

УДК 539.4

## О ПРИМЕНЕНИИ ГРАДИЕНТНОГО ПОДХОДА К ОЦЕНКЕ ЛОКАЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

С. В. Сукнёв

Институт физико-технических проблем Севера СО РАН, 677891 Якутск

Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с применением градиентного подхода к оценке локальной прочности. Показано, что физически необоснованный выбор градиентной функции в критерии прочности может привести к противоречивым результатам.

В последнее время интенсивное развитие получили так называемые градиентные критерии предельного состояния [1–6]. Разрабатываются как общие подходы к их построению, так и конкретные критерии локальной прочности и текучести. Градиентные критерии в целом хорошо описывают наступление предельного состояния в локальных областях, например в зонах концентрации напряжений. Однако в некоторых случаях их применение приводит к противоречивым результатам. В настоящей работе показано, что правильное применение градиентного подхода к оценке локальной прочности позволяет получить физически корректные выражения для критических напряжений и размеров дефектов.

Традиционный подход к расчетам на прочность заключается в сопоставлении внутренних напряжений, возникающих в деформируемом теле, с их предельным значением. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_e \leq \sigma_0, \quad (1)$$

где  $\sigma_e = f(\sigma_{ij})$ ;  $\sigma_0 = \text{const}$ . Эквивалентное напряжение  $\sigma_e$  характеризует внутреннее напряженное состояние тела и в общем случае является функцией компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . Предельное напряжение  $\sigma_0$  характеризует усредненные механические свойства тела и полагается константой материала. Поскольку  $\sigma_0$  определяется для однородного напряженного состояния, область применения традиционного подхода ограничена случаями, когда размер зоны неоднородности напряжений достаточно велик, чтобы считать  $\sigma_0 = \text{const}$ . Поэтому для оценки локальной прочности применяется градиентный подход, суть которого состоит в том, что в отличие от традиционного подхода механические свойства относят не к материалу так таковому, а к некоторой деформируемой области конечных размеров, что более соответствует понятию механической прочности. Это означает, что предельное напряжение не является константой материала, а зависит от размера зоны неоднородности напряжений.

Характерный размер деформируемой области обозначим через  $L_e$ ; если он достаточно велик по сравнению с размерами структурных составляющих материала включая допустимые дефекты структуры (т. е. заведомо выполняются условия усреднения механических свойств), то величина локальной прочности мало отличается от  $\sigma_0$ . Наоборот, если  $L_e$  сопоставим с размерами структурных элементов, их влияние на локальную прочность становится заметным. Причем это влияние тем сильнее, чем меньше размер  $L_e$  по отношению к характерному размеру структуры материала  $L_0$ . Таким образом, локальная прочность материала должна зависеть не просто от характерного размера деформируемой области  $L_e$ , но от соотношения  $L_0/L_e$ . С учетом этого запишем условие локальной прочности

$$\sigma_e \leq f(\sigma_0, L_0/L_e). \quad (2)$$

Установить универсальный вид функции  $f(\sigma_0, L_0/L_e)$  вряд ли возможно, но в каждом конкретном случае можно сформулировать дополнительные условия, отражающие специфику задачи, которым должна отвечать данная функция, с их учетом определяется вид  $f(\sigma_0, L_0/L_e)$ . Сформулируем требования к  $f(\sigma_0, L_0/L_e)$  для задачи о концентрации напряжений:

— учет градиентов напряжений (градиентная гипотеза)

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0[1 + f^*(\sigma_{ij}, \sigma_{ij,k})], \quad f^*(\sigma_{ij}, \sigma_{ij,k}) = \text{inv}; \quad (3)$$

— связь с традиционными критериями

$$f(\sigma_0, 0) = \sigma_0; \quad (4)$$

— ограниченность критических напряжений

$$f(\sigma_0, L_0/L_e)/K_t \rightarrow \text{const}, \quad K_t \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Здесь  $f^*(\sigma_{ij}, \sigma_{ij,k})$  — безразмерная функция компонент тензора напряжений и тензора градиентов напряжений, инвариантная относительно преобразований координат;  $K_t$  — коэффициент концентрации напряжений.

Требование (3) связано с тем, что в условиях концентрации напряжений характерный размер деформируемой области определяется размером не всего тела, а только зоны неоднородности напряжений. Этот размер зависит от характера распределения напряжений и соответственно от их градиентов. Градиентная гипотеза выдвинута С. В. Серенсенем [7] (в отличном от (3) виде) и использовалась им, а также В. С. Стреляевым, Н. Н. Афанасьевым и др. для описания экспериментальных данных по хрупкой статической и усталостной прочности образцов с геометрическими концентраторами напряжений (отверстиями, вырезами, галтелями). В соответствии с градиентной гипотезой наступление предельного состояния определяется величинами как самих напряжений, так и их градиентов в рассматриваемой точке. Использование градиентной гипотезы является ключевым моментом в разрабатываемых в настоящее время градиентных критериях прочности [3, 4], однако оно имеет смысл, только если градиенты напряжений в опасных точках не обращаются в нуль (например, в силу симметрии задачи).

Требование (4) обеспечивает переход градиентного критерия (2) в традиционный (1) в случае однородного напряженного состояния.

Требование (5) отражает известный экспериментальный факт: независимо от остроты надреза и величины теоретического коэффициента концентрации напряжений разрушение тела происходит при конечной нагрузке [8]. Для острых концентраторов ее величина зависит лишь от длины надреза. Требование (5) фактически обеспечивает связь градиентного критерия (2) с линейной механикой разрушения.

С учетом требований (3)–(5) предлагается градиентный критерий предельного состояния [1, 2]

$$\sigma_e \leq \sigma_0(1 + \sqrt{L_0/L_e}); \quad (6)$$

$$L_e = \sigma_e/|\text{grad } \sigma_e|. \quad (7)$$

Характерный размер деформируемой области, определяемый выражением (7), показан на рис. 1. Кривая 1 характеризует распределение эквивалентного напряжения по опасному сечению, прямая 2 — касательная к кривой 1 в точке концентрации напряжений ( $\sigma_e = \sigma_{\text{max}}$ ), штриховая прямая — асимптота.

Критерий (6) достаточно точно описывает экспериментальные данные о наступлении локального пластического течения в области концентрации напряжений, полученные для

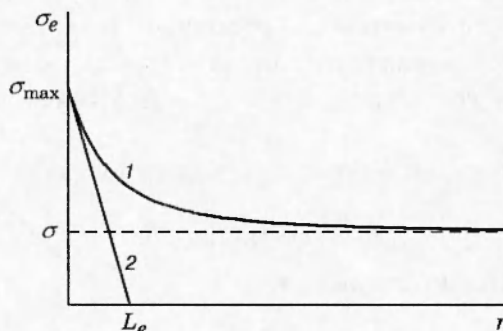


Рис. 1

некоторых металлических материалов на плоских образцах с отверстиями и вырезами различной формы [5].

В [3] предложен иной способ оценки локальной прочности. Кроме функции критерия (6)

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0(1 + \sqrt{L_0/L_e}), \quad (8)$$

требованиям (3)–(5) отвечает функция

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0\sqrt{1 + L_0/L_e}, \quad (9)$$

а также определенные комбинации (8) и (9). С учетом этого рассматривается градиентный критерий

$$\sigma_e \leq \sigma_0(1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + L_0/L_e}), \quad (10)$$

где  $\beta$  — безразмерный параметр. Характерный размер  $L_e$  оценивают по (7), в качестве эквивалентного рассматривают наибольшее нормальное напряжение.

Введение дополнительного параметра делает градиентный критерий более гибким и позволяет точнее описывать данные эксперимента, используя  $\beta$  в качестве параметра аппроксимации. Однако требованиям (3)–(5) отвечают не только функции (8) и (9), но и многие другие. Выбор функции  $f(\sigma_0, L_0/L_e)$  должен быть физически обоснован. Формальное усложнение градиентной функции не позволяет объяснить физический смысл вновь вводимых параметров, а в некоторых случаях даже приводит к абсурдным результатам.

Так же как в механике разрушения, в рамках градиентного подхода может быть поставлена задача оценки допустимых размеров дефектов и определения их критической величины. Однако при этом отсутствуют ограничения, связанные с типом дефекта, он может иметь любую геометрическую форму, а не только трещиноподобную. Допустимые размеры дефектов определяются из условия

$$\sigma_c \geq \sigma_0, \quad (11)$$

где  $\sigma_c$  — критическое значение приложенного напряжения, при котором в наиболее напряженной точке тела достигается предельное состояние. Условие (11) означает, что наличие в материале дефектов, являющихся концентраторами напряжений, не приводит к снижению критического напряжения по сравнению с прочностью  $\sigma_0$  «бездефектного» материала. В соответствии с градиентным подходом критическое напряжение оценивается следующим образом:

$$\sigma_c = f(\sigma_0, L_0/L_e)/K_t. \quad (12)$$

Используя градиентный критерий (10), с учетом (11) и (12) получим оценку для критического размера дефекта в виде сквозного эллиптического отверстия в пластине [3]:

$$l_c = l_0 \frac{K_t - 1}{K_t + 2\beta - 1} \left( 1 + \frac{1}{2K_t} \right), \quad (13)$$

где  $l_0 = 2K_c^2 / (\pi\sigma_0^2)$  — критический размер дефекта в виде продольной трещины;  $K_c$  — критический коэффициент интенсивности напряжений. Нетрудно убедиться, что зависимость  $l_c$  (13) противоречит здравому смыслу. При  $\beta \geq 0,25$  критический размер дефекта уменьшается при уменьшении остроты надреза, обращаясь в нуль при  $K_t = 1$ , т. е. менее острые концентраторы становятся более опасными за счет уменьшения критического размера. В диапазоне  $0 < \beta < 0,25$  величина  $l_c$  изменяется немонотонно, и только при  $\beta = 0$  зависимость  $l_c$  приобретает физический смысл, а именно этот случай соответствует использованию градиентного критерия (6). Таким образом, введение в градиентный критерий параметра  $\beta$  способом, предложенным в [3], хотя и делает его более гибким с точки зрения описания экспериментальных данных по локальной прочности, но является физически необоснованным.

Для устранения указанного противоречия представим  $l_c$  в виде

$$l_c = l_0 \left( 1 + \frac{\beta}{K_t} \right), \quad \beta \geq 0, \quad (14)$$

где  $\beta$  — числовой параметр. Физически непротиворечивые значения  $\beta$  лежат в области  $\beta \geq 0$ . Заметим, что, поскольку размер  $L_e$  является характерным, он может быть оценен различными способами, а не только с помощью выражения (7), поэтому выполнение требования (3), строго говоря, не является обязательным. Использование обратной величины относительного градиента напряжений для определения  $L_e$  удобно при решении упругопластической задачи с применением градиентного условия текучести [5]. Однако для оценки локальной прочности линейно-упругого тела в этом нет необходимости, тем более что определение относительного градиента напряжений достаточно трудоемко. Известно [9, 10], что локальное распределение напряжений зависит от радиуса кривизны концентратора более, чем от других геометрических параметров, поэтому в первом приближении для оценки  $L_e$  можно использовать радиус кривизны концентратора  $\rho$  в опасной точке. При этом снимаются ограничения, связанные с применением градиентной гипотезы, так как не требуется вычислять градиенты напряжений. Для оценки  $L_0$  используем критический размер дефекта  $l_c$ . Представим функцию  $f(\sigma_0, L_0/L_e)$  в виде

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0 f(l_c/\rho). \quad (15)$$

Принимая во внимание, что коэффициент концентрации напряжений является возрастающей функцией параметра  $l/\rho$  ( $l$  — размер концентратора):

$$K_t = f_t(l/\rho), \quad (16)$$

нетрудно убедиться, что для выполнения требований (4), (5) достаточно взять в качестве  $f(l_c/\rho)$  функцию  $f_t$ :

$$f(l_c/\rho) = f_t(l_c/\rho). \quad (17)$$

Таким образом, критерий локальной прочности с учетом (15) и (17) принимает вид

$$\sigma_e \leq \sigma_0 f_t(l_c/\rho). \quad (18)$$

Следовательно, критическое напряжение определяется выражением  $\sigma_c = \sigma_0 f_t(l_c/\rho) / f_t(l/\rho)$ , а отношение  $f_t(l/\rho) / f_t(l_c/\rho)$  можно рассматривать как эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Для большого числа практически важных задач коэффициент концентрации напряжений можно приближенно (или точно) представить в виде [11]

$$K_t = 1 + \alpha\sqrt{a/\rho}, \quad (19)$$

где  $\alpha$  — числовой коэффициент, зависящий от геометрии тела;  $a = l/2$ . Для таких задач критерий локальной прочности (18) преобразуется к виду (6) при  $L_0 = \alpha^2 l_c/2$ . Однако, если требования, предъявляемые к точности определения критического напряжения, не допускают этого, то градиентная функция должна определяться в соответствии с (15), (17).

Рассмотрим несколько примеров. Начнем с одноосного растяжения бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием. Решение задачи получено Г. В. Колосовым [12] и Инглисом [13]. Коэффициент концентрации напряжений определяется выражением (19) с  $\alpha = 2$ . Критическое напряжение имеет вид  $\sigma_c = \sigma_0(1 + \sqrt{2l_c/\rho})/K_t$ , где  $l_c$  определяется согласно (14). Параметр  $\beta$  находится экспериментально, но, если необходимые экспериментальные данные отсутствуют,  $\beta$  следует положить равным нулю. В этом случае будут получены нижние оценки критического размера концентратора и критического напряжения, идущие в запас прочности. Заметим, что параметр  $\beta$  может быть определен и расчетным путем, если для оценки характерного размера  $L_e$  воспользоваться выражением (7). В рассматриваемом примере величина  $\beta$ , вычисленная таким образом, равна 0,5 (если в качестве эквивалентного используется наибольшее нормальное напряжение) или 0,4 (если используется интенсивность напряжений) [6]. Однако обоснованность этих оценок можно подтвердить только экспериментально.

Для пластины конечных размеров с центральным эллиптическим отверстием коэффициент концентрации напряжений также можно представить в виде (19). При этом коэффициент  $\alpha$  зависит от размеров пластины и находится по известным приближенным формулам [11]. В этом случае критическое напряжение имеет вид

$$\sigma_c = \sigma_0(1 + \alpha\sqrt{l_c/(2\rho)})/K_t. \quad (20)$$

Здесь  $l_c$  определяется выражением (14), но величина  $l_0$ , входящая в него, должна быть скорректирована с учетом конечных размеров пластины:  $l_0 = (2K_c^2/(\pi\sigma_0^2))(1/F^2)$ , где  $F$  — поправочная функция, учитывающая влияние размеров тела на коэффициент интенсивности напряжений [14].

Выражения (19), (20) применимы также к концентраторам неэллиптической формы, для которых можно ввести понятие «эквивалентного эллиптического отверстия» или «эквивалентного эллиптического выреза» [11]. Последнее относится как к плоским, так и к цилиндрическим образцам с поверхностным кольцевым надрезом, в том числе V-образной формы с небольшим углом раствора. В [15] приведены экспериментальные данные по определению разрушающего напряжения  $\sigma_c$  при растяжении цилиндрических образцов с кольцевым надрезом. Образцы изготавливались из высокопрочной стали S45C. Надрез имел V-образную форму с углом раствора  $\psi = 60^\circ$  и радиусом закругления в вершине  $\rho$ . Образцы с глубиной надреза  $a = 0,2$  мм испытывали варьируя радиус  $\rho$  в пределах  $0,056 \div 2,1$  мм. Минимальный диаметр поперечного сечения постоянный и составлял 4,5 мм.

На рис. 2 представлены результаты расчета  $\sigma_c$  по формуле (20) в зависимости от коэффициента концентрации напряжений при  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$  (кривые 1 и 2). Расчетная кривая 1 ограничивает снизу область значений  $\sigma_c$ , кривая 2 аппроксимирует экспериментальные данные, изображенные точками. При  $K_t \rightarrow \infty$  расчетные кривые асимптотически приближаются к значению, определенному в соответствии с подходом линейной механики разрушения (штриховая прямая). Пунктирная кривая рассчитана согласно традиционному подходу. Экспериментальные данные достаточно убедительно демонстрируют преимущество градиентного подхода по сравнению с традиционным.



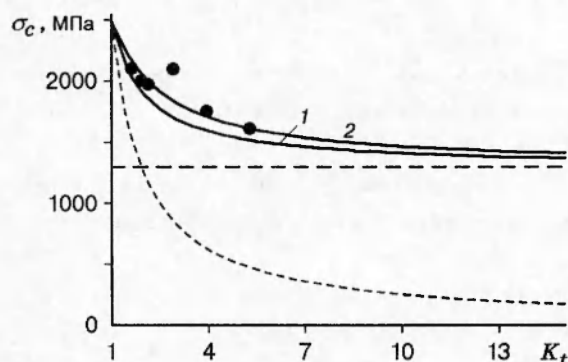


Рис. 2

Теперь рассмотрим одноосное растяжение неограниченного тела, ослабленного внутренней полостью, которая представляет собой эллипсоид вращения вокруг оси нагружения. При  $K_t \rightarrow \infty$  эллипсоид вырождается в круглую трещину радиуса  $a$ . Коэффициент концентрации напряжений связан с  $a$  и  $\rho$  следующим образом [9]:

$$K_t = \frac{1 - \nu - (1,5 - \nu)a/\rho + 2(a/\rho)^2 + (\nu - (1,5 + \nu)a/\rho)ac/\rho}{1 - \nu + a/\rho + (a/\rho - 2 + 2\nu)ac/\rho - (1 + \nu)(ac/\rho)^2}, \quad (21)$$

где

$$c = \frac{\arctg \sqrt{a/\rho - 1}}{\sqrt{a/\rho - 1}} \quad \text{при } a/\rho > 1; \quad c = \frac{\ln(1 + \sqrt{1 - a/\rho}) - (1/2)\ln(a/\rho)}{\sqrt{1 - a/\rho}} \quad \text{при } a/\rho < 1;$$

$\nu$  — коэффициент Пуассона. Если  $\rho = a$ , то

$$K_t = \frac{3(9 - 5\nu)}{2(7 - 5\nu)}. \quad (22)$$

Данная задача интересна прежде всего для оценки опасности внутренних дефектов. В соответствии с градиентным подходом критический размер дефекта определяется выражением (14), а градиентная функция в критерии локальной прочности — выражениями (15), (17) с учетом (16), (21), (22). Величина  $l_0$ , входящая в (14), представляет собой критический размер дефекта в виде круглой трещины:  $l_0 = \pi K_c^2 / (2\sigma_0^2)$ . Использование градиентной функции (8) в данном случае может привести к существенной погрешности в определении критического размера дефекта. Например, для материала WC — 10% Co находились [16] критические размеры дефектов в виде сферических пор. В результате проведенных экспериментов установлено, что они мало отличаются от значений, рассчитанных для круглой трещины на основе подхода линейной механики разрушения. Это означает, что коэффициент  $\beta$  в выражении (14) для данного материала равен нулю, т. е. независимо от формы имеющиеся в материале дефекты до определенного (критического) размера не оказывают влияния на его прочность. Использование же функции (8) в критерии локальной прочности приводит в данном случае к завышенной на 62% оценке критического размера дефекта [6].

Таким образом, правильное применение градиентного подхода к оценке локальной прочности позволяет получить физически корректные выражения для критических напряжений и размеров дефектов, хорошо описывающие известные экспериментальные данные.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новопашин М. Д., Сукнёв С. В. Градиентный критерий локального течения элементов металлоконструкций с концентраторами напряжений / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физ.-техн. пробл. Севера. Препр. Якутск, 1987.
2. Новопашин М. Д., Сукнёв С. В. Градиентный критерий текучести элементов конструкций с концентраторами напряжений // Моделирование в механике. 1987. Т. 1, № 3. С. 131–140.
3. Леган М. А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 146–154.
4. Харлаб В. Д. Градиентный критерий хрупкого разрушения // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Сб. науч. тр. СПб.: С.-Петербур. инж.-строит. ин-т, 1993. С. 4–16.
5. Новопашин М. Д., Сукнёв С. В., Иванов А. М. Упругопластическое деформирование и предельное состояние элементов конструкций с концентраторами напряжений. Новосибирск: Наука, 1995.
6. Сукнёв С. В. Градиентный подход к оценке хрупкой прочности элементов конструкций с концентраторами напряжений / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т физ.-техн. пробл. Севера. Препр. Якутск, 1997.
7. Серенсен С. В. Динамическая прочность металлов и расчет деталей авиаконструкций // Тр. Всесоюз. конф. по прочности авиаконструкций, Москва, 23–27 дек. 1933 г. М.: ЦАГИ, 1935. Вып. 2. С. 39–57.
8. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
9. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
10. Leven M. M. Stress gradients in grooved bars and shafts // Proc. SESA. 1955. V. 13, N 1. P. 207–213.
11. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. М.: Мир, 1977.
12. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев: Типография К. Маттисена, 1909.
13. Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Trans. Inst. Naval Architects. 1913. V. 105, pt 1. P. 219–230.
14. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.
15. Nisitani H., Noguchi H. Tensile fracture criterion of high strength steel specimens with a circumferential notch // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1986. V. A52, N 477. P. 1286–1289.
16. Nordgren A., Melander A. Influence of porosity on strength of WC — 10 % Co cemented carbide // Powder Met. 1988. V. 31, N 3. P. 189–200.

*Поступила в редакцию 17/XI 1997 г.*

---