}_0 = h_1\mathbf{u}_1 + h_2\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{q}_i = -\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \mathbf{n} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \boldsymbol{\tau} \right) + \mathbf{u}h$ — потоки жидкости соответственно вне и внутри Ω ; p_+ , p_- , f и g — функции, определяемые из решения уравнений Стокса. Конкретная форма условий (1.1), (1.3) — (1.6) в настоящее время не получена. Однако в типичных для контактной гидродинамики случаях возможны упрощения. Условия (1.1), (1.3), (1.5) при характерных давлениях в Ω , значительно превышающих возможные капиллярные давления, можно заменить на

$$(1.7) \quad p|_{\gamma} = 0,$$

включив в γ бесконечно удаленные точки. Условие (1.6) в частном случае $\mathbf{u}_2 = 0$ приближенно исследовано в [6], где показано, что при стремлении первого аргумента к нулю и бесконечности f стремится соответственно к единице и нулю. В частности, так называемое кавитационное или Рейнольдсово граничное условие

$$(1.8) \quad \partial p / \partial \xi |_{\gamma_-} = 0$$

получается в пределе из (1.6) при стремлении $\sigma/\mu(\mathbf{u}, \mathbf{n})$ к нулю. Попытки исследования условия типа (1.4) авторам неизвестны. В дальнейшем ограничимся рассмотрением течений с границами γ_+ и γ_- .

2. Формулировка задачи о нахождении свободной границы. Описанные в п. 1 граничные условия позволяют сформулировать задачу о нахождении свободной границы. Сделаем ряд упрощающих предположений. Свяжем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с поверхностью S так, чтобы плоскость xy касалась S в точке O (см. фиг. 1). Предположим, что характерный радиус кривизны поверхности S значительно превосходит ее размеры. Тогда уравнение Рейнольдса можно рассматривать в системе координат Oxy , а граничные условия можно снести на плоскость xy . Обозначим $a(y, t)$ и $c(y, t)$ входную и выходную границы. Предположим, что a и c однозначны по y и для определенности $c \geq a$.

Условия (1.2), (1.6) запишутся в системе $Oxyz$ в виде

$$(2.1) \quad (u_{1x}h_1 + u_{2x}h_2) - (u_{1y}h_1 + u_{2y}h_2) \partial a / \partial y - (h_1 + h_2) \partial a / \partial t = \\ = -\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} \right) + u_x \dot{u}_x - u_y \dot{u}_y - \dot{z} \frac{\partial a}{\partial t};$$

$$(2.2) \quad -\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + h \left(u_x - u_y \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial t} \right) = h \left(u_x - \right. \\ \left. - u_y \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial t} \right) \cdot \left[\frac{\sigma \sqrt{1 + (\partial c / \partial y)^2}}{\mu (u_x - u_y \partial c / \partial y - \partial c / \partial t)}, \frac{(u_{1x} - u_{2x}) - (u_{1y} - u_{2y}) \partial c / \partial y}{u_x - u_y \partial c / \partial y - \partial c / \partial t} \right].$$

Здесь $u_{1x}(u_{2x})$, $u_{1y}(u_{2y})$ — проекции скоростей поверхностей $S_1(S_2)$ на оси x и y , $u_x = (u_{1x} + u_{2x})/2$, $u_y = (u_{1y} + u_{2y})/2$. Условие (2.1) в частном случае при $\partial/\partial y = 0$ и $u_{1y} = u_{2y} = 0$ дает условие (1.4) в [3]. Условие (1.7) не изменит своей формы, а (1.8) совместно с (1.7) даст

$$(2.3) \quad \partial p / \partial x = 0$$

на границе $c(y, t)$ в точках, где существует $\partial c / \partial y$.

Нестационарное уравнение Рейнольдса имеет вид

$$(2.4) \quad \operatorname{div} ((h^3/12\mu) \operatorname{grad} p - \mathbf{u}h) = \partial h / \partial t,$$

где div и grad берутся по переменным x и y . В дальнейшем будем считать, что скорости \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 не зависят от x и y и не имеют составляющих вдоль оси y . Пусть h_* , u_* , l_x , l_y — характерные величины соответственно для h , \mathbf{u} размеров по осям x и y . Относя a , c , x к l_x , y к l_y , h к h_* , p к $12\mu u_* l_x h_*^{-2}$, t к $l_x u_*^{-1}$ и сохраняя прежние обозначения, из (1.7), (2.1), (2.3), (2.4) полу-

чим систему в безразмерных переменных:

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}, \quad p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = c,$$

$$p = 0, \quad u_1 h_1 + u_2 h_2 - \frac{\partial a}{\partial t} (h_1 + h_2) = -h^3 \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} \right) + uh -$$

$$- \frac{\partial a}{\partial t} h \quad \text{при } x = a.$$

Здесь $\varepsilon = (l_x/l_y)^2$, u_1, u_2, u — проекции u_1, u_2, u на ось x .

3. Случай узкой области. Рассмотрим систему (2.5) в предположениях, что $h(x, y, t) = h_0(t) + h_4(x, y)$ и $\varepsilon \ll 1$. Интегрируя уравнение по x от a до c с учетом граничных условий, получим

$$(3.1) \quad \frac{\partial a}{\partial t} h(a, y, t) + (u_1 h_1 + u_2 h_2) - \frac{\partial a}{\partial t} (h_1 + h_2) - uh(c, y, t) -$$

$$- (c - a) h'_0 = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \int_a^c \left(h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) dx.$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, возьмем давление из решения одномерного уравнения Рейнольдса [3]:

$$(3.2) \quad p = \int_a^x \frac{u [h(x_1, y, t) - h(c, y, t)] - h'_0(x - c)}{h^3(x_1, y, t)} dx_1,$$

где h'_0 — производная от h_0 по времени. Из (3.1), (3.2) с использованием граничного условия $p = 0$ при $x = c$ получим систему для определения a и c :

$$(3.3) \quad \frac{\partial a}{\partial t} h(a, y, t) + (u_1 h_1 + u_2 h_2) - \frac{\partial a}{\partial t} (h_1 + h_2) - uh(c, y, t) -$$

$$- (c - a) h'_0 = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \int_a^c \left\{ h^3(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x \frac{u [h(x_1, y, t) - h(c, y, t)] - h'_0(x - c)}{h^3(x_1, y, t)} \times \right.$$

$$\left. \times dx_1 \right\} dx, \quad \int_a^c \frac{u [h(x, y, t) - h(c, y, t)] - h'_0(x - c)}{h^3(x, y, t)} dx = 0.$$

В частном случае при $\partial/\partial y = 0$ получим результат [3]. При заданном h'_0 система является параболической относительно a .

4. Стационарный случай. В стационарном случае при $u \equiv 1$ система (3.3) примет вид

$$(4.1) \quad q - h(c, y) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \int_a^c \left[h^3(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \int_c^x \frac{h(x_1, y) - h(c, y)}{h^3(x_1, y)} dx_1 \right] dx,$$

$$\int_a^c \frac{h(x, y) - h(c, y)}{h^3(x, y)} dx = 0,$$

где $q(y) = u_1 h_1(y) + u_2 h_2(y)$ — входной поток. Система (4.1) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $a(y)$ (если выразить c через a из второго уравнения и подставить в первое). Его решения при заданном входном потоке могут давать как ограниченные, так и неограниченные области.

Поставим задачу найти замкнутую границу $a(y_i) = c(y_i)$ ($i = 1, 2$) так, чтобы в точках смыкания y_i выполнялось условие равенства нулю потока «бокового растекания»

$$(4.2) \quad \lim_{y \rightarrow y_i} \int_a^c h^3(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_c^x \frac{h(x_1, y) - h(c, y)}{h^3(x_1, y)} dx_1 \right] dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

В специальном случае $h = h_3(y) + x^2(h_3(y) \neq 0)$, что соответствует, например, шару в желобе или профилированному ролику на плоскости, (4.1), (4.2) приводятся к виду

$$(4.3) \quad h(c) - q = \varepsilon \frac{d}{dy} \left\{ \frac{d}{dy} \left[h_3^2 I_1 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) \right] - 3h_3 \frac{dh_3}{dy} I_2 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) \right\};$$

$$(4.4) \quad I_0 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) = 0;$$

$$(4.5) \quad \lim_{y \rightarrow y_i} \left\{ \frac{d}{dy} \left[h_3^2 I_1 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) \right] - 3h_3 \frac{dh_3}{dy} I_2 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) \right\} = 0,$$

где $I_0(A, C) = \int_A^C \frac{x_1^2 - C^2}{(1 + x_1^2)} dx_1$; $I_1(A, C) = \int_A^C \frac{x_1^2 - C^2}{(1 + x_1^2)^3} \int_{x_1}^0 (1 + x_2^2)^3 dx_2 dx_1$;

$$I_2(A, C) = \int_A^C \frac{x_1^2 - C^2}{(1 + x_1^2)^3} \int_{x_1}^0 (1 + x_2^2)^2 dx_2 dx_1.$$

Уравнение (4.4) дает трансцендентную связь a и c . В обозначениях $a/\sqrt{h_3} = A$, $c/\sqrt{h_3} = C$ эту связь можно аппроксимировать зависимостью

$$(4.6) \quad A = -(\kappa_0 C_0)^{-1/3} [(1 - C/C_0)^{-1/3} - 1] + C [(3C_0)^{-1} (\kappa_0 C_0)^{-1/3} - 2],$$

где $C_0 \approx 0,47513$ — решение уравнения $I_0(-\infty, C_0) = 0$; $\kappa_0 = 6C_0^2 \times (1 + C_0^2)^{-2} (1 - 3C_0^2)^{-1} \approx 2,793$. Формула (4.6) дает правильные асимптотики при $C \rightarrow 0$ и $C \rightarrow C_0$, при $C \in (0, C_0)$ погрешность не превышает 5%.

Система (4.3), (4.4) содержит малый параметр ε . При $\varepsilon = 0$ (4.3), (4.4) представляет собой задачу определения свободной границы в линейном контакте. В [3] показано, что она имеет решение только при $q/h_3 \in [1, 1 + C_0^2]$. Таким образом, предельный переход к $\varepsilon = 0$ возможен только при указанном ограничении на входной поток. В общем случае предположим, что интервал (y_1, y_2) можно разбить на участки двух типов: первого ($a \rightarrow \text{const}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) и второго ($a \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). На интервалах первого типа множитель при ε в правой части (4.3) ограничен и решение можно получить, положив $\varepsilon = 0$. На интервалах второго типа (4.4) дает $c = \bar{c}_2 \sqrt{\bar{h}_2}$, интегралы $I_1(A, C)$ и $I_2(A, C)$ эквивалентны соответственно $A^4/28$ и $A^2/10$ при $A \rightarrow -\infty$ и (4.3) дает

$$(4.7) \quad (1 + C_0^2) h_3 - q = \frac{\varepsilon}{28} \frac{d^2(a^4)}{dy^2}.$$

Граничные условия примут вид

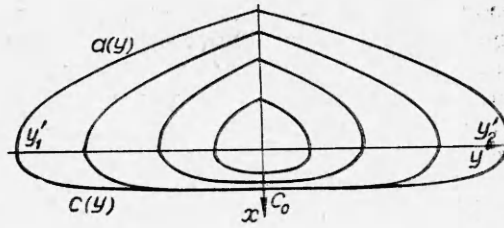
$$(4.8) \quad a(y_i) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow y_i} \frac{d^2}{dy^2} (a^4) = 0, \quad i = 1, 2,$$

где y_i — границы интервалов второго типа.

Построение границы производится следующим образом: определяются те y , для которых $q/h_3 > 1 + C_0^2$. Здесь решение будет второго типа. Границы интервалов второго типа могут выходить за пределы области, где $q/h_3 > 1 + C_0^2$. Они определяются в процессе решения (4.7), (4.8). Может получиться, что нескольким интервалам с $q/h_3 > 1 + C_0^2$ соответствует один интервал решения второго типа. Если $q/h_3 < 1 + C_0^2$ и точка не попала в интервал второго типа, ее решение определяется из

одномерного уравнения Рейнольдса, т. е. из системы (4.3), (4.4) при $\varepsilon = 0$ (решение первого типа).

Рассмотрим несколько примеров. Пусть $h_3(y) \equiv 1$, $q(y) = q_1 \delta(y)$, δ — дельта-функция. Интегрирование (4.7), (4.8) дает $y_i' = \pm q_1/2 (1 + C_0^2)$, $a(0) = - [7q_1^2/2\varepsilon (1 + C_0^2)]^{1/4}$, c находится из (4.4). На фиг. 2 изображены характерные области контакта при различных q_1 . Большим q_1 соответствуют большие по размеру области.



Фиг. 2

Рассмотрим прямоугольный входной поток ($q(y) = q_2$ при $|y| \leq y_0$, $q(y) = 0$ при $|y| > y_0$) под цилиндром $h_3(y) \equiv 1$. При $q_2 < 1 + C_0^2$ получается решение первого типа. Границы изображены на фиг. 3 цифрами 1 — 3 в порядке возрастания q_2 . В этом случае $c = \sqrt{q_2 - 1}$, a определяется из (4.4). При $q_2 > 1 + C_0^2$ получаются решения второго типа, границы изображены на фиг. 3 цифрами 4 — 6. В этом случае

$$a(0) = - \left[\frac{14q_2 y_0^2 (q_2 - 1 - C_0^2)}{\varepsilon (1 + C_0^2)} \right]^{1/4}, \quad y_i' = \pm \frac{q_2 y_0}{1 + C_0^2}.$$

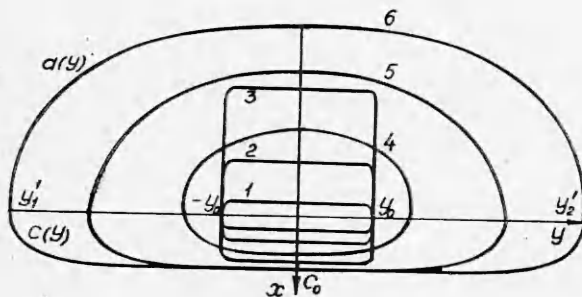
Зависимость $a(0)$ от q_0 , как видно из фиг. 3, не является монотонной. Точка $q_2 = 1 + C_0^2$ является особой. В ее окрестности решение следует искать из полной системы (4.3)—(4.5). Использование этих уравнений после разделения на решения первого и второго типов может привести здесь к большим ошибкам.

Рассмотрим $h_3 = 1 + y^2$, $q - 1 \ll C_0^2$, q не зависит от y . Это соответствует, например, качению шара по смазанному желобу при слабом погружении шара в смазку. В этом случае получается решение первого типа: $c \approx \sqrt{q - 1 - y^2}$, $a \approx -2\sqrt{q - 1 - y^2}$, $y_i \approx \pm \sqrt{q - 1}$.

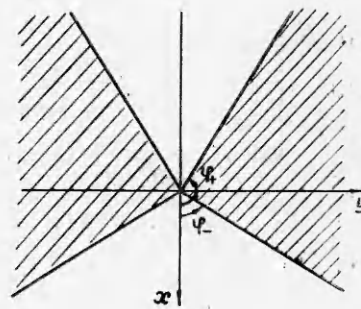
Большой практический интерес представляет решение системы (4.3), (4.4) с условием равенства распределенных потоков перед входной и после выходной границ: $h(c) = q$ в обозначениях (4.3). Такая ситуация, видимо, может иметь место в подшипниках качения при стационарном вращении вала. Это условие вместе с условием симметрии по y приводит (4.3) к

$$(4.9) \quad h_3 \frac{d}{dy} I_1 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) = \left[3I_2 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) - 2I_2 \left(\frac{a}{\sqrt{h_3}}, \frac{c}{\sqrt{h_3}} \right) \right] \frac{dh_3}{dy}.$$

Исследование системы (4.4), (4.9) показывает, что она не может давать ограниченных областей контакта при h_3 , монотонно возрастающих с



Фиг. 3



Фиг. 4

ростом $|y|$. Видимо, для получения таких областей необходим учет поверхностного натяжения. При задании различных $a(0)$ решение системы (при $h_3 = 1 + y^2$) дает ряд кривых $a(y)$ и $c(y)$, стремящихся на бесконечности к общим (разным для a и c) асимптотам — лучам, выходящим из начала координат. Подобные формы областей наблюдаются в эксперименте [7].

5. Определение границ смазочного слоя вдали от точки минимального зазора. Рассмотрим стационарное течение смазочного слоя между двумя соприкасающимися твердыми телами при их качении. Такая постановка есть идеализация реальных явлений, так как наличие качения при соприкосновении приводит к бесконечным давлениям в силу уравнения Рейнольдса. Но она адекватно описывает течение на расстояниях от точки минимального зазора, значительно превышающих «гидродинамический размер» $\sqrt{2R_{\max} h_{\min}}$, где R_{\max} — максимальный радиус кривизны формы зазора, h_{\min} — минимальная толщина пленки.

Пусть форма зазора в декартовой системе координат Oxy , введенной в н. 2, описывается функцией $h = x^2/2R_x + y^2/2R_y$. В полярной системе координат $Or\varphi$ она имеет вид $h = r^2(\cos^2\varphi/2R_x + \sin^2\varphi/2R_y)$. Стационарное уравнение Рейнольдса (2.4) в полярной системе координат имеет вид

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^7 \frac{\partial p}{\partial r} \right] (\cos^2 \varphi + \varepsilon_0 \sin^2 \varphi)^3 + r^3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\cos^2 \varphi + \varepsilon_0 \sin^2 \varphi)^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] = 24 \mu u (2R_x)^2 \cos \varphi,$$

где $\varepsilon_0 = R_x/R_y$. Предположим, что входными и выходными границами являются лучи, выходящие из начала координат с полярными углами φ_+ и φ_- (фиг. 4). Такие формы областей получены в экспериментах [8]. Покажем, что имеются точные решения уравнения Рейнольдса, дающие области такого вида. Положим для определенности $\varphi_+ \in (\pi/2, \pi)$, $\varphi_- \in (0, \pi/2)$. Будем рассматривать симметричные по y решения, поэтому $2\pi - \varphi_-$ и $2\pi - \varphi_+$ — также границы выхода и входа. В таких предположениях граничные условия (2.1), (2.2), (1.7) имеют вид

$$\frac{h^3}{12\mu \sin \varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + uh = \begin{cases} q & \text{при } \varphi = \varphi_+ \\ huf \left(\frac{\sigma}{\mu u \sin \varphi}, 0 \right) & \text{при } \varphi = \varphi_-, \end{cases}$$

$$p = 0 \text{ при } \varphi = \varphi_+, \varphi = \varphi_-,$$

где $q = u(h_1 + h_2)$. Уравнение и граничные условия при $q/r^2 = \text{const}$ позволяют искать решение в виде $p = \rho(r)\Phi(\varphi)$. В качестве $\rho(r)$ можно взять $\rho(r) = 12\mu u (2R_x)^2 r^{-3}$. Для $\Phi(\varphi)$ получаем уравнение

$$(5.1) \quad \frac{d}{d\varphi} \left[(\cos^2 \varphi + \varepsilon_0 \sin^2 \varphi)^3 \frac{d\Phi}{d\varphi} \right] - 9\Phi (\cos^2 \varphi + \varepsilon_0 \sin^2 \varphi)^3 = 2 \cos \varphi$$

с граничными условиями

$$(5.2) \quad \frac{1}{\sin \varphi} (\cos^2 \varphi + \varepsilon_0 \sin^2 \varphi)^2 \frac{d\Phi}{d\varphi} + 1 = \begin{cases} \kappa & \text{при } \varphi = \varphi_+, \\ f \left(\frac{\sigma}{\mu u \sin \varphi}, 0 \right) & \text{при } \varphi = \varphi_-, \end{cases}$$

$$(5.3) \quad \Phi(\varphi_+) = \Phi(\varphi_-) = 0,$$

где $\kappa = 2R_x q / [u(\cos^2 \varphi_+ + \varepsilon_0 \sin^2 \varphi_+) r^2]$.

Уравнение допускает частное решение

$$\Phi_0 = -[1/(3 + 2\varepsilon_0)] \cos \varphi / [(\cos^2 \varphi + \varepsilon_0 \sin^2 \varphi)^2],$$

соответствующее решению [4].

При $\varepsilon_0 = 1$ (5.1) упрощается:

$$(5.4) \quad d^2\Phi/d\varphi^2 - 9\Phi = 2 \cos \varphi.$$

Решение уравнения (5.4) в случае обильной смазки, когда входные границы отсутствуют и граничное условие на входе заменяется на условие

симметрии $\Phi(\varphi) = \Phi(2\pi - \varphi)$, имеет вид

$$\Phi = -\frac{1}{5} \cos \varphi + \frac{1}{5} \frac{\cos \varphi_- \operatorname{ch}(3\varphi - 3\pi)}{\operatorname{ch}(3\varphi_- - 3\pi)},$$

φ_- находится из

$$3 \operatorname{ctg} \varphi_- \cdot \operatorname{th}(3\pi - 3\varphi_-) - 1 = 5[1 - f(\sigma/(\mu u \sin \varphi_-), 0)].$$

Для $\sigma/\mu u = 0$, или $f = 1$, получаем $\varphi_- = 1,249$. Для $\sigma/\mu u = \infty$, или $f = 0$, получаем $\varphi_- = 0,4636$. Поскольку φ_- в данном случае не может быть больше 1,249, а при таких φ_- величина $\operatorname{th}(3\pi - 3\varphi_-)$ близка к 1, то с хорошей точностью ($\sim 10^{-5}$) для определения φ_- рекомендуем формулу

$$3 \operatorname{ctg} \varphi_- - 1 = 5[1 - f(\sigma/(\mu u \sin \varphi_-), 0)].$$

Можно сделать вывод, что при обильной смазке угол φ_- заключен в пределах от 0,4636 до 1,249 (или от 26,2° до 71,6°).

В случае недостаточной смазки (т. е. при наличии входной границы) при $\varepsilon_0 = 1$

$$\Phi = -(1/5) \cos \varphi + (\cos \varphi_- \operatorname{sh}(3\varphi_+ - 3\varphi) + \cos \varphi_+ \operatorname{sh}(3\varphi - 3\varphi_-)) / (5 \operatorname{sh}(3\varphi_+ - 3\varphi_-)).$$

Из условия (5.2) на выходе следует

$$2 + \frac{\cos \varphi_+ - \cos \varphi_- \operatorname{ch}(3\varphi_+ - 3\varphi_-)}{\sin \varphi_- \operatorname{sh}(3\varphi_+ - 3\varphi_-)} = \frac{5}{3} f\left(\frac{\sigma}{\mu u \sin \varphi_-}, 0\right).$$

Представляет интерес условие «периодичности» (равенства потока на входе $q_+(y)$ потоку на выходе $q_-(y)$):

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi_+} \left[\frac{1}{\sin \varphi_+} \frac{d\Phi(\varphi_+)}{d\varphi} + 1 \right] = \frac{1}{\sin^2 \varphi_-} \left[\frac{1}{\sin \varphi_-} \frac{d\Phi(\varphi_-)}{d\varphi} + 1 \right].$$

6. Ограниченная смазка при сближении и раздвигании жестких цилиндров. Рассмотрим жесткие цилиндры $h = h_0(t) + x^2/2R$. Уравнение (2.4) при $u = 0$ и $\partial/\partial y = 0$ имеет вид

$$(6.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Пусть течение симметрично относительно точки $x = 0$.

Рассмотрим «раздавливание» капли масла (фиг. 5, а). В этом случае границы $a(t)$ и $-a(t)$ входные. Условие (2.1) сводится к

$$(6.2) \quad \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + h \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

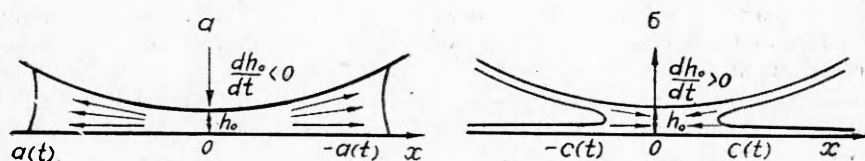
при $x = a$. Исключение p из (6.1), (6.2) и (1.7) дает

$$(6.3) \quad -h_0 a - a^3/6R = V/2,$$

где V — объем жидкости на единицу длины цилиндра. Соотношение (6.3) выражает закон сохранения объема. Для давления получим

$$(6.4) \quad p = -(6R\mu dh_0/dt)[1/h^2 - 1/h^2(a)].$$

Рассмотрим раздвигание цилиндров (фиг. 5, б). Теперь границы



Фиг. 5

$c(t)$ и $-c(t)$ выходные. Условие (2.2) примет вид

$$(6.5) \quad \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + h \frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dt} hf \left(-\frac{\sigma}{\mu dc/dt}, 0 \right).$$

Решение (6.1), (6.5), (1.7) при $\sigma = \infty$ ($f = 0$) снова дает закон сохранения объема $h_0 c + c^3/6R = V/2$, давление определяется из (6.4) с заменой a на c . Если $\sigma < \infty$, на стенках, как показано на фиг. 5, б, будет оставаться некоторый слой жидкости — объем жидкости в контакте $x \in (-c, c)$ будет уменьшаться. Применение кавитационного условия $\sigma = 0$ ($f = 1$) в данном случае приводит к мгновенному разрыву смазочной пленки, т. е. пренебрегать поверхностным натяжением в задаче о раздвигании не следует.

Поступила 10 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Castle P., Dowson D. A theoretical analysis of the starved elastohydrodynamic lubrication problem for cylinders in line contact.— In: Proc. Elastohydrodynamic Lubrication Symp. London: Instn Mech. Engrs, 1972.
2. Wolveridge P. E., Baglin K. P., Archard J. F. The starved lubrication of cylinders in line contact.— Proc. Instn Mech. Engrs, 1970—1971, vol. 185, p. 1159—1169.
3. Галахов М. А., Ковалев В. П. Ограниченная смазка жестких цилиндров.— Машиноведение, 1980, № 1.
4. Ганица П. Л. Гидродинамическая теория смазки при качении.— ЖТФ, 1955, т. 25, вып. 4.
5. Chiu I. P. An analysis and prediction of lubricant film starvation in rolling contact systems.— ASLE Trans., vol. 17, N 1.
6. Койн, Элрод мл. Условия разрыва смазочной пленки. Ч. 1. Теоретическая модель.— Проблемы трения и смазки, 1970, № 3.
7. Pemberton J., Cameron A. A mechanism of fluid replenishment in elastohydrodynamic contacts.— Wear, 1976, vol. 37, p. 185.
8. Gentle C. R., Cameron A. Prediction of pour-points in elastohydrodynamic lubrication.— Wear, 1974, vol. 29, p. 141.

УДК 532.522

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ СТРУЙ КАПЕЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Л. Ярин

(Москва)

В работах [1, 2] выведена система квазиодномерных уравнений тонких струй капельных жидкостей, позволяющая, в частности, исследовать процесс роста изгибных возмущений высокоскоростных струй вследствие действия окружающего воздуха. Эти уравнения решены в пределе малых возмущений, что позволило в линейном приближении определить соответствующий инкремент [3]. В данной работе приводятся некоторые результаты численного решения квазиодномерных уравнений динамики струй [1, 2] для случая конечных плоских изгибных возмущений струй ньютоновских вязких жидкостей кругового сечения.

1. Основные уравнения. Остановимся прежде всего на варианте задачи без учета силы лобового сопротивления воздуха. При этом случаю бесконечной, первоначально прямолинейной струи отвечают возмущения в виде стоячих волн с растущей во времени амплитудой. Для достаточно вязкой жидкости можно пренебречь инерционными членами по сравнению с вязкими во всех уравнениях задачи, кроме проекции уравнения количества движения на нормаль к оси струи (вязкие члены в последнем уравнении малы: имеют порядок перерезывающей силы). После преобразований, подробности которых приведены в [1], представим квазиодномерные уравнения неразрывности, количества движения (проекция на нормаль и касательную к оси струи), момента количества движения, а также