УДК 517.948

О сведении обратной граничной задачи к последовательному решению двух некорректных задач

В.П. Танана[1,2]

[1]Южно-уральский государственный университет (НИУ), просп. Ленина, 76, Челябинск, 454080

[2]Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001

E-mail: tananavp@susu.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 2, Vol. 13, 2020.

Танана В.П. О сведении обратной граничной задачи к последовательному решению двух некорректных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2020.— Т. 23, № 2.— С. 219–232.

Статья посвящена решению обратной граничной задачи для уравнения теплопроводности и оценке погрешности приближенного решения. К решаемой задаче неприменимо преобразование Фурье по времени, которое позволяет получить оценку погрешности. Потому в уравнении теплопроводности использовано преобразование функции, которое позволило получить оценку.

DOI: 10.15372/SJNM20200208

Ключевые слова: *оценка погрешности, модуль непрерывности, преобразование Фурье, некорректная задача.*

Tanana V.P. On reducing the inverse boundary value problem to the synthesis of two ill-posed problems and their solution // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2020.— Vol. 23, № 2.— P. 219–232.

This paper concerns the solution of the inverse boundary value problem for the equation of thermal conductivity and the estimation of the approximate solution error. The Fourier transform with respect to time, which allows one to obtain an error estimate, is not applicable to the problem to be solved. Therefore, in the equation of thermal conductivity, the variable was replaced, which led to the synthesis of problems and allowed obtaining an estimate.

Keywords: *error estimation, modulus of continuity, Fourier transform, ill-posed problem.*

Введение

Обратные граничные задачи [1] играют важную роль при моделировании и эксплуатации теплонагруженных узлов технических конструкций. При этом необходима как можно более точная информация о температуре внутри такого узла. Трудность получения такой информации заключается в том, что прямое измерение температуры в узле невозможно по техническим причинам [1]. Для решения этой проблемы температуру измеряют внутри металлической стенки исследуемого объекта. После чего температуру внутри узла определяют как решение обратной граничной задачи. Очевидно, что для практического использования этого решения необходимо знать оценку его погрешности и по возможности более точную. Разработка оптимальных методов решения обратных граничных задач и получение оценок погрешности этих методов началась сравнительно недавно (см. [2–4]). При получении таких оценок важную роль сыграло преобразование Фурье по времени. Заметим, что эта область математической физики недостаточно исследована. Поэтому для обоснования применимости преобразования Фурье по t пришлось использовать достаточно сложный математический аппарат теории рядов и несобственных интегралов. В настоящей статье сделана попытка упростить эту задачу за счет преобразования исходного уравнения. Заметим, что такое преобразование значительно упростило вопрос с обоснованием преобразования Фурье.

В данной работе за счет сведения обратной граничной задачи к решению более простых задач получена оценка погрешности решения в тех случаях, когда без такого сведения преобразование Фурье по t невозможно.

1. Постановка прямой задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad 0 \le x < 1, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) = 0, \qquad t \ge 0, \tag{3}$$

$$u(1,t) = q(t), \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Предположим, что

$$q(t) \in C^2[0,\infty), \qquad q'(0) = q(0) = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать существование чисел r_1, r_2 и $r_3 > 0$ таких, что для любого $t \ge 0$

$$|q''(t)| \le r_1 + r_2 t^{r_3}. \tag{6}$$

Заметим, что числа r_1, r_2, $r_3 > 0$ нам не известны, а даны числа b, b_0, $b_1 > 0$ такие, что

$$\int_0^\infty |q(t)|^2 \sqrt{1+t^2}\, dt \le b^2 \quad \text{и для любого} \quad t \ge 0 \quad |q(t)| \le b_0, \quad |q'(t)| \le b_1. \tag{7}$$

Решая задачу (1)–(7) методом разделения переменных, получим

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x + q(t); \quad x \in [0,1], \quad t \ge 0, \tag{8}$$

где

$$C_n(t) = \frac{2e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 t}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \int_0^t q'(\tau) e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \tau}\, d\tau. \tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть для $q(t)$ выполняются условия* (5) *и* (6). *Тогда существует решение $u(x,t)$ задачи* (1)–(4) *такое, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению* (1) *на множестве $(0,1) \times (0,\infty)$, а также условиям* (2)–(4) *и*

$$u(x,t) \in C([0,1] \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}((0,1] \times (0,\infty)).$$

Доказательство. Из (7), (9) следует, что для любого $t \geq 0$

$$|C_n(t)| \leq \frac{2b_1}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}, \tag{10}$$

а из (8), (10), что для любых $x \in [0,1]$ и $t \geq 0$

$$|u(x,t)| \leq 2b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} + b_0.$$

Величину $2b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} + b_0$ обозначим через b_2.

Так как для любых n, $x \in [0,1]$ и $t \geq 0$

$$\left|C_n(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right| \leq \left|C_n(t)\right|,$$

то из (10) следует равномерная сходимость ряда (8) на полосе $[0,1]\times[0,\infty)$, а также, что

$$u(x,t) \in C([0,1]\times[0,\infty)). \tag{11}$$

Далее правую часть (9) проинтегрируем по частям. Тогда

$$C_n(t) = \frac{2}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\left[q'(t) - \int_0^t q_1''(\tau) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(t-\tau)} d\tau\right], \tag{12}$$

а из (6) следует, что для любых $t \geq 0$ и n

$$\left|\int_0^t q''(\tau) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2(t-\tau)} d\tau\right| \leq \frac{1}{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}[r_1 + r_2 t^{r_3}]. \tag{13}$$

Теперь продифференцируем функцию $C_n(t)\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ по x. После чего получим, что

$$\left[C_n(t)\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]'_x = -\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)C_n(t)\sin\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x. \tag{14}$$

Из (6), (12) и (14) будет следовать, что

$$\left|\left[C_n(t)\pi\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]'_x\right| \leq \frac{2|q'(t)|}{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{\pi^4\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}[r_1 + r_2 t^{r_3}]. \tag{15}$$

Из (15) следует, что функциональный ряд, составленный из функций, определенных формулой (14), сходится локально равномерно по t на множестве $[0,1]\times[0,\infty)$, а также, что для любых $x \in [0,1]$ и $t \geq 0$

$$u'_x(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n(t)\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]'_x \tag{16}$$

и

$$u'_x(x,t) \in C([0,1]\times[0,\infty)). \tag{17}$$

Из (13)–(16) следует, что для любых $x \in [0,1]$ и $t \geq 0$

$$|u'_x(x,t)| \leq 2b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + 2[r_1 + r_2 t^{r_3}] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^4\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}.$$

Теперь перейдем к исследованию функции $u''_{xx}(x,t)$:

$$\left[C_n(t)\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]''_{xx}$$
$$= -\frac{2q'(t)\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[\int_0^t q''(\tau)e^{-\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x. \quad (18)$$

Так как по признаку Дирихле для любого $\sigma \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ сходится равномерно на отрезке $[\sigma,1]$, то ряд $q'(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ сходится равномерно на множестве $[\sigma,1]\times[0,T]$, где $T>0$.

Следовательно,

$$\left[2q'(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\right]''_{xx} = -2q'(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

при $0<x<1$ и $t>0$, а также

$$\left[2q'(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\right]''_{xx} \in C((0,1]\times(0,\infty)). \quad (19)$$

Из (7), (19) следует, что для любого $\sigma \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ существует $r_4(\sigma)$ такое, что для любых значений $x\in[\sigma,1]$ и $t\ge 0$

$$\left[2q'(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}\right]''_{xx} \le 2b_1r_4(\sigma). \quad (20)$$

Теперь перейдем к оценке второго слагаемого, стоящего в правой части равенства (18),

$$\left|\frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[\int_0^t q''(\tau)e^{-\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|$$
$$\le \frac{2}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left|\int_0^t q''(\tau)e^{-\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right|, \quad (21)$$

а из (13) и (21) будет следовать, что

$$\left|\frac{2\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^t q''(\tau)e^{-\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right| \le \frac{2(r_1+r_2t^{r_3})}{\pi^3\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}. \quad (22)$$

Из (22), учитывая сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(r_1+r_2t^{r_3})}{n^3}$ $\forall\ t_0>0$, по признаку Вейерштрасса получим равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^t q''(\tau)e^{-\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(t-\tau)}d\tau$$

на множестве $[0,1]\times[0,t_0]$, а также, что

$$u''_{xx}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n(t) \cos \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]''_{xx}; \quad 0 < x \leq 1, \quad t > 0,$$

и, что

$$u''_{xx}(x,t) \in C((0,1] \times (0,\infty)). \tag{23}$$

Кроме того, из (20) и (22) будет следовать, что для любого $\sigma \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ существует число $r_5(\sigma)$ такое, что для любых значений $x \in [\sigma, 1]$ и $t > 0$

$$|u''_{xx}(x,t)| \leq r_5(\sigma)(r_1 + r_2 t^{r_3}).$$

Таким образом, из (11), (17) и (23) следует утверждение леммы. □

2. Постановка обратной задачи

Предположим, что в условии (4) функция $q(t)$, удовлетворяющая условиям (5)–(7), не известна, а вместо нее дана функция $f(t)$, определяемая формулой

$$u(x_0, t) = f(t); \quad x_0 \in (0,1), \quad t \geq 0. \tag{24}$$

Требуется, используя $f(t)$, определить функцию $q(t)$ такую, что при подстановке ее в условие (4) решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4) удовлетворяет условию (24).

Предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in C[0,\infty)$ существует решение $q_0(t)$ обратной задачи (1)–(3), (24), удовлетворяющее условиям (4), (5), но вместо функции $f_0(t)$ нам даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in C[0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\sup_{t \geq 0} |f_\delta(t) - f_0(t)| \leq \delta.$$

3. Сведение задачи (1)–(4) к задаче, для которой применимо преобразование Фурье

Сделаем преобразование

$$v(x,t) = e^{-at} u(x,t); \quad a > 0, \quad x \in [0,1], \quad t \geq 0.$$

Новая функция $v(x,t)$ будет удовлетворять следующей задаче:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - a v(x,t); \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{25}$$

$$v'_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{26}$$

$$v(1,t) = h(t), \quad t \geq 0, \tag{27}$$

$$v(x_0,t) = g(t), \quad t \geq 0, \tag{28}$$

где $h(t) = e^{-at} q(t)$, $g(t) = e^{-at} f(t)$, $t \geq 0$.

Понятие преобразования Фурье и его основные свойства заимствуем из книги [16, с. 397–416].

Пусть $\varphi(t) \in L_1(-\infty,\infty)$. Тогда преобразованием Фурье $F[\varphi(t)]$ от этой функции будет являться несобственный интеграл, зависящий от параметра:

$$\psi(\tau) = F[\varphi(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-it\tau} d\tau, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

$\psi(\tau) \in C_0(-\infty, \infty)$.

Таким образом, преобразование Фурье действует из пространства $L_1(-\infty, \infty)$ в $C_0(-\infty, \infty)$, при этом $\|F\| \le 1$, а $\|F^{-1}\| = \infty$. Эти свойства являются недостатком при использовании преобразования Фурье для решения некорректных задач. Для использования F рассмотрим расширение по непрерывности оператора F с пространства $L_1(-\infty, \infty)$ на $L_2(-\infty, \infty)$. Такой подход приведет нас к обобщению $\overline{F}[\varphi(t)]$ для $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty)$:

$$\overline{F}[\varphi(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \varphi(t) e^{-it\tau} d\tau,$$

где предел понимается в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$.

Если $\varphi(t) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$, то $\overline{F}[\varphi(t)] = F[\varphi(t)]$.

Оператор $\overline{F}$ изометрично отображает пространство $L_2(-\infty, \infty)$ на $L_2(-\infty, \infty)$.

Пусть $\varphi(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, а $\psi(\tau) = F[\varphi(t)]$, тогда обратное преобразование Фурье F^{-1} определяется формулой

$$\varphi(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \psi(\tau) e^{i\tau t} dt.$$

Сформулируем одно полезное свойство, приведенное в [16, с. 403].

Если $\varphi''(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, то $F[\varphi(t)] \in L_1(-\infty, \infty)$ и $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{it\tau} d\tau$.

Лемма 2. *Пусть $h(t)$ определена формулой* (27). *Тогда $h''(t) \in L_1(-\infty, \infty)$.*

Доказательство. Продолжим функцию $h(t)$ на отрицательную полуось, положив $h(t) = 0$ при $t < 0$.

Далее, продифференцировав дважды функцию $h(t)$ и используя (5), получим, что функция $h''(t)$ имеет не более одной точки разрыва первого рода, которая расположена в $t = 0$. Из (6) и (27) следует, что $h''(t) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Таким образом, для функции $h(t) = e^{-at} q(t)$, ввиду условия (5) и леммы 1:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\tau) e^{i\tau t} d\tau,$$

где $\widehat{h}(\tau) = F[h(t)]$.

Покажем, что $\widehat{v}(x, 0)$, вообще говоря, не равно нулю, т. е. для решения задачи (29)–(31) условие (2) не выполняется. Покажем этот факт для функции $\overline{h}(t)$:

$$\overline{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{при} \ \ t \ge 0, \\ 0 & \text{при} \ \ t < 0. \end{cases}$$

Так как

$$F[\overline{h}(t)] = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} \overline{h}(t) e^{-it\tau} dt, & \tau \ge 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} \overline{h}(t) e^{it|\tau|} dt, & \tau < 0, \end{cases}$$

то условие $h(t) > 0$ при $t > 0$ влечет $F[\overline{h}(t)] \ne 0$ при $\tau = 0$.

Условие (2) в постановке задачи не переходит при преобразовании Фурье, но позволяет преобразование Фурье $\overline{F}$ использовать не выходя из банаховых пространств.

Действительно, из условия (2) следует, что для любого $x \in [0,1]$ $v(x,t) \in C(-\infty,\infty)$, а $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} \in L_2(-\infty,\infty)$ и $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ сходится к $\dfrac{\partial v(x,t_0)}{\partial t}$ при $t \to t_0$ в метрике пространства $L_2[0,1]$.

Отсюда следует, что

$$\overline{F}\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right] = (a+i\tau)\widehat{v}(x,\tau)$$

и справедливость сведения задачи (25)–(27) к задаче (29)–(31):

$$(a+i\tau)\widehat{v}(x,\tau) = \widehat{v}\,''_{xx}(x,\tau); \quad x \in (0,1), \quad \tau \in (-\infty,\infty), \tag{29}$$

где $\widehat{v}(x,\tau) = F[v(x,t)]$,

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}(0,\tau) = 0, \qquad -\infty < \tau < \infty; \tag{30}$$

$$\widehat{v}(1,\tau) = \widehat{h}(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty. \tag{31}$$

Решая задачу (29)–(31), получим

$$\widehat{v}(x,\tau) = A(\tau)e^{\mu_0(\tau)x} + B(\tau)e^{-\mu_0(\tau)x}, \quad -\infty < \tau < \infty, \tag{32}$$

где

$$\mu_0(\tau) = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+\tau^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+\tau^2}-a}{2}}. \tag{33}$$

Из (30) следует, что

$$B(\tau) = A(\tau), \tag{34}$$

а из (31)–(34) следует, что

$$\widehat{v}(1,\tau) = 2A(\tau)\operatorname{ch}\mu_0(\tau) = \widehat{h}(\tau). \tag{35}$$

Таким образом, из (35) следует, что

$$A(\tau) = \frac{\widehat{h}(\tau)}{2\operatorname{ch}\mu_0(\tau)},$$

а из (28), (35) следует, что

$$\widehat{v}(x_0,\tau) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0}{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)}\widehat{h}(\tau) = \widehat{g}(\tau). \tag{36}$$

Из (36) следует, что обратная задача (1)–(5), (24) сводится к операторному уравнению

$$A\widehat{h}(\tau) = \frac{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0}{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)}\widehat{h}(\tau) = \widehat{g}(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty, \tag{37}$$

где $\widehat{h}(\tau)$ и $\widehat{g}(\tau) \in L_2(-\infty,\infty)$. Из вида оператора A в формуле (37) следует единственность решения этого уравнения.

Из (5), (7), (27) и (28) следует

$$\widehat{h}_0(\tau) \in \widehat{M}_{\frac{c_1}{\sqrt{2a}}}, \tag{38}$$

где

$$\widehat{M}_{\frac{c_1}{\sqrt{2a}}} = \left\{ \widehat{h}(\tau) : \widehat{h}(\tau) \in \widehat{H}(-\infty, \infty), \|\widehat{h}(\tau)\|_{\widehat{H}} \le \frac{c_1}{\sqrt{2a}} \right\}, \tag{39}$$

$$\widehat{H}(-\infty, \infty) = F[H_0^1[0, \infty)], \tag{40}$$

F — преобразование Фурье пространства $L_2(-\infty, \infty)$ на $L_2(-\infty, \infty)$, а $c_1 = \left[2\left(b_1^2 + a^2 b_0^2\right) + b_0^2\right]^{1/2}$.

Из (40) следует, что

$$\widehat{H}(-\infty, \infty) = \left\{ \widehat{h}(\tau) \,:\, \sqrt{1+\tau^2}\, \widehat{h}(\tau) \in L_2(-\infty, \infty) \right\},$$

а $\left\|\widehat{h}(\tau)\right\|_{\widehat{H}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\tau^2\right) \left|\widehat{h}(\tau)\right|^2 d\tau$.

Предположим, что функция $\widehat{g}_0(\tau)$ не известна, а вместо нее даны $\widehat{g}_\delta(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|\widehat{g}_\delta(\tau) - \widehat{g}_0(\tau)\| \le \frac{\delta}{\sqrt{2a}}. \tag{41}$$

Требуется, используя исходные данные задачи $(\widehat{g}_\delta(\tau), \delta)$, определить приближенное решение $\widehat{h}_\delta(\tau)$ уравнения (37) и оценить величину уклонения $\left\|\widehat{h}_\delta - \widehat{h}_0\right\|_{L_2(-\infty,\infty)}$.

Для решения задачи (37), (41) существует большое число методов [5–7]. В данной статье мы остановимся на методе невязки, предложенном в [8] и обоснованном в работах [9, 10].

4. Метод невязки

Метод невязки, следуя [8, 9], заключается в сведении задачи (37), (38), (41) к вариационной задаче на условный экстремум

$$\inf \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1+\tau^2) |\widehat{h}(\tau)|^2 d\tau : \widehat{h}(\tau) \in \widehat{H}, \|A\widehat{h}(\tau) - \widehat{g}_\delta(\tau)\|^2 \le \frac{\delta^2}{2a} \right\}. \tag{42}$$

Известно, что при условии $\|\widehat{g}_\delta\| > \dfrac{\delta}{\sqrt{2a}}$ задача (42) разрешима единственным образом, а ее решение можно найти методом множителей Лагранжа [9]. Следуя работам [11–13], для приближенного решения $\widehat{h}_\delta(\tau)$ получим оценку погрешности

$$\left\|\widehat{h}_\delta(\tau) - \widehat{h}_0(\tau)\right\| \le 2\widehat{\omega}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2a}}, \frac{c_1}{\sqrt{2a}} \right), \tag{43}$$

а из [14] и (43) получим, что

$$\left\|\widehat{h}_\delta(\tau) - \widehat{h}_0(\tau)\right\|_{L_2} \le \sqrt{\frac{2}{a}}\, \widehat{\omega}(\delta, c_1),$$

где

$$\widehat{\omega}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2a}}, \frac{c_1}{\sqrt{2a}} \right) = \sup \left\{ \left\|\widehat{h}(\tau)\right\| : \widehat{h}(\tau) \in \widehat{M}_{\frac{c_1}{\sqrt{2a}}}, \left\|A\widehat{h}(\tau)\right\| \le \frac{\delta}{\sqrt{2a}} \right\}.$$

5. Оценка модуля непрерывности $\widehat{\boldsymbol{\omega}}\left(\dfrac{\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{2a}}, \dfrac{\boldsymbol{c_1}}{\sqrt{2a}}\right)$

Лемма 3. *Пусть* $|\tau| \geq a + \frac{1}{x_0}\ln 2$, *а* $\mu_0(\tau)$ *определено формулой* (33). *Тогда справедливо соотношение*

$$\left|\frac{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0}{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)}\right| \geq \frac{1}{2}e^{(x_0-\sqrt{2}-1)\frac{|\tau|}{2}}.$$

Доказательство. Так как

$$\left|\frac{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0}{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)}\right| = \frac{|\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0|}{|\operatorname{ch}\mu_0(\tau)|}, \text{ а } \ |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y},$$

где $z = x + iy$, то

$$\left|\frac{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0}{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)}\right| = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}+a\right)x_0 + \cos^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}-a\right)x_0}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}+a\right) - \sin^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}-a\right)}}. \tag{44}$$

Из (37) и (44) следует, что

$$\left|\frac{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0}{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)}\right| \geq \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}+a\right)x_0}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}+a\right)}.$$

Заметим, что при $|\tau| \geq a$

$$\frac{1}{2}|\tau| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}+a\right) \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}|\tau|, \tag{45}$$

и из (45) следует, что при $|\tau| \geq \dfrac{1}{x_0}\ln 2 + a$

$$\operatorname{sh}\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}+a\right)x_0 \geq \frac{e^{\frac{1}{2}|\tau|x_0}}{2}, \tag{46}$$

$$\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+\tau^2}+a\right)x_0 \leq e^{\frac{\sqrt{2}+1}{2}|\tau|}. \tag{47}$$

Из (46), (47) следует, что

$$\left|\frac{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)x_0}{\operatorname{ch}\mu_0(\tau)}\right| \geq \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{2}-1)|\tau|}. \tag{48}$$

Тем самым лемма доказана. □

Следуя [14, лемма 2], для оценки модуля непрерывности $\widehat{\omega}(\delta, c_1)$ необходимо решить уравнение

$$2c_1\tau G(\gamma) = \delta, \tag{49}$$

где, ввиду (39) и (48), функцию $G(\tau)$ определим параметрически:

$$\overline{G}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},\quad |\gamma|=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(x_0-\sqrt{2}-1)|\tau|}. \tag{50}$$

Решение уравнения (49) обозначим через $\overline{\gamma}(\delta)$. Из (49) и (50) следует, что при $\delta<1$ существуют два решения уравнения (49): $\overline{\gamma}(\delta)$ и $-\overline{\gamma}(\delta)$.

Из (49) и (50) будет следовать, что

$$\widehat{\omega}(\delta,b_1)\le\frac{2}{\sqrt{2a}}c_1G\big[|\overline{\gamma}(\delta)|\big],$$

а

$$\big\|\widehat{h}_\delta(\tau)-\widehat{h}_0(\tau\big\|\le\frac{4c_1}{\sqrt{2a}}G\big[|\overline{\gamma}(\delta)|\big]. \tag{51}$$

Для упрощения оценки (51) наряду с уравнением (49) рассмотрим два уравнения:

$$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-x_0)|\gamma|}=\frac{2c_1}{\delta}\quad\text{и}\quad e^{(1+\sqrt{2}-x_0)|\gamma|}=\frac{2c_1}{\delta}. \tag{52}$$

Решение уравнений (52) обозначим через $\overline{\gamma}_1(\delta)$ и $\overline{\gamma}_2(\delta)$ соответственно. Тогда из (49) и (52) получим, что

$$|\overline{\gamma}_2(\delta)|\le|\overline{\gamma}(\delta)|\le|\overline{\gamma}_1(\delta)|, \tag{53}$$

где $|\overline{\gamma}_1(\delta)|=\frac{2}{1+\sqrt{2}-x_0}\ln\frac{4c_1}{\delta}$, а $|\overline{\gamma}_2(\delta)|=\frac{1}{1+\sqrt{2}-x_0}\ln\frac{4c_1}{\delta}$.

Из теоремы, доказанной в [14], следует, что

$$G(|\overline{\gamma}_2(\delta)|)\le G(|\overline{\gamma}(\delta)|)\le G(|\overline{\gamma}_1(\delta)|). \tag{54}$$

Таким образом, из (51), (53), (54) справедлива оценка

$$\big\|\widehat{h}_\delta(\tau)-\widehat{h}_0(\tau)\big\|\le\frac{4}{\sqrt{2a}}c_1G\big[|\overline{\gamma}_1(\delta)|\big],$$

или

$$\big\|\widehat{h}_\delta(\tau)-\widehat{h}_0(\tau)\big\|\le\frac{4}{\sqrt{2a}}c_1\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}-x_0}\right)^2\ln^2\frac{4c_1}{\delta}}}. \tag{55}$$

Применим к $\widehat{h}_\delta(\tau)$ преобразование

$$h_\delta(t)=\begin{cases}\mathrm{Re}[F^{-1}[\widehat{h}_\delta(\tau)]], & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \tag{56}$$

где F^{-1} — обратное преобразование Фурье.

Тогда из (55) и (56) будет следовать, что

$$\|h_\delta(t)-h_0(t)\|\le\frac{4c_1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}-x_0}\right)^2\ln^2\frac{4c_1}{\delta}}}. \tag{57}$$

6. Определение решения $q_\delta(t)$ обратной задачи (1)–(3), (24)

Для определения функции $q(t)$ рассмотрим вспомогательную задачу

$$R\,h(t) = e^{at}h(t) = q(t). \tag{58}$$

Известно, что при $h(t) = h_0(t)$ существует функция $q_0(t)$, удовлетворяющая задаче (58), а также условию (7). Предположим, что функция $h_0(t)$ не известна, а вместо нее даны функция $h_\delta(t)$, определяемая формулой (56), и уровень погрешности $\mu(\delta)$, определенный в (57):

$$\mu(\delta) = \frac{4c_1}{\sqrt{2a}}\left[1 + \left(1+\sqrt{2}-x_0\right)^{-2}\ln^2\left(\frac{4c_1}{\delta}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{59}$$

а также

$$\left\|\widehat{h}_\delta(\tau) - \widehat{h}_0(\tau)\right\| \le \mu(\delta). \tag{60}$$

Заметим, что задача (58)–(60), в отличии от задачи (37), (38), является задачей вычисления значений неограниченного оператора R.

Из условия (7) следует, что

$$\int_0^\infty |q_0(t)|^2\sqrt{1+t^2}\,dt \le b^2. \tag{61}$$

Для решения этой задачи используем метод проекционной регуляризации [15, с. 68–72]. В основе этого метода лежит регуляризующее семейство операторов $\{R_\alpha \ : \ \alpha \ge 0\}$

$$R_\alpha h_\delta(t) = q_\delta^\alpha(t) = \begin{cases} h_\delta(t)e^{at}, & 0 \le t \le \alpha, \\ 0, & t > \alpha. \end{cases}$$

Элемент $q_\delta^\alpha(t)$ назовем регуляризованным решением и перейдем к оценке

$$\|q_\delta^\alpha(t) - q_0(t)\| \le \|q_\delta^\alpha(t) - q_0^\alpha(t)\| + \|q_0^\alpha(t) - q_0(t)\|, \tag{62}$$

$$\|q_\delta^\alpha(t) - q_0(t)\| = \|R_\alpha h_\delta(t) - R_\alpha h_0(t)\| \le \|R_\alpha\|\mu(\delta). \tag{63}$$

Легко проверить, что $\|R_\alpha\| = e^{a\alpha}$.

Таким образом, из (63) следует, что

$$\|q_\delta^\alpha(t) - q_0^\alpha(t)\| \le \mu(\delta)e^{a\alpha}. \tag{64}$$

Аналогично из (61) следует, что

$$\|q_0^\alpha(t) - q_0(t)\|^2 \le b^2(1+\alpha^2)^{-1/2}.$$

Таким образом, из (62)–(64) следует, что

$$\|q_\delta^\alpha(t) - q_0(t)\|^2 \le b^2\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2} + \mu^2(\delta)e^{2a\alpha}. \tag{65}$$

Параметр регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ определим, используя схему М.М. Лаврентьева, изложенную в [6], т. е. $\overline{\alpha}$ определим из уравнения

$$b^2\left(1+\alpha^2\right)^{-1/2} = \mu^2(\delta)e^{2a\alpha}. \tag{66}$$

Из (66) следует, что

$$\left(1+\alpha^2\right)^{1/4}e^{a\alpha} = \frac{b}{\mu(\delta)}. \tag{67}$$

При $\dfrac{b}{\mu(\delta)} > 1$ существует единственное решение $\overline{\alpha}(\delta)$ уравнения (67).

Так как уравнение (67) не имеет решения в элементарных функциях, то мы аппроксимируем это уравнение. В результате получим

$$e^{a\alpha} = \frac{b}{\mu(\delta)}, \qquad e^{2a\alpha} = \frac{b}{\mu(\delta)}. \tag{68}$$

Решение уравнений (68) обозначим, соответственно, через $\alpha_1(\delta)$ и $\alpha_2(\delta)$.

Нетрудно проверить, что

$$\alpha_2(\delta) \le \overline{\alpha}(\delta) \le \alpha_1(\delta). \tag{69}$$

Из (65), (67) и (69) следует, что

$$\left\|q_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(t) - q_0(t)\right\| \le \frac{\sqrt{2}b}{\left(1+(2a)^{-2}\ln^2\dfrac{b}{\mu(\delta)}\right)^{1/4}}, \tag{70}$$

где $\mu(\delta)$ определена формулой (59).

Из (57) следует, что функция, стоящая справа в соотношении (70), стремится к $d_1 > 0$ при $a \to \infty$ и к $d_2 > 0$ при $a \to 0$. Так как для любого $a > 0$

$$\frac{\sqrt{2}b}{\left(1+(2a)^{-2}\ln^2\dfrac{b}{\mu(\delta)}\right)^{1/4}} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

то при достаточно малых значениях $\delta > 0$ существует $a(\delta)$ такое, что

$$\frac{\sqrt{2}b}{\left(1+(2a(\delta))^{-2}\ln^2\dfrac{b}{\mu(\delta)}\right)^{1/4}} = \min_{a>0}\frac{\sqrt{2}b}{\left(1+(2a)^{-2}\ln^2\dfrac{b}{\mu(\delta)}\right)^{1/4}}.$$

Заключение

В данной работе путем замены искомой функции обратная граничная задача теплопроводности была сведена к системе двух некорректных задач. Первая из них — обратная граничная задача, для которой применимо преобразование Фурье по t, и потому получена оценка погрешности. Вторая задача является задачей вычисления значений неограниченного оператора и ее решение приводит к решению первоначальной задачи, для которого также получена оценка погрешности.

Литература

1. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
2. **Танана В.П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. матем. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 117–132.
3. **Танана В.П.** Об оценке погрешности метода решений одной обратной задачи для параболического уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 4. — С. 451–465. Перевод: Tanana V.P. An order-optimal method for solving an inverse problem for a parabolic equation // Num. Anal. Appl. — 2010 — Vol. 3, № 4. — P. 367–380.
4. **Танана В.П., Сидикова А.И.** О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 1–15.
5. **Тихонов А.Н.** О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1. — С. 9–52.
6. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
7. **Иванов В.К.** О некорректно поставленных задачах // Мат. сборник. — 1963. — Т. 61, № 2. — С. 211–213.
8. **Phillips D.L.** A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // J. Assoc. Comput. Mach. — 1962. — Vol. 9, iss. 1. — P. 84–97.
9. **Иванов В.К.** О приближенном решении операторных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1089–1094.
10. **Морозов В.А.** О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 1. — С. 170–175. Перевод: Morozov V.A. Regularization of incorrectly posed problems and the choice of regularization parameter // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1966. — Vol. 6, № 1. — P. 242–251.
11. **Иванов В.К., Королюк Т.И.** Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 1. — С. 30–41. Перевод: Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1969. — Vol. 9, № 1. — P. 35–49.
12. **Танана В.П.** Об оптимальности методов решения нелинейных неустойчивых задач // ДАН СССР. — 1975. — Т. 220, № 5. — С. 1035–1037.
13. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. Перевод: Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. — Netherlands: VSP, 2002.
14. **Tanana V.P., Rudakova T.N.** The optimum of the M.M. Lavrent'ev method // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 18. — C. 935–944.
15. **Tanana V.P., Sidikova A.I.** Optimal Methods for Ill-Posed Problems with Applications to Heat Conduction. — De Gruyter, 2018.
16. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 18 июня 2018 г.
После исправления 21 марта 2019 г.
Принята к печати 19 декабря 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V.** Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1988.
2. **Tanana V.P.** Ob optimal'nosti po poryadku metoda proektsionnoi regulyarizatsii pri reshenii obratnykh zadach // Sib. zhurn. industr. matem. — 2004. — T. 7, № 2. — S. 117–132.
3. **Tanana V.P.** Ob otsenke pogreshnosti metoda reshenii odnoi obratnoi zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2010. — T. 13, № 4. — S. 451–465. Perevod: Tanana V.P. An order-optimal method for solving an inverse problem for a parabolic equation // Num. Anal. Appl. — 2010 — Vol. 3, № 4. — P. 367–380.
4. **Tanana V.P., Sidikova A.I.** O garantirovannoi otsenke tochnosti priblizhennogo resheniya odnoi obratnoi zadachi teplovoi diagnostiki // Tr. IMM UrO RAN. — 2010. — T. 16, № 2. — S. 1–15.
5. **Tikhonov A.N.** O regulyarizatsii nekorrektno postavlennykh zadach // DAN SSSR. — 1963. — T. 153, № 1. — S. 9–52.
6. **Lavrent'ev M.M.** O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki. — Novosibirsk: SO AN SSSR, 1962.
7. **Ivanov V.K.** O nekorrektno postavlennykh zadachakh // Mat. sbornik. — 1963. — T. 61, № 2. — S. 211–213.
8. **Phillips D.L.** A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // J. Assoc. Comput. Mach. — 1962. — Vol. 9, iss. 1. — P. 84–97.
9. **Ivanov V.K.** O priblizhennom reshenii operatornykh uravnenii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1966. — T. 6, № 6. — S. 1089–1094.
10. **Morozov V.A.** O regulyarizatsii nekorrektno postavlennykh zadach i vybore parametra regulyarizatsii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1966. — T. 6, № 1. — S. 170–175. Perevod: Morozov V.A. Regularization of incorrectly posed problems and the choice of regularization parameter // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1966. — Vol. 6, № 1. — P. 242–251.
11. **Ivanov V.K., Korolyuk T.I.** Ob otsenke pogreshnosti pri reshenii lineinykh nekorrektno postavlennykh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1969. — T. 9, № 1. — S. 30–41. Perevod: Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1969. — Vol. 9, № 1. — P. 35–49.
12. **Tanana V.P.** Ob optimal'nosti metodov resheniya nelineinykh neustoichivykh zadach // DAN SSSR. — 1975. — T. 220, № 5. — S. 1035–1037.
13. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978. Perevod: Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. — Netherlands: VSP, 2002.
14. **Tanana V.P., Rudakova T.N.** The optimum of the M.M. Lavrent'ev method // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 18. — C. 935–944.
15. **Tanana V.P., Sidikova A.I.** Optimal Methods for Ill-Posed Problems with Applications to Heat Conduction. — De Gruyter, 2018.
16. **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.** Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. — M.: Nauka, 1989.