ЛИТЕРАТУРА

1. Гогонин И. И., Дорохов А. Р. Теплообмен при конденсации движущегося пара фреона-21 на горизонтальной трубе. ПМТФ, 1971, № 2, стр. 129—133.
2. Берман Л. Д. О теплоотдаче при пленочной конденсации движущегося пара. Теплоэнергетика, 1966, № 7, стр. 56—61.
3. Берман Л. Д. Расчетные и опытные данные для коэффициента теплоотдачи при конденсации движущегося пара. Тр. Центр. научн.-исслед. и проектно-конструкт. котлотурб. ин-та, 1970, вып. 101, стр. 262—272.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
5. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
6. Кутателадзе С. С. Основы теории теплоомена. Новосибирск, «Наука», 1970.
7. Silver R. S. An approach to a general theory of surface condensers. Proc. Instn Mech. Engrs., 1964, vol. 178, No. 1, pp. 339—357.
8. Берман Л. Д. Теплоотдача при пленочной конденсации движущегося пара на вертикальной поверхности и горизонтальной трубе. Материалы IV Всесоюзной конференции по теплообмену и гидравлическим сопротивлениям при движении двухфазного потока в элементах энергетических машин и аппаратов, ч. 1. Л., 1971, стр. 29—32.
9. Nusselt W. Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. Zeitschr. d. Verein Deutscher Ingenieure, 1916, Bd 60, Nr 28, S. 569.
10. Берман Л. Д., Туманов Ю. А. Исследование теплоотдачи при конденсации движущегося пара на горизонтальной трубе. Теплоэнергетика, 1962, № 10, стр. 77—83.

УДК 550.839; 071.1

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ПРИСКВАЖИННОЙ ЗОНЕ С УЧЕТОМ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТА

В. И. Тараканов

(Томск)

Рассматривается электрическое поле от точечного источника в неограниченном пространстве, имеющем цилиндрический канал, с учетом неоднородного деформированного состояния среды. Аналогичная задача, но без учета деформированного состояния среды, рассматривалась в работах [1,2] применительно к вопросам электроразведки скважин. Необходимость учета деформированного состояния среды связана с тем, что экспериментальные работы [3-5] указывают на значительную зависимость электропроводности ряда материалов, представляющих практический интерес, от их деформированного состояния.

1. Так как деформированное состояние материала определяется тензором деформаций ε_{ij}, то и электропроводность материала должна быть некоторой функцией от этого тензора. Эта зависимость должна быть инвариантной относительно выбора системы координат, т. е. электропроводность тоже должна быть некоторым тензором k_{ij} и связана функциональной связью с тензором деформаций ε_{ij}.

Наиболее общая форма такой функциональной тензорной связи имеет вид [6]

$$k_{ij} = F(A_1, A_2, A_3)\,\delta_{ij} + \Phi(A_1, A_2, A_3)\,\varepsilon_{ij} + W(A_1, A_2, A_3)\,\varepsilon_{ij}^2 \tag{1.1}$$

где F, Φ, W — произвольные функции; A_1, A_2, A_3 — инварианты тензора ε_{ij}, δ_{ij} — единичный тензор. Считая деформации ε_{ij} малыми, можно функциональную связь (1.1) линеаризовать. После разложения (1.1) в ряд и ограничения членами первого порядка малости получается

$$k_{ij} = (\alpha + \delta\theta)\,\delta_{ij} + \gamma\varepsilon_{ij} \tag{1.2}$$

где α, δ, γ — постоянные модули, $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — первый инвариант тензора ε_{ij}, α — электропроводность в состоянии, принятом за недеформированное.

Коэффициенты δ, γ характеризуют влияние деформированного состояния материала на его электропроводность. Коэффициенты δ, γ необходимо находить экспериментально, причем для их нахождения достаточно двух опытов по замеру электропроводности при всестороннем и одноосном сжатии.

Таким образом, на основе (1.2) плотность тока $\mathbf{i}$ в деформированной среде есть

$$\mathbf{i} = k_{ij}\nabla u \tag{1.3}$$

где u — потенциал электрического поля.

Уравнение постоянного электрического поля в деформируемой среде и на основе (1.2), (1.3) будет

$$\nabla k_{ij}\nabla u = 0 \tag{1.4}$$

2. С учетом установленной выше зависимости электропроводности материала от деформированного состояния задача имеет следующую постановку: требуется найти электрическое поле от точечного источника постоянного тока I в неограниченном пространстве с цилиндрическим каналом радиуса r_0, причем источник находится на оси канала. Электропроводность среды зависит от ее деформированного состояния, которое возникает за счет давления всестороннего сжатия на бесконечности p_2 и давления в канале p_1. Канал заполнен жидкостью с электропроводностью σ. Такая постановка задачи возможна, если электрический зонд находится в скважине, заполненной буровой жидкостью, причем толщина пласта много больше радиуса скважины и много меньше глубины залегания пласта. В этом случае пласт можно рассматривать как неограниченный, находящийся под действием давления p_2 на бесконечности, равного горному давлению лежащих выше слоев грунта. Давление p_1 соответствует давлению буровой жидкости в районе пласта.

Задача решается в предположении, что материал среды линейно-упругий и тензор напряжений σ_{ij} связан с тензором деформаций ε_{ij} соотношением

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.1}$$

Здесь λ, μ — упругие коэффициенты Ляме. Граничные условия упругой задачи имеют в цилиндрических координатах следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{rr} = -p_1 \quad (r = r_0) \\ &\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{rr} = -p_2 \quad (r \to \infty) \\ &\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p_2 \quad (z \to \pm\infty) \end{aligned} \tag{2.2}$$

В силу осевой симметрии и граничных условий в среде будут существовать три ненулевых компоненты тензора напряжений σ_{rr}, σ_{zz}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ и три ненулевых компоненты тензора деформаций ε_{rr}, ε_{zz}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$. Компоненты вектора смещений в радиальном и осевом направлениях u_r, u_z, удовлетворяющие уравнениям осесимметричной теории упругости и граничным условиям (2.2), имеют вид

$$u_r = -\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu} r - \frac{p_2 - p_1}{2\mu}\frac{r_0^2}{r}, \qquad u_z = -\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu} z \tag{2.3}$$

Компонентами тензора деформации, соответствующими вектору смещений (2.3), будут

$$\begin{gathered} \varepsilon_{rr} = -\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu} + \frac{p_2 - p_1}{2\mu}\frac{r_0^2}{r^2} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu} - \frac{p_2 - p_1}{2\mu}\frac{r_0^2}{r^2} \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu}, \qquad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{z\varphi} = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

3. На основании (1.2), (2.4) тензор электропроводности для области $r > r_0$ запишется

$$\begin{gathered} k_{rr} = \alpha - (3\delta + \gamma)\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu} + \gamma\frac{p_2 - p_1}{2\mu}\frac{r_0^2}{r^2} \\ k_{\varphi\varphi} = \alpha - (3\delta + \gamma)\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu} - \gamma\frac{p_2 - p_1}{2\mu}\frac{r_0^2}{r^2} \\ k_{zz} = \alpha - (3\delta + \gamma)\frac{p_2}{3\lambda + 2\mu}, \qquad k_{rz} = k_{r\varphi} = k_{z\varphi} = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Уравнение для распределения электрического потенциала u_2 в области $r > r_0$ на основе (3.1), (1.4) примет вид после введения безразмерных параметров $\rho = r/r_0$, $\xi = z/r_0$

$$\left(1-\frac{b}{\rho^2}\right)u_{2,\,\rho\rho}+\frac{u_{2,\,\rho}}{\rho}\left(1+\frac{b}{\rho^2}\right)+u_{2,\,\xi\xi}=0 \qquad (3.2)$$

Здесь b — безразмерный параметр

$$b=-\frac{\gamma(3\lambda+2\mu)}{\alpha(3\lambda+2\mu)-(3\delta+\gamma)p_2}\,\frac{p_2-p_1}{2\mu} \qquad (3.3)$$

При отсутствии перепада давлений $p_2 - p_1$, $b = 0$ и для распределения электрического поля получается уравнение Лапласа. При нахождении частных решений уравнения (3.2) методом разделения переменных получается следующее выражение:

$$u=\left[C_1I_0\left(\gamma\sqrt{\rho^2-b}\right)+C_2K_0\left(\gamma\sqrt{\rho^2-b}\right)\right]\cos\gamma\xi \qquad (3.4)$$

Здесь I_0, K_0 — функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода, C_1, C_2 — постоянные интегрирования. В области $r < r_0$, заполненной жидкостью с электропроводностью σ, потенциал u_1 удовлетворяет уравнению

$$u_{1,\,\rho\rho}+\frac{u_{1,\,\rho}}{\rho}+u_{1,\,\xi\xi}=0 \qquad (3.5)$$

Требуется найти электрический потенциал, удовлетворяющий в области $r < r_0$ уравнению (3.5), в области $r > r_0$ — уравнению (3.2), причем на границе $\rho = 1$ должны выполняться условия сопряжения, заключающиеся в равенстве потенциалов u_1, u_2 и равенстве нормальных составляющих тока через цилиндрическую поверхность $\rho = 1$

$$u_1=u_2,\qquad \sigma u_{1,\,\rho}=\left[\alpha-(3\delta+\gamma)\frac{p_2}{3\lambda+2\mu}+\gamma\frac{p_2-p_1}{2\mu}\right]u_{2,\,\rho} \qquad (3.6)$$

Точечный источник I расположен в точке $\rho = 0$, $\xi = 0$, поэтому потенциал u_1, должен в этой точке иметь особенность, соответствующую особенности точечного источника, который расположен в неограниченном однородном пространстве с электропроводностью σ, т. е. в точке $\rho = 0$, $\xi = 0$ потенциал u_1 должен иметь особенность [1,7]

$$u_1=\frac{I}{4\pi\sigma r_0\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}\right)\right] \qquad (3.7)$$

При удалении от источника потенциал должен стремиться к нулю

$$u_1\to0,\quad \xi\to\pm\infty;\qquad u_2\to0,\quad \sqrt{\rho^2+\xi^2}\to\infty \qquad (3.8)$$

4. Общие решения уравнений (3.2) и (3.5) с учетом граничных условий и условий сопряжения выбираются в форме

$$u_1=\int_0^\infty C(\gamma)K_0(\gamma\rho)\cos\gamma\xi\,d\gamma+\int_0^\infty A(\gamma)I_0(\gamma\rho)\cos\gamma\xi\,d\gamma \qquad (4.1)$$

$$u_2=\int_0^\infty B(\gamma)K_0\left(\gamma\sqrt{\rho^2-b}\right)\cos\gamma\xi\,d\gamma \qquad (4.2)$$

При использовании известного интегрального соотношения [8]

$$\int_0^\infty K_0(\gamma\rho)\cos\gamma\xi\,d\gamma=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\xi^2}}$$

можно выполнить условие в особой точке $\rho = 0$, $\xi = 0$, положив

$$C(\gamma)=\frac{I}{2\pi^2r_0\sigma} \qquad (4.3)$$

Для определения коэффициентов $A(\gamma)$, $B(\gamma)$ достаточно использовать условия сопряжения на границе $\rho = 1$, которые запишутся, если ввести обозначения

$$\beta = \sqrt{1-b}, \qquad s = \frac{\sigma(3\lambda+2\mu)}{\alpha(3\lambda+2\mu)-(3\delta+\gamma)p_2} \tag{4.4}$$

$$\int\limits_0^\infty \left[\frac{I}{4\pi^2 r_0\sigma} K_0(\gamma) + A(\gamma) I_0(\gamma) - B(\gamma) K_0(\gamma\beta)\right] \cos\gamma\xi\, d\gamma = 0 \tag{4.5}$$

$$\int\limits_0^\infty \left[sA(\gamma) I_1(\gamma) - \frac{sI}{4\pi^2 r_0\sigma} K_1(\gamma) + \beta B(\gamma) K_1(\gamma\beta)\right] \cos\gamma\xi\, d\gamma = 0 \tag{4.6}$$

Приравнивая к нулю подынтегральные выражения (4.5), (4.6), получаем следующие выражения для функций:

$$A(\gamma) = \frac{I}{2\pi^2 r_0\sigma} \frac{sK_1(\gamma)K_0(\gamma\beta) - \beta K_0(\gamma)K_1(\gamma\beta)}{\beta I_0(\gamma)K_1(\gamma\beta) + sI_1(\gamma)K_0(\gamma\beta)} \tag{4.7}$$

$$B(\gamma) = \frac{sI}{2\pi^2 r_0\sigma\beta} \frac{1}{\gamma\left[\beta I_0(\gamma)K_1(\gamma\beta) + sI_1(\gamma)K_0(\gamma\beta)\right]} \tag{4.8}$$

Таким образом, распределение потенциалов u_1, u_2 дается формулами

$$u_1 = \frac{I}{2\pi^2 r_0\sigma}\left\{\int\limits_0^\infty K_0(\gamma\rho)\cos\gamma\xi\, d\gamma + \int\limits_0^\infty \frac{sK_1(\gamma)K_0(\gamma\beta) - \beta K_0(\gamma)K_1(\gamma\beta)}{\beta I_0(\gamma)K_1(\gamma\beta) + sI_1(\gamma)K_0(\gamma\beta)} I_0(\gamma\rho)\cos\gamma\xi\, d\gamma\right\} \tag{4.9}$$

$$u_2 = \frac{sI}{2\pi^2 r_0\sigma\beta}\int\limits_0^\infty \frac{K_0\left(\gamma\sqrt{\rho^2-b}\right)\cos\gamma\xi\, d\gamma}{\gamma\left[\beta I_0(\gamma)K_1(\gamma\beta) + sI_1(\gamma)K_0(\gamma\beta)\right]} \tag{4.10}$$

Из (4.9), (4.10) видно, что распределение электрического потенциала с точностью до множителя зависит от двух безразмерных параметров s, β, причем, когда $\beta = 1$, отсутствует перепад давлений $p_2 - p_1$, получается известное из литературы решение [1].

Интегралы (4.9), (4.10) являются сходящимися, так как подынтегральные функции имеют логарифмическую особенность и не имеют полюсов. Действительно, если бы в какой-нибудь точке γ_0 подынтегральное выражение имело полюс, то в этой точке выполнялось бы соотношение

$$\frac{s}{\beta} = -\frac{I_0(\gamma_0)K_1(\gamma_0\beta)}{I_1(\gamma_0)K_0(\gamma_0\beta)} \tag{4.11}$$

Но при любом γ

$$I_0(\gamma) > 0, \quad I_1(\gamma) > 0, \quad K_0(\gamma) > 0, \quad K_1(\gamma) > 0$$

По определению $s > 0$, $\beta > 0$, (4.11) выполняться не может.

Если бы точечный источник мощностью I находился в однородной среде с электрическим сопротивлением R_∞

$$R_\infty = \frac{3\lambda+2\mu}{\alpha(3\lambda+2\mu)-(3\delta+\gamma)p_2} \tag{4.12}$$

то его потенциал u_3 задавался бы формулой

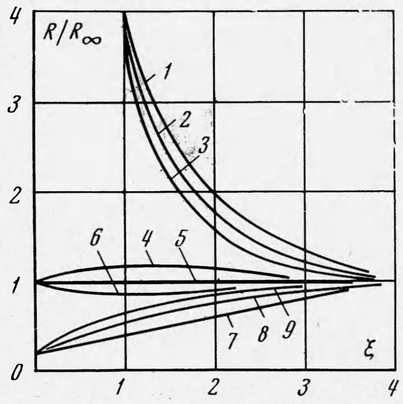
$$u_3 = \frac{IR_\infty}{4\pi r_0\sqrt{\rho^2+\xi^2}} \tag{4.13}$$

Отношение замеряемого потенциала u_1 к потенциалу u_3 в этой точке является по терминологии [1] относительным кажущимся сопротивлением

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{R}{R_\infty} = \frac{2}{\pi}\left\{\sqrt{\rho^2+\xi^2}\left[\int\limits_0^\infty K_0(\gamma\rho)\cos\gamma\xi\, d\gamma + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^\infty \frac{sK_1(\gamma)K_0(\gamma\beta) - \beta K_0(\gamma)K_1(\gamma\beta)}{\beta I_0(\gamma)K_1(\gamma\beta) + sI_1(\gamma)K_0(\gamma\beta)} I_0(\gamma\rho)\cos\gamma\xi\, d\gamma\right]\right\} \tag{4.14}$$

Значение отношения R/R_∞ на оси канала $\rho = 0$ было просчитано для различных значений параметров s, β и для разных ξ. На фигуре даны кривые относительного кажущегося сопротивления R/R_∞ для значений s, β, равных 0.1—1.3, 0.1—1.0, 0.1—0.7, 1—1.3, 1—1, 1—0.7, 5—0.7, 5—1, 5—1.3 (кривые *1*—*9* соответственно).



Из фигуры видно, что при больших расстояниях от источника, независимо от значений s, β кажущееся сопротивление, измеряемое по оси скважины, стремится к сопротивлению среды на бесконечности.

При малых расстояниях от источника кажущееся сопротивление стремится к сопротивлению среды в области $r < r_0$. При промежуточных расстояниях на кажущееся сопротивление влияет разница в сопротивлениях двух зон, а также неоднородность деформированного состояния среды при $r > r_0$. Деформированное состояние зоны $r > r_0$ влияет на распределение потенциала за счет изменения сопротивления на бесконечности от всестороннего сжатия по формуле (4.12) и за счет искажения конфигурации кривых кажущегося сопротивления в силу неоднородности деформированного состояния, характеризуемого отклонением параметра β от единицы.

Поступила 18 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Дахнов В. Н. Электрические и магнитные методы исследования скважин. М., «Недра», 1967.
2. Фок В. А. Теория каротажа. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1933.
3. Глумов И. Ф., Добрынин В. Н. Изменение электрического сопротивления водонасыщенных пород под влиянием горного и пластового давления. Сб. статей «Прикладная геофизика», М., Гостоптехиздат, 1962.
4. Моисеенко У. И., Истомин В. Е., Ушаков Г. Д. Влияние одностороннего давления на электрическое сопротивление горных пород. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
5. Пархоменко Э. И. Электрические свойства горных пород. М., «Наука», 1965.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

УДК 624.074.4

К РАСЧЕТУ ТЕРМОУПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

С. П. Гавеля, Ю. А. Мельников

(Днепропетровск)

В работах [1,2] предложен алгоритм расчета матриц Грина, который легко распространяется на случай замкнутых оболочек вращения, в частности сферической, тороидальной и других. Использование этих матриц позволяет эффективно определять напряженно-деформированное состояние таких оболочек, вообще говоря, при произвольном их нагружении. С другой стороны, расчет напряженного состояния неравномерно нагретой оболочки обычно приводится к учету так называемых температурных нагрузок довольно сложной структуры. Ниже на некоторых примерах, имеющих важ-