

$\Delta T_K(T_n^0)$ , рассчитанные при различных значениях ( $\sigma_s^0 = 59; 40; 20$  МПа, кривые 1—3 соответственно). Поскольку для некоторых ВВ зависимость  $\sigma_s^0(T_n^0)$  линейная [8], кривой 4 показан ход функции  $\Delta T_K(T_n^0)$  с учетом связи  $\sigma_s^0 = 0,42(T_n^0 - 273)$ , где  $\sigma_s^0$ , МПа;  $T_n^0$ , К. В интервале значений  $T_n^0$  от 25 до 140°C зависимость 4 аппроксимируется линейной функцией  $\Delta T_K = 2,217T_n^0 - 31,07$ .

Как видно из таблицы, увеличение жесткости системы нагружения вдвое приводит к некоторому уменьшению величины разогрева. Это понятно физически, поскольку с возрастанием  $K$  уменьшается энергия упругой деформации ударника  $\sim \pi^2 R^4 p^2 / 2K$ , часть которой при разупрочнении диска диссипирует в виде тепла, идущего на разогрев вещества.

Увеличение начальной температуры образца  $T_0$  также уменьшает  $T_K$ , что связано с уменьшением прочности вещества  $\sigma_s^0$ . Эти данные хорошо согласуются с экспериментальными результатами [8] по снижению чувствительности ВВ вследствие его предварительного нагрева.

Итак, в работе выполнен теоретический анализ явления теплового разупрочнения пластического диска в условиях адиабатического сдвигания между соударяющимися твердыми поверхностями. Рассчитаны значения максимальных температур разогрева вещества, знание которых играет важную роль в анализе чувствительности твердых ВВ к механическим воздействиям.

Поступила 17 VII 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
2. Haddow J. B. The compression of a thin disk. — Intern. J. Mech. Sci., 1965, vol. 7, N 10.
3. Боднева В. Л., Боболев В. К., Дубовик А. В. Деформация свинцовых дисков при ударе. — ПМТФ, 1975, № 5.
4. Амосов А. П., Мишина В. А. К теории воздействия на тонкий пластический слой ударом. — ФГВ, 1980, № 2.
5. Дубовик А. В. Тепловая неустойчивость осевой деформации пластического слоя и оценка критических давлений инициирования твердых ВВ при ударе. — ФГВ, 1980, № 4.
6. Афанасьев Г. Т., Боболев В. К., Дубовик А. В. Деформация и разрушение тонкого диска при сжатии. — ПМТФ, 1971, № 3.
7. Харитон Ю. Б. К вопросу детонации от удара. — В кн.: Сборник статей по теории ВВ/Под ред. К. К. Андреева, Ю. Б. Харитона. М.: Оборонгиз, 1940.
8. Афанасьев Г. Т., Боболев В. К. Иницирование твердых ВВ ударом. М.: Наука, 1968.

УДК 539.3

#### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОДНОНАПРАВЛЕННОМ КОМПОЗИТЕ В СРАВНЕНИИ СО СЛОИСТЫМ УПРУГИМ ТЕЛОМ

А. А. Ермак  
(Новосибирск)

При изучении однонаправленного композита часто используется допущение о том, что армирующие волокна испытывают только растяжение — сжатие, а связующее — лишь сдвиг на площадках, параллельных волокнам. Эта гипотеза основана на чисто качественных соображениях, и дать достаточно точную априорную оценку вносимой ею погрешности, по-видимому, невозможно. Поэтому представляет интерес решение тестовых задач и сравнение полученных результатов с решениями для упругой слоистой среды. В данной работе в качестве таких задач рассмотрены распространение стационарных гармонических волн вдоль волокон и нормальное падение плоской волны напряжений на полупространство. В случае, когда граничная нагрузка является функцией Хевисайда от времени, вторая задача для приближенной модели рассмотрена в [1]. Анализ полученного решения показал, что оно обладает всеми основными особенностями, присутствующими и в более сложных задачах. В то же время рассмотрение плоской волны удобно при численном решении, так как дает возможность ограничиться рассмотрением лишь двух смежных слоев.

1. Пусть композит состоит из уложенных в один слой параллельных волокон толщины  $h$  с модулем Юнга  $E$  и плотностью  $\rho_1$ , промежутки между которыми заполнены слоями связующего шириной  $H$  с модулем сдвига  $G$  и плотностью  $\rho_2$ . Толщину образца примем за единицу, ось  $y$  направим по границе волокна и связующего, ось  $x$  — перпендикулярно волокнам (фиг. 1). В соответствии с принятой моделью композита уравнения движения компонентов в случае, когда все волокна движутся одинаково, имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2G}{Eh} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad v|_{x=0} = v|_{x=H} = u,$$

где  $u$  и  $v$  — смещения соответственно волокон и связующего вдоль оси  $y$ ;  $t$  — время;  $c_1 = \sqrt{E/\rho_1}$ ;  $c_2 = \sqrt{G/\rho_2}$ . Напряжения пропорциональны соответствующим деформациям  $\sigma = E \partial u / \partial y$ ,  $\tau = G \partial v / \partial x$ .

Поскольку композит представляет собой неоднородное тело, он обладает геометрической дисперсией, которая для гармонических волн проявляется в зависимости фазовой скорости от частоты. Так как нестационарные волны можно представить в виде интеграла Фурье, т. е. разложить на гармоники, то из анализа дисперсионных кривых приближенной модели можно извлечь некоторую предварительную качественную информацию о ее свойствах в сравнении с упругим телом.

Ограничимся рассмотрением волн, распространяющихся вдоль волокон. Пусть композит занимает всю плоскость и подвержен гармоническим колебаниям

$$(1.2) \quad u(y, t) = u^0 e^{i(qy - ct)},$$

где  $u^0$  — амплитуда;  $c$  — фазовая скорость;  $q$  — волновое число. Представление (1.2) эквивалентно преобразованию Фурье по  $y$  с параметром  $q$  и по  $t$  с параметром  $-qc$ . После такого преобразования второе из уравнений (1.1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями. Решив его, можно исключить  $v$  из первого уравнения и получить дисперсионное соотношение для приближенной модели

$$(1.3) \quad \frac{c_1^2 - c^2}{c} = \frac{2\rho_2 c_2}{q\rho_1 h} \frac{1 - \cos(qHc/c_2)}{\sin(qHc/c_2)}.$$

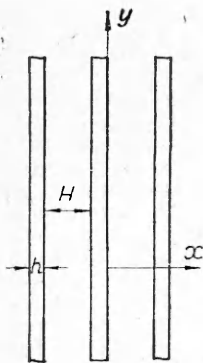
Можно видеть, что между каждыми двумя из гипербол  $qc = \pi(2k+1)c_2/H$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) лежит ветвь графика функции  $c = c(q)$  — дисперсионная кривая  $c = c_k(q)$ , поэтому этот график имеет вид, изображенный на фиг. 2 (сплошные линии). Каждая дисперсионная кривая соответствует некоторой моде колебаний, которые отличаются друг от друга распределением смещения связующего  $v$  по  $x$ . Профиль  $v$  находится из второго уравнения в (1.1):

$$v(x, y, t) = \frac{u(y, t)}{\sin(qHc/c_2)} \left\{ \sin \left[ \frac{qHc}{c_2} \left( 1 - \frac{x}{H} \right) \right] + \sin \left( \frac{qxc}{c_2} \right) \right\}.$$

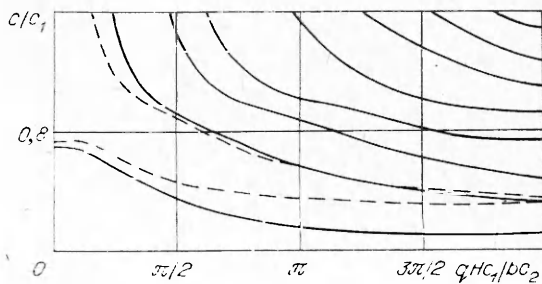
Последняя формула описывает стоячие волны, длина которых при данном  $q$  уменьшается с ростом номера моды.

Из (1.3) следует, что скорость бесконечно коротких волн для любой моды равна нулю, а скорость бесконечно длинных волн для всех мод, кроме нулевой, стремится к бесконечности. Устремляя  $q$  к нулю и полагая  $c$  ограниченной, найдем эту скорость для низшей моды:

$$c_\infty = \sqrt{Eh/(\rho_1 h + \rho_2 H)}.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Полученное соотношение выражает тот очевидный факт, что эффективная нормальная жесткость рассматриваемой среды пропорциональна  $Eh$ , а средняя плотность  $\rho_1 h + \rho_2 H$  (коэффициентом пропорциональности служит  $(h + H)^{-1}$ ).

В безразмерных переменных  $\kappa = qHc_1/bc_2$ ,  $\xi = c/c_1$ , где  $b = \rho_2 H/\rho_1 h$ , дисперсионное соотношение (1.3) имеет вид

$$(1 - \xi^2)/\xi = 2(1 - \cos(b\kappa\xi))/(\kappa \sin(b\kappa\xi)).$$

Таким образом, форма и расположение дисперсионных кривых в надлежащей системе координат зависят лишь от безразмерного параметра  $b$ . С ростом  $b$ , т. е. с ростом относительной массы связующего, кривые приближаются к координатным осям.

Рассмотрим теперь среду, состоящую из чередующихся более жестких и более податливых упругих слоев. Для удобства в дальнейшем жесткие слои будем по-прежнему именовать волокнами, а податливые — связующим.

Дисперсионное соотношение для симметричных волн, распространяющихся в такой среде параллельно слоям, дано в [2,3]. Оно содержит пять независимых параметров. В качестве одного из них вновь можно выбрать  $b$ , а в качестве остальных, например, коэффициент армирования  $\psi = h/(h + H)$ , отношение модулей Юнга волокна и связующего  $E/E_2$  и их коэффициенты Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . На фиг. 2 штриховые линии соответствуют двум нижним модам при  $b = 1$ ,  $\psi = 0,5$ ,  $E/E_2 = 10$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$  (приведенные на фигуре кривые для приближенной модели построены для тех же значений параметров).

Качественное поведение кривых в обоих случаях сходно. Поскольку в точной теории учтена нормальная жесткость связующего, вся механическая система в целом оказалась также более жесткой, поэтому и соответствующие фазовые скорости для нижней моды при всех  $q$ , в том числе и малых, оказались выше. Это справедливо и для  $c_\infty$  (формула (36) в [3]). Поскольку рассматривается случай плоского напряженного состояния, константу Ламэ  $\lambda$  в этой формуле следует заменить на  $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ . Существенное количественное расхождение между сплошными и штриховыми кривыми наблюдается лишь для достаточно больших  $q$ , но для волн, длина которых порядка или меньше характерного размера структурной неоднородности среды, ожидать хорошего совпадения приближенной модели с точной теорией и не следует. Отметим, что скорость бесконечно коротких волн в слое упругого тела равна скорости волн Стоунли ( $< c_2$ ), но при выбранном значении  $E/E_2$  последние отсутствуют [4].

2. Перейдем к задаче о падении волны напряжений на полупространство. Начнем с приближенной модели. Пусть к границе композита, занимающего полупространство  $y \geq 0$  и находящегося в начальном моменте времени в естественном состоянии, прикладывается напряжение

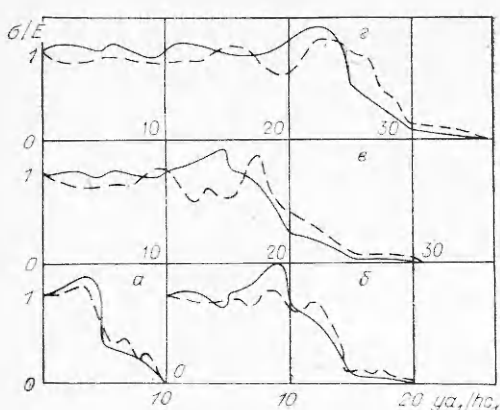
$$(2.1) \quad \sigma = E(1 - e^{-2ct_1/h})\delta_0(t),$$

где  $\delta_0$  — единичная функция Хевисайда. Считается, что напряжение (2.1) приложено лишь к волокнам, так как в соответствии с принятой моделью композита связующее не несет нормальной нагрузки (подробнее об этом см. в [1]).

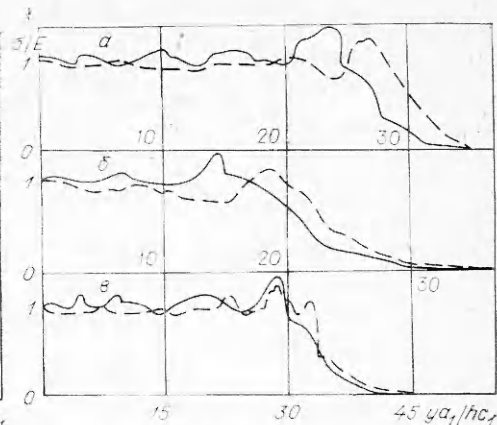
Зависимость  $\sigma$  от времени в виде (2.1) принята из следующих соображений. Рассматриваемая приближенная модель рассчитана на изучение упругого поля, возникающего при внезапном разрыве волокон [5—7]. Последний принято моделировать мгновенным падением напряжения в точке разрыва до нуля. В дополнительной задаче, полученной из исходной вычитанием начального поля, это равносильно приложению нагрузки в виде функции Хевисайда. Для таких граничных условий в рамках приближенной модели удается построить аналитическое решение (в конечном виде или в квадратурах). Однако модель не должна, по-видимому, давать в этом случае результаты, близкие к теории упругости, так как вклад в решение коротких волн, плохо ею описываемых, может оказаться весьма существенным. Кроме того, естественно считать, что разрыв волокна происходит за некоторое конечное время, например  $\sim h/c_1$ . Поэтому граничная нагрузка в рассматриваемой тестовой задаче выбрана непрерывной при  $t = 0$  и сходящейся к константе за время  $\sim h/c_1$ .

Уравнения (1.1) с граничным условием (2.1) и нулевыми начальными условиями решались методом конечных разностей. Разностная схема в смещениях и соотношение шагов, минимизирующее численную дисперсию, брались согласно рекомендациям [8]. Параметр, обозначенный в [8] через  $\Delta t/\alpha$  и характеризующий точность схемы, полагался равным 0,05. Поскольку граничная нагрузка непрерывна, полученное решение оказалось практически точным. Конкретный расчет по разностной схеме проводился при  $0 \leq y \leq y_0$ , причем ордината фиктивной границы  $y_0$  выбиралась с таким расчетом, чтобы волна за рассматриваемый промежуток времени не успела до нее дойти, а краевые условия на ней полагались однородными. Ввиду периодичности задачи область решения была ограничена и по  $x$ . В качестве фиктивной границы бралась средняя линия слоя связующего и на ней задавались условия симметрии. Напряжения по найденным смещениям определялись численным дифференцированием. Результаты расчетов приведены ниже в сравнении с решением для упругой сплошной среды.

Для последней задача формулировалась аналогично: считалось, что ко всем волокнам приложено напряжение (2.1), а связующее свободно от нагрузки. Рассматривалось плоское напряженное состояние. Область расчета ограничивалась средними линиями волокна и смежного с ним слоя связующего, на которых ставились условия



Фиг. 3



Фиг. 4

симметрии, и фиктивной границей  $y = y_0$  с однородными граничными условиями. Явная трехслойная разностная схема для решения двумерных уравнений Ламэ получена вариационным методом. При этом во внутренних точках волокна и связующего вторые производные аппроксимировались обычными центральными разностями (т. е. со вторым порядком), а разностные соотношения на границах аппроксимировали граничные условия и условия жесткого контакта волокна и связующего с первым порядком. Волокно покрывалось равномерной сеткой с шагом  $\Delta x$ , причем количество точек на полутолщине, включая граничные, бралось равным шести. Шаг по времени  $\Delta t$  выбирался максимально возможным из необходимого условия устойчивости  $\Delta t \leq \Delta x / \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — скорости соответственно продольных и поперечных волн в волокне. Связующее также покрывалось равномерной сеткой, причем  $\Delta y$  бралось то же, что и в волокне, а  $\Delta x$  при изменении  $b$  или  $\psi$  могло несколько варьироваться таким образом, чтобы уместить все необходимые массивы в оперативной памяти ЭВМ. Точность расчетов контролировалась уменьшением шагов разностной схемы вдвое для малых значений времени.

На фиг. 3,  $a-g$  ( $t=10; 20; 30; 40$  соответственно — время, отнесенное к  $h/a_1$ ) приведено распределение усредненного по толщине волокна нормального напряжения для приближенной модели (сплошные линии) и упругого тела (штриховые линии) вдоль координаты  $y$  при тех же значениях параметров, что и на фиг. 2. На фиг. 4 даны аналогичные графики для других значений некоторых из параметров ( $a-t = 35,4$ ,  $b = 2$ ;  $b-t = 37,5$ ,  $\psi = 2$ ;  $e-t = 60$ ,  $v_1 = v_2 = 0$ ). Видно, что результаты, полученные в рамках обеих моделей, находятся в хорошем качественном соответствии друг с другом, причем даже для малых значений времени. Некоторое опережение максимального пика напряжений в упругой среде по сравнению с приближенной моделью объясняется несколько заниженной фазовой скоростью, которую последняя дает для длинных волн.

При малых  $y$  напряжение в обоих случаях, начиная с некоторого момента времени, практически стабилизируется. При этом приближенная модель завышает их значение примерно на 10%, что близко к  $E_2/(E + E_2)$ . Это объясняется тем, что в упругой среде связующее принимает на себя приблизительно такую часть нагрузки. Если приложить граничное напряжение и к связующему, то графики при малых  $y$  существенно сближаются, но благодаря малой скорости волн в связующем это изменение граничных условий никак не повлияет на их существенно нестационарные участки.

Таким образом, полученные результаты подтверждают адекватность рассматриваемой приближенной модели композита.

Интересно было бы сравнить и касательные напряжения на границе волокна и связующего, рассчитанные согласно обоим методам, однако, к сожалению, сделать это достаточно точно не удастся. Дело в том, что эти напряжения по сравнению с граничной нагрузкой являются малыми величинами, сравнимыми в данном случае с погрешностью численного расчета. Для более точного вычисления  $\tau$  необходимо существенно уменьшить шаги разностной схемы, что чрезвычайно сложно ввиду ограниченности оперативной памяти ЭВМ.

Автор благодарит А. М. Михайлова и М. В. Степаненко за полезные обсуждения.

Поступила 15 IV 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. М. Динамика однонаправленного стеклопластика. — ПМТФ, 1974, № 4.
2. Achenbach J. D., Herrmann G. Wave motion in solids with lamellar structuring. — In: Dynamics of structured solids. N. Y., 1968.
3. Аханбах Дж. Д. Колебания и волны в направленно армированных композитах. — В кн.: Композиционные материалы. М.: Мир, 1978, т. 2.

4. Абдукадыров С. А., Степаненко М. В. Об особенностях распространения гармонических волн в плоском слое, контактирующем с упругой средой. — ФТПРПИ, 1979, № 5.
5. Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений около дефекта в стеклопластике. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 19—20. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
6. Ермак А. А., Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений в стеклопластике. — ПМТФ, 1978, № 6.
7. Ермак А. А. Распределение напряжений в глубине однонаправленного стеклопластика при его разрушении. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 48. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1980.
8. Степаненко М. В. О динамике разрушения однонаправленного композита. — ПМТФ, 1979, № 4.

УДК 517.9 : 624.07 — 415

### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНЫХ И ИЗГИБНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ ПЛАСТИН, СКРЕПЛЕННЫХ ПОД УГЛОМ

Е. В. Михайлова

(Ленинград)

1. Введем две системы координат так, чтобы в левой пластине  $x_1 \leq 0$ , а в правой  $x_2 \geq 0$  (фиг. 1). Оси  $z_1$  и  $z_2$  направлены при этом нормально поверхностям пластинок, так чтобы две полуплоскости ( $z_1 = 0$  при  $x_1 \leq 0$  и  $z_2 = 0$  при  $x_2 \geq 0$ ) совпадали с их нейтральными плоскостями. Ось  $y$  расположена вдоль линии соединения пластин. Пусть падающая синусоидальная волна распространяется в левой пластине. Рассмотрим условия ее прохождения через границу.

Колебания пластин описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$(1.1) \quad D(\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4) + \rho h \partial^2 w / \partial t^2 = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$(1.3) \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где  $h$  — толщина пластины;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $D$  — жесткость на изгиб.

Смещения точек нейтральных плоскостей пластин при колебаниях  $u_1, u_2$  вдоль осей  $x_1, x_2, v_1, v_2$  — вдоль оси  $y$  будут характеризовать волны в плоскостях пластин, а смещения  $w_1, w_2$  по осям  $z_1, z_2$  соответственно — изгибные волны [1, 2].

Решения задачи должны удовлетворять восьми граничным условиям на шарнирно-опертых краях

$$(1.4) \quad w = u = \partial v / \partial y = \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \quad (y = 0, l)$$

и восьми условиям сопряжения на общем ребре ( $x = 0$ )

$$(1.5) \quad u_1 = u_2 \cos \varphi + w_2 \sin \varphi;$$

$$(1.6) \quad w_1 = -u_2 \sin \varphi + w_2 \cos \varphi;$$

$$(1.7) \quad \partial w_1 / \partial x_1 = \partial w_2 / \partial x_2;$$

$$(1.8) \quad \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} \cos \varphi + R_{x_2} \sin \varphi;$$

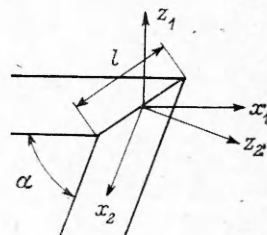
$$(1.9) \quad R_{x_1} = -\sigma_{x_2} \sin \varphi + R_{x_2} \cos \varphi;$$

$$(1.10) \quad M_{x_1} = M_{x_2};$$

$$(1.11) \quad v_1 = v_2;$$

$$(1.12) \quad \tau_{x_1 y} = \tau_{x_2 y},$$

где  $\varphi = \pi - \alpha$  ( $\alpha$  — угол между пластинами);  $\sigma_{x_i}$  — нормальные напряжения;  $\tau_{x_i y}$  — напряжения сдвига;  $M_{x_i}$  — изгибающие моменты относительно оси  $x = 0$ ;  $R_{x_i} = Q_{x_i} + \partial M_{x_i y} / \partial y$  ( $Q_{x_i}$  — поперечная сила,  $M_{x_i y}$  — крутящий момент);  $i = 1, 2$ .



Ф и г. 1