ПМТФ, № 1, 1962

ОДНОМЕРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ПЛАЗМЫ В КАНАЛЕ С ВНЕШНИМ ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ И СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Г. Ю. Даутов

(*Новосибирск*)

Одномерное установившееся движение плазмы с постоянной электрической проводимостью и удельными теплоемкостями рассматривалось в ряде работ [1-4]. В данной работе приводится метод решения уравнений одномерного установившегося движения плазмы в канале с внешними магнитным полем и сопротивлением с учетом диссоциации и изменения проводимости по длине канала. Система уравнений приводится к виду, удобному для решения на электронных вычислительных машинах. Решается задача о движении частично ионизованных паров цезия и результаты решения приводятся в виде графиков.

§ 1. Уравнения, определяющие движение плазмы. Рассмотрим одномерное установившееся движение невязкой нетеплопроводной плазмы при малых магнитных числах Рейнольдса.

Поперечное сечение канала прямоугольное, две противоположные стенки являются проводниками электрического тока и служат электродами. К этим стенкам присоединено внешнее сопротивление R. Магнитное поле перпендикулярно к оси канала, и его распределение по длине канала задано. Исходными уравнениями будут

$$\rho u A = \rho_0 u_0 A_0, \qquad \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{jH}{c} - \frac{dP}{dx}$$

$$\rho u \frac{dE}{dx} = -P\frac{du}{dx} - \frac{uP}{A}\frac{dA}{dx} + \frac{j^2}{\sigma} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность плазмы, u — скорость движения плазмы, P — давление, A — площадь поперечного сечения канала, j — плотность тока, σ — электрическая проводимость плазмы, E — внутренняя энергия единицы массы плазмы, H — напряженность магнитного поля и c — скорость света.

Для определения плотности тока и суммарного тока I, проходящего через внешнее сопротивление, воспользуемся уравнениями цепи

$$RI = k, \qquad I = \int_0^l jh\,dx, \qquad k + \frac{js}{\sigma} = \frac{uHs}{c} \tag{1.2}$$

Здесь k — разность потенциалов между электродами; h, s, l — высота, ширина и длина канала соответственно. Первые два из уравнений (1.2) выражают законы Ома и Кирхгофа, третье уравнение означает равенство электродвижущей силы, индуцированной на ширине канала s, сумме падений напряжений внутри плазмы и на внешнем сопротивлении. Стенки канала, служащие электродами, предполагаются идеальными проводниками, и поэтому величина k постоянна вдоль канала. Внешнее сопротивление мысленно разбивается [4] на параллельно соединенные сопротивления $r(x)$. При этом

$$r(x)\,hj = k \qquad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{uHs}{c}\right) \tag{1.3}$$

Общее сопротивление определяется из уравнения

$$\frac{1}{R} = \int_0^l \frac{dx}{r(x)} \tag{1.4}$$

Путем соответствующего подбора величины внешнего сопротивления можно добиться определенной разности потенциалов на электродах. Поэтому систему уравнений движения можно решить для заданного значения k и по результатам решения из уравнений (1.2) и (1.3) определить величины I, j, r и R. Выразим плотность тока через k

$$j = \frac{\sigma(uHs - ck)}{cs} \tag{1.5}$$

Для определения зависимости внутренней энергии от температуры и давления при наличии диссоциации и ионизации необходимо знать состав смеси. Закон сохранения количества атомов и заряженных частиц при диссоциации и ионизации совместно с условиями равновесия химических реакций и процессов ионизации дает систему алгебраических уравнений [5]. Число уравнений в этой системе n равняется числу составляющих смесь продуктов. Из совместного решения такой системы уравнений и уравнения состояния смеси определяются число молей каждого вида продукта реакции в 1 *см*^{3} смеси β_i $(i = 1,\ldots, n)$ и газовая постоянная смеси R_1. Зная химический состав смеси и энергии диссоциации и ионизации продуктов, легко определить внутреннюю энергию смеси.

В уравнения (1.1) входит производная внутренней энергии, поэтому нужно найти выражение для этой производной. Если из системы n уравнений не удается получить явного выражения для всех β_i через T и P, можно выразить числа молей y продуктов через числа молей остальных $(n - y)$ продуктов. Тогда производную внутренней энергии можно записать в виде

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}(L + F) \tag{1.6}$$

Здесь L и F — функции $\beta_i\,(i = n - y + 1,\ n - y + 2,\ \ldots,\ n), T$ и P. Функция F определяет часть внутренней энергии единицы массы, обусловленную диссоциацией и ионизацией. Величины $\beta_i\,(i = n - y + 1,$ $n - y + 2,\ \ldots,\ n)$ будут функциями T и P, и их производные вычисляются по формуле

$$\frac{d\beta_i}{dx} = \frac{\partial\beta_i}{\partial P}\frac{dP}{dx} + \frac{\partial\beta_i}{\partial T}\frac{dT}{dx} \qquad (i = n - y + 1,\ n - y + 2,\ \ldots,\ n) \tag{1.7}$$

Подставляя эти выражения в (1.6), получим

$$\frac{dE}{dx} = f_1\frac{dP}{dx} + f_2\frac{dT}{dx} \tag{1.8}$$

Здесь f_1 и f_2 — функции β_i, $\partial\beta_i/\partial T$ $(i = n - y + 1,\ \ldots,\ n)$, T и P. Уравнение состояния смеси дает еще одну связь величин ρ, T и P

$$P = R_1\rho T \tag{1.9}$$

Проводимость изотропной плазмы в зависимости от степени ионизации определяется формулами Чепмена — Каулинга, Спицера или их комбинацией [6]. Все эти формулы представляют зависимость проводимости от температуры и давления

$$\sigma = \sigma(T,\ P) \tag{1.10}$$

Уравнения (1.1), (1.9), (1.10), закон сохранения количества атомов и заряженных частиц, условия равновесия химических реакций и процессов ионизации при заданной величине k полностью определяют движение плазмы.

§ 2. Приведение уравнений к виду, удобному для решения на машинах. Из уравнений (1.1), (1.5) и (1.9) находим

$$\frac{(\rho_0 u_0 A_0)^2}{A}\frac{d}{dx}\frac{R_1 T}{AP}+\frac{dP}{dx}+\left(\frac{A_0\rho_0 u_0 R_1 T H s}{AP}-ck\right)\frac{\sigma H}{c}=0$$

$$\frac{\rho_0 u_0 A_0}{A}\frac{dE}{dx}+P\rho_0 u_0 A_0\frac{d}{dx}\frac{R_1 T}{AP}+\frac{\rho_0 u_0 A_0 R_1 T}{A^2}\frac{dA}{dx}=\left(\frac{\rho_0 u_0 A_0 R_1 T H s}{AP}-ck\right)^2\frac{\sigma}{c^2 s^2} \qquad (2.1)$$

Подставляя в уравнения (2.1) выражения для σ, dE/dx, R_1 и решая относительно производных давления и температуры, приходим к системе уравнений

$$\frac{dP}{dx}=f(x,\ T,\ P,\ k),\qquad \frac{dT}{dx}=\varphi(x,\ T,\ P,\ k) \qquad (2.2)$$

Здесь k является параметром. Начальными условиями интегрирования этой системы служат P и T при $x=0$. Воспользуемся для вычисления приращений ΔP_s и ΔT_s при изменении x_s на Δx формулами Рунге — Кутта

$$\Delta P_s=\frac{1}{6}(z_1+2z_2+2z_3+z_4),\qquad \Delta T_s=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \qquad (2.3)$$

где

$$z_1=\Delta x f(x_s,\ T_s,\ P_s,\ k),\qquad z_2=\Delta x f\left(x_s+\frac{1}{2}\Delta x,\ T_s+\frac{1}{2}k_1,\ P_s+\frac{1}{2}z_1,\ k\right)$$

$$k_1=\Delta x\varphi(x_s,\ T_s,\ P_s,\ k),\qquad k_2=\Delta x\varphi\left(x_s+\frac{1}{2}\Delta x,\ T_s+\frac{1}{2}k_1,\ P_s+\frac{1}{2}z_1,\ k\right)$$

$$\begin{gathered}z_3=\Delta x f\left(x_s+\frac{1}{2}\Delta x,\ T_s+\frac{1}{2}k_2,\ P_s+\frac{1}{2}z_2,\ k\right)\\ z_4=\Delta x f(x_s+\Delta x,\ T_s+k_3,\ P_s+z_3,\ k)\\ k_3=\Delta x\varphi\left(x_s+\frac{1}{2}\Delta x,\ T_s+\frac{1}{2}k_2,\ P_s+\frac{1}{2}z_2,\ k\right)\\ k_4=\Delta x\varphi(x_s+\Delta x,\ T_s+k_3,\ P_s+z_3,\ k)\end{gathered} \qquad (2.4)$$

При этом возникает возможность пользования стандартными программами интегрирования системы дифференциальных уравнений. Значения P и T в точке $x_s+\Delta x$ определяются формулами

$$P_{s+1}=P_s+\Delta P_s,\qquad T_{s+1}=T_s+\Delta T_s \qquad (2.5)$$

По полученным значениям T_{s+1} и P_{s+1} определяются β_i, $\partial\beta_i/\partial P$, $\partial\beta_i/\partial T$, σ, R_1, j. Зная эти величины, можно вычислить правые части уравнений (2.2). По известным правым частям при помощи формул (2.3) и (2.4) вычисляются значения P и T в точке $x_{s+1}+\Delta x$ и т. д. Таким образом, при достаточно малом шаге интегрирования можно довольно точно определить изменение параметров плазмы по длине канала и силу тока I.

§ 3. Движение частично ионизованных паров цезия в канале постоянного сечения. Приведем пример решения уравнений одномерного движения плазмы, состоящей из нейтральных атомов Cs, ионов Cs^+ и электронов. В этом случае закон сохранения количества атомов и заряженных частиц и условие равновесия процесса ионизации выражаются формулой Саха для однократной ионизации ($T_{\max}=3000°$ K)

$$\frac{P}{9.81\cdot10^5}\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}=10^{-(5041v_i+6.491)T^{5/2}}\qquad\left(v_i=\frac{V_i}{T}\right) \qquad (3.1)$$

Здесь α — степень ионизации, V_i — потенциал однократной ионизации в электроновольтах.

Учитывая малость массы электронов по сравнению с массой ионов, уравнение состояния можно записать в виде

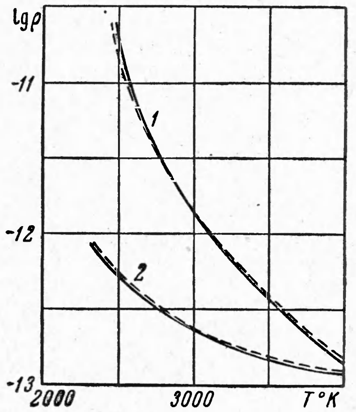
$$P = R\rho T\,(1 + \alpha) \tag{3.2}$$

где R — газовая постоянная для нейтральных паров цезия.

Внутреннюю энергию плазмы определим как сумму энергий хаотического движения атомов, ионов и электронов и энергии, затраченной на ионизацию

$$E = 1.5RT\,(1 + \alpha) + 1.6 \cdot 10^{-12} \frac{V_i W \alpha}{m} \tag{3.3}$$

Здесь W — число Авогадро и m — атомный вес.



Фиг. 1. Зависимость логарифма удельного сопротивления плазмы $\rho = \sigma^{-1}$ [*сек*] от температуры: кривые *1* — для давления $9.81 \cdot 10^5$ *дина / см*, *2* — для давления $9.81 \cdot 10^2$ *дина/см*^{2}; пунктирные линии определены по формуле (3.4), сплошные линии определены по усредненным значениям подвижности электронов

Учитывая изменение степени ионизации по длине канала, удельное сопротивление плазмы определим как сумму удельных сопротивлений электронноионного столкновения и столкновения электронов с нейтральными атомами [6]

$$\frac{1}{\sigma} = 1.88\,\frac{(m_e kT)^{1/2} Q_n}{\alpha e^2} + 1.69\,\frac{m_e^{1/2} e^2}{(kT)^{3/2}} \ln \frac{2}{2\sqrt{2}e^3} \left(\frac{k^3 T^3}{\pi n_e}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Здесь m_e — масса электрона, e — заряд электрона, k — постоянная Больцмана, n_e — число электронов в 1 *см*^{3} и Q_n — площадь поперечного сечения столкновения атомов с электронами. Умножая первый член на коэффициент, учитывающий изменение Q_n в зависимости от температуры и давления, можно получить достаточно точную формулу для вычисления σ. В диапазоне температур 2500 — 4000° K и давлений 0.001—10 *ат* таким чисто эмпирическим коэффициентом для паров цезия может служить выражение

$$\varphi = 3100^2 \left[T + \frac{2.943 \cdot 10^7}{P} \left(\frac{T}{3100} - 1\right)^2\right]^{-2}$$

На фиг. 1 показаны графики удельных сопротивлений, определенных по формуле (3.4) с учетом коэффициента φ и вычисленных по усредненным значениям подвижности электронов.

В этом случае система уравнений (2.2) имеет вид

$$\frac{dT}{dX} = l\,\frac{(\rho_0 u_0 L - 1)\,B + (\rho_0 u_0 M - PL)\,F}{(\rho_0 u_0)^2\,(DM + NL) - \rho_0 u_0 N - PD} \tag{3.5}$$

$$\frac{dP}{dX} = l\,\frac{\rho_0 u_0 DB - F\,(\rho_0 u_0 N + PD)}{(\rho_0 u_0)^2\,(DM + NL) - \rho_0 u_0 N - PD} \tag{3.6}$$

где

$$N = (1.5RT + \Phi)\,G + 1.5R\,(1 + \alpha), \qquad M = -(1.5RT + \Phi)\,\psi$$

$$D = \frac{\rho_0 u_0 R}{P}(1 + \alpha + TG), \qquad L = \frac{\rho_0 u_0 R}{P}\left(\frac{1 + \alpha}{P} + \psi\right)$$

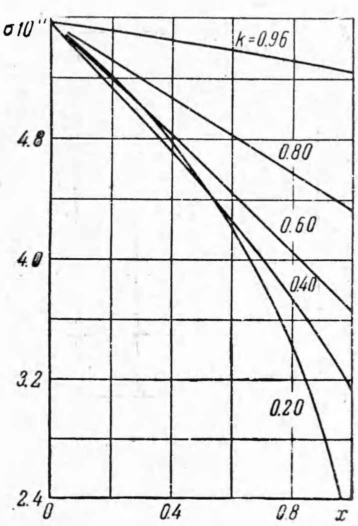
$$G = \frac{\rho_0 u_0 R}{P}\,\frac{2.5T + 11600 V_i}{T^2}, \qquad \psi = \frac{\alpha}{2\,(P + A)}, \qquad \Phi = \frac{9.64 \cdot 10^{11} V_i}{m}$$

$$B = \frac{j^2}{\sigma}, \qquad F = -\frac{jH}{c}, \qquad X = \frac{x}{e}$$

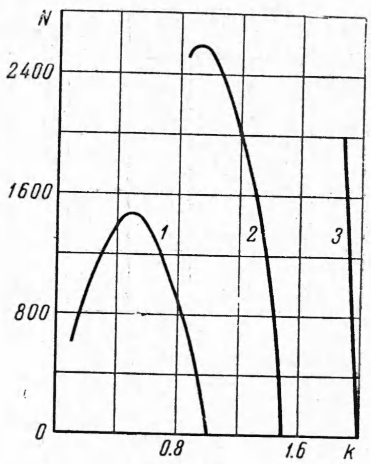
Решение уравнений (3.5) и (3.6) выполнялось на машине с шагом интегрирования $\Delta X = 0.002$ для начальных условий $P = 1.962 \cdot 10^6$ *дина / см*^{2} и $T = 3000°$ К при $X = 0$ и трех значений скорости входа плазмы в канал $2 \cdot 10^4$, $3 \cdot 10^4$ и $4 \cdot 10^4$ *см/сек*. Высота, ширина и длина канала принимались равными 100 *см*, а напряженность магнитного поля— 15000 *эрстед*.

§ 4. Обсуждение результатов решения. Обычно для упрощения уравнений электрическую проводимость плазмы предполагают постоянной. Такое предположение справедливо в том случае, если температура меняется незначительно и плазма представляет собой смесь газа с высоким потенциалом ионизации и очень незначительного количества газа с низким потенциалом ионизации. При этом концентрация газа с низким потенциалом ионизации должна быть настолько малой, чтобы можно было считать его атомы полностью ионизованными. В смеси, состоящей из 99.9% аргона и 0.1% калия, степень ионизации паров калия с температурой меняется следующим образом ($P = 9.81 \cdot 10^5$ *дина / см*^{2}):

$$T = 2000\,°\text{K}, \qquad \alpha = 8.3 \cdot 10^{-4}$$
$$T = 3000\,°\text{K}, \qquad \alpha = 8.77 \cdot 10^{-2}$$
$$T = 4000\,°\text{K}, \qquad \alpha = 0.641$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Изменение проводимости σ [*сек*$^{-1}$] по длине канала при различных разностях потенциалов на электродах k [$г^{1/2}$ $см^{1/2}$ $сек^{-1}$]

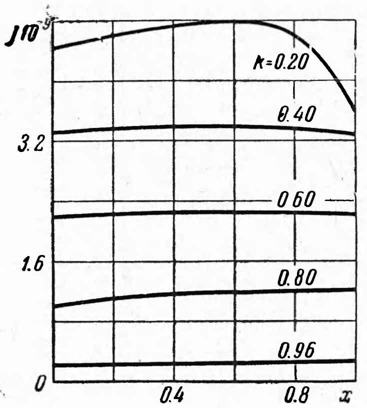
Фиг. 3. Зависимость генерируемой мощности N [*квт*] от разности потенциалов на электродах k [$г^{1/2}$ $см^{1/2}$ $сек^{-1}$] для скоростей входа плазмы в канал $2 \cdot 10^4$ *см / сек* (кривая *1*), $3 \cdot 10^4$ *см / сек* (кривая *2*) и $4 \cdot 10^4$ *см / сек* (кривая *3*)

Чтобы в таком диапазоне температур предположение о полной ионизации калия соблюдалось, его концентрация должна быть значительно меньше 0.1%. Но в этом случае и проводимость смеси будет очень низкой. Поэтому в практически важных случаях необходимо учитывать изменение α и σ. Фиг. 2 показывает, что при оптимальной величине разницы потенциалов на электродах ($k = 0.50$) σ по длине канала меняется значительно. Предположение постоянства σ, конечно, при принятых условиях не может дать точной картины течения.

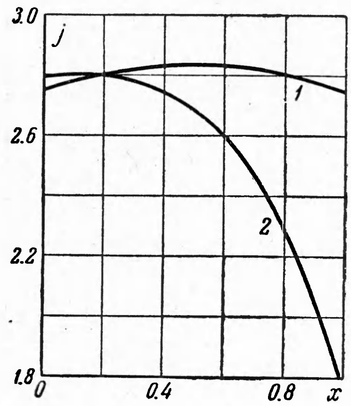
Для выбранных условий существует оптимальная величина разности потенциалов на электродах, при которой генерируется максимальная мощность. Так, например, в рассмотренном случае максимальные мощности (фиг. 3) извлекаются при $k = 0.50$ и $k = 0.97$.

Плотность тока и ее изменение по длине канала сильно зависят от разницы потенциалов между электродами (фиг. 4). При дозвуковом течении через магнитное поле газ совершает механическую работу против силы jH/c и к нему подводится тепло j^2/σ. В результате этого газ ускоряется. При постоянной электрической проводимости газа плотность тока и извлекаемая с единицы длины генератора мощность по длине канала возрастали бы монотонно. В работе [1] сделан такой вывод об увеличении извлекаемой с единицы длины генератора мощности по длине канала. Как показывают графики, при увеличении силы тока I температура и проводимость газа настолько изменяются, что даже, несмотря на повышение скорости на конце канала, плотность тока уменьшается. В результате этого извлекаемая с единицы длины генератора мощность N_x при оптимальном режиме имеет максимум не на конечном участке генератора, а где-то в средней части. Положение этого максимума зависит от начальных условий, в частности от u_0. При увеличении u_0 точка $N_{x\max}$ перемещается в сторону входной части канала.

На фиг. 5 показаны графики изменения плотности тока (N_x пропорциональна j) при оптимальном режиме для двух значений u_0.



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Изменение плотности тока j [$г^{1/2}\, см^{-1/2} сек^{-2}$] по длине канала при различных разностях потенциалов на электродах k [$г^{1/2}\, см^{1/2}\, сек^{-1}$]

Фиг. 5. Изменение плотности тока j [$г^{1/2} см^{-1/2}$ $сек^{-2}$] по длине канала на оптимальном режиме для скоростей входа плазмы в канал $2 \cdot 10^4$ *см / сек* (кривая *1*) и $3 \cdot 10^4$ *см / сек* (кривая *2*)

Для заданных начальных условий существует такая величина разности потенциалов между электродами k_*, при которой наступает кризис течения. Если $k < k_*$, реализация течения с заданными начальными условиями невозможна. Такое явление запирания канала связано с тем, что дозвуковое течение в канале постоянного сечения, совершая механическую работу и получая тепло, не может переходить в сверхзвуковое течение. Величина k_* определяется из условия

$$M_{X=1} = \left[\left(\gamma \frac{P}{\rho}\right)^{-1/2} u\right]_{X=1} = 1 \tag{4.1}$$

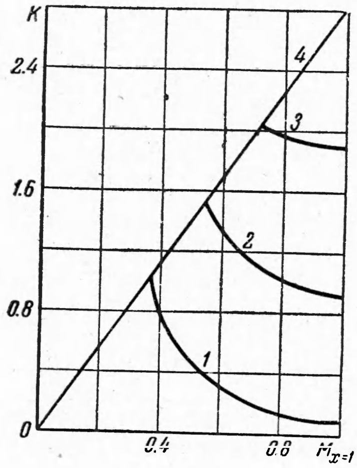
где γ — отношение удельных теплоемкостей газа.

На фиг. 6 приведены графики зависимости $k = k(M_{X=1})$ для значений начальных скоростей $2 \cdot 10^4$, $3 \cdot 10^4$ и $4 \cdot 10^4$ *см / сек*. Пересечение графиков с прямой $M_{X=1} = 1$ дает величину k_*. Величины k для данных размеров генератора и $T_{X=0}$ при дозвуковом течении находятся в области, ограниченной прямыми $M_{X=1}=1$, $k=0$

$$k = \frac{sH}{c}\sqrt{\gamma R(1+\alpha)T_{X=0}}M_{X=1}$$

Чем больше скорость у входа в канал, тем больше величина k_*, а при малых скоростях входа явление кризиса может и отсутствовать.

Как видно из фиг. 3, при $u_0 = 2\cdot 10^4$ и $3\cdot 10^4$ *см/сек* $k_* < k_0$, где k_0 — разность потенциалов между электродами на режиме генерации максимальной мощности, и можно осуществить оптимальный режим генерации, а при $u_0 = 4\cdot 10^4$ *см/сек* кризис течения наступает до достижения оптимального режима и вырабатываемая мощность меньше, чем в случае $u_0 = 3\cdot 10^4$ *см/сек*.



Фиг. 6. Зависимость разности потенциалов на электродах k [$г^{1/2}см^{1/2}сек^{-1}$] от числа M на конце канала для скоростей входа плазмы в канал $2\cdot 10^4$ *см/сек* (кривая *1*), $3\cdot 10^4$ *см/сек* (кривая *2*) и $4\cdot 10^4$ *см/сек* (кривая *3*). Прямая *4* определена уравнением

$$k = \frac{sH}{c}\sqrt{\gamma R(1+\alpha)T_{X=0}}\,M_{X=1}$$

Отсюда можно сделать вывод, что при скоростях входа, близких к скорости звука, канал генератора должен быть расширяющимся и такая конфигурация канала должна способствовать устранению кризиса течения.

Отметим, что в канале постоянного сечения значительная часть внутренней энергии расходуется на ускорение плазмы. В результате этого температура и проводимость по длине канала быстро уменьшаются. Поэтому канал постоянного сечения не является выгодной конфигурацией для магнитогидродинамического генератора.

В заключение приношу благодарность за ценные замечания и советы М. Ф. Жукову.

Поступила 25 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Голицын Г. С., Станюкович К. П. Некоторые вопросы магнитогазодинамики с учетом конечной проводимости. ЖЭТФ, 1957, т. XXXIII, вып. 6.
2. Чекмарев И. Б. Одномерное течение сжимаемого газа с конечной проводимостью при наличии поперечного магнитного поля. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
3. Лурье К. А. Решение уравнений одномерного движения сжимаемого газа конечной проводимости в поперечных электрическом и магнитном полях (стационарный случай). ЖТФ, 1961, т. XXXI, вып. 5.
4. Neuringer J. L. Optimum power generation from a moving plasma. Fluid Mechanics, 1960, vol. 7, p. 2.
5. Чинитц, Эйзен, Гросс. Аэродинамические и электрические свойства некоторых газовых смесей вплоть до чисел $M = 20$. Вопр. ракетной техн., М., ИИЛ, 1960, № 2.
6. A. Sherman. Calculation of Electrical Conductivity of Ionized Gases. ARS Journal, 1960, vol. 30, N 6.