

Изменение напряжения ΔU на конденсаторе измерялось высокоомным истоковым повторителем и подавалось на вход *II* осциллографа ОК-33. Оно связано со смещением обкладки конденсатора x соотношением

$$\Delta U = U_0 x / [h_0 + C(h_0 - x)],$$

где U_0 — начальное напряжение на конденсаторе; h_0 — начальное расстояние между обкладками; C — отношение входной емкости повторителя и соединительного кабеля к емкости конденсатора. Осциллограмма приведена на фиг. 2 (луч *II*). В начальный момент скорость свободной поверхности равна 32 м/с (скорость поршня в момент удара составляла 43 м/с). Отличие в скоростях свободной поверхности и поршня в момент удара может объясняться, в частности, ослаблением импульса нагрузки при распространении по каналу с водой вследствие потерь на деформацию стенок. В дальнейшем скорость поверхности несколько уменьшается, но через 25 мкс резко увеличивается, достигая 30 м/с. Такой ход зависимости объясняется, по-видимому, интенсивным ростом пузырьков. Возникающая при этом область кавитации будет оказывать влияние на «хвост» волны нагрузки, идущей к свободной поверхности.

Таким образом, комбинация различных методов исследования — оптического, рентгеновского, измерения давления и движения свободной поверхности — позволяет проследить динамику внутренней и внешней структуры жидкости в волнах разгрузки, оценить долю парогазовой фракции и размеры области разрушения в объеме образца.

Авторы благодарят Е. И. Биченкова и Р. Л. Рабиновича за существенный вклад в разработку аппаратуры, использованной для создания рентгеновского стенда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кедринский В. К. Поверхностные эффекты при подводном взрыве (обзор). — ПМТФ, 1978, № 4.
2. Воловец Л. Д., Златин Н. А., Пугачев Г. С. О механизме разрушения твердых тел при временах жизни микросекундного диапазона. — Письма в ЖТФ, 1978, т. 4, вып. 18.
3. Воловец Л. Д., Златин Н. А., Пугачев Г. С. Возникновение и развитие субмикротрещин в полиметилметакрилате при динамическом растяжении (отколе). — Письма в ЖТФ, 1978, т. 4, вып. 18.
4. Воронникова М. И., Кедринский В. К., Солоухин Р. И. Ударная трубка для исследования одномерных волн в жидкости. — ФГВ, 1965, № 1.
5. Загорельский В. И., Столович Н. Н., Фомин Н. А. Импульсный пьезоэлектрический датчик с согласующим усилителем для измерения быстроменяющихся давлений. — ИФЖ, 1982, т. 42, № 2.

Поступила 30/IX 1983 г.

УДК 532.529 : 534.2.532

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПАРОВИДКОСТНЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ

И. К. Вахитова, В. Ш. Шагапов
(Уфа)

Рассмотрена задача о распространении малых синусоидальных волн в жидкости, содержащей паровые пузырьки. Из анализа дисперсионного соотношения указана область значений параметров двухфазной среды, а также частоты возмущений, при которых скорость распространения возмущений описывается формулой Ландау [1]. В работе показано, что равновесное состояние двухфазной пузырьковой паровидкостной среды будет устойчивым только при определенном условии, налагаемом на объемное содержание и размеры пузырьков.

Проанализировано влияние теплообмена между фазами, поверхностного натяжения, объемного содержания и размера пузырьков и частоты возмущений на скорость распространения и коэффициент затухания. Полученные в работе асимптотические формулы позволяют оценить скорость и затухание на основании простых аналитических выражений.

Для неустойчивых смесей на основе проведенных численных расчетов и полученных аналитических формул исследовано влияние различных параметров пузырьковой парожидкостной среды на коэффициент, определяющий интенсивность роста амплитуды возмущений.

Отметим также, что одной из целей данной работы является уточнение результатов [2], где учет теплообмена произведен с помощью эффективных коэффициентов Нуссельта.

Задача о распространении возмущений в парожидкостной пузырьковой среде без учета капиллярных явлений рассмотрена в [3, 4]. Результаты последней работы и данной, касающиеся распространения малых возмущений, совпадают в области их общих границ применимости.

1. Основные уравнения. Пусть имеется смесь жидкости со сферическими паровыми пузырьками. Для учета межфазного теплообмена будем использовать уравнение теплопроводности, записанное в рамках сферической симметрии внутри и около пузырьков, а также систему граничных условий для этого уравнения с учетом фазовых переходов. Поэтому наряду с обычными макроскопическими параметрами, вводимыми в механике многофазных сред [5], введем микропараметры, характеризующие распределение плотности и температуры внутри и около пузырьков.

Система макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков и импульса всей смеси для плоского односкоростного одномерного движения в линейном приближении имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \rho_{i0} \frac{\partial v}{\partial x} = -I, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial v}{\partial x} = I, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

$$\left(I = 4\pi a_0^2 n_0 j, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n \right).$$

Индекс $i = 1, 2$ относится соответственно к параметрам жидкости и пара; $\rho_i, \rho_i^0, v, p, n$ и a — соответственно возмущения средней по смеси и средней по фазе плотности, скорости, давления, числа пузырьков в единице объема смеси и радиуса пузырьков; I и j — интенсивности массообмена между фазами, отнесенные к единице объема смеси и к единице площади поверхности раздела фаз. Параметры, соответствующие невозмущенному состоянию, снабжены дополнительно индексом 0 внизу.

Запишем уравнения для распределения температур внутри и около пузырьков, расположенных в макрочастице с координатой x :

$$(1.2) \quad \rho_{10} c_1 \frac{\partial T_1'}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r^2 \frac{\partial T_1'}{\partial r} \right) \quad (r > a_0),$$

$$\rho_{20} c_{2p} \frac{\partial T_2'}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2'}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (r < a_0),$$

где r — микрокоордината, в качестве которой берется расстояние от центра пузырька; T_i' и λ_i — температуры и коэффициенты теплопроводности фаз; c_1, c_{2p} и c_{2v} — соответственно удельные теплоемкости жидкости и пара при постоянном давлении и объеме. Здесь и в дальнейшем штрихами наверху обозначены микропараметры. Отметим, что уравнение теплопроводности записано без учета сжимаемости жидкости.

Уравнения состояния фаз примем в виде

$$(1.3) \quad p_1 = p_{10} + d_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{10}^0), \quad p_2 = \rho_2^0 B T_2',$$

где d_1 — скорость звука в жидкости (уравнение состояния жидкости записано в акустическом приближении); B — газовая постоянная.

Уравнение пульсационного движения без учета стесненности пузырьков имеет вид

$$(1.4) \quad a \frac{\partial w_{1a}}{\partial t} + 4\nu_1 w_{1a}/a_0 = \left(p_2 - p_1 + \frac{2\sigma}{a_0} \frac{a}{a_0} \right) / \rho_{10}^0,$$

где w_{1a} — скорости пульсационного движения фаз на поверхности их раздела; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ν_1 — кинематическая вязкость жидкости.

На поверхности раздела фаз зададим следующие граничные условия:

$$(1.5) \quad T'_1 = T'_2 = T_a = T_s(p_2), \quad \lambda_1 \frac{\partial T'_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T'_2}{\partial r} = jl,$$

$$\rho_{20}^0 \left(\frac{\partial a}{\partial t} - w_{2a} \right) = \rho_{10}^0 \left(\frac{\partial a}{\partial t} - w_{1a} \right) = j \quad (r = a_0),$$

где l — удельная теплота парообразования; $T_s(p_2)$ — температура насыщения при давлении p_2 .

Кроме того,

$$(1.6) \quad \partial T'_2 / \partial r = 0 \quad (r = 0).$$

Для замыкания системы граничных условий для уравнения теплопроводности необходимо задать еще одно условие для T'_1 . В тех случаях, когда температурные перепады в жидкости вблизи межфазной границы реализуются на расстояниях, значительно меньших, чем среднее расстояние между пузырьками, можно положить

$$T'_1 = T_0 \quad (r = \infty).$$

Это условие означает, что жидкость вдали от пузырьков принимается за термостат (условие изотермичности вдали от пузырьков).

Рассмотрим случай, когда длины температурных волн, инициируемых радиальными движениями пузырьков, могут быть сравнимы со средними расстояниями между пузырьками. Положим, что нет перетока тепла между массами жидкости, приходящимися на соседние включения (т. е. все пузырьки для фиксированной макрочастицы равноправны). Это условие в рамках сферической симметрии можно записать как

$$(1.7) \quad \partial T'_1 / \partial r = 0 \quad (r = a_*).$$

За a_* принимается радиус сферической ячейки [5], оцениваемый по формуле

$$(1.8) \quad a_* = a_0 / \alpha_{20}^{1/3}.$$

Согласно принятому выше граничному условию, полагается, что масса жидкости, приходящаяся на один пузырек, располагается в сфере радиуса a_* и на этой сфере поток тепла равен нулю (условие адиабатичности ячейки).

Для значений параметров на поверхности раздела фаз запишем уравнение Клапейрона — Клаузиуса

$$(1.9) \quad \frac{dp_a}{dT_a} = \frac{l}{T_a (1/\rho_{2a}^0 - 1/\rho_{1a}^0)} \quad (p_a = p_2).$$

При решении задачи удобно пользоваться соотношением для p_2 , получаемым из уравнения теплопроводности при допущении гомобаричности [5]:

$$(1.10) \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = - \frac{3\gamma}{a_0} \left[p_{20} w_{2a} - (1 - 1/\gamma) \lambda_2 \left(\frac{\partial T'_2}{\partial r} \right)_a \right] \quad (\gamma = c_{2p}/c_{2v}).$$

2. Решение задачи. На основе приведенной системы (1.1)–(1.10) рассмотрим задачу о распространении малых возмущений. Решение ищем в виде затухающей бегущей волны:

$$(2.1) \quad p, v, w, a, n \sim \exp [i(Kx - \omega t)], \quad T' = T^A(r) \exp [i(Kx - \omega t)],$$

$$K = k + i\delta, \quad d_p = \omega/k,$$

K — волновой вектор (комплексное число, δ и d_p — соответственно коэффициент затухания и фазовая скорость волны, определяемые мнимой и действительной частями волнового вектора).

Из условия существования решения такого вида получим дисперсионное уравнение

$$(2.2) \quad \frac{K^2}{\omega^2} = \rho_0 (\alpha_{10}/\rho_{10}^0 d_1^2 + 3\alpha_{20}/\psi), \quad \psi = 3/\Pi - \rho_{10}^0 \omega^2 a_0^2 - 4i\rho_{10}^0 v_1 \omega - 2\sigma/a_0,$$

$$\Pi = \frac{1 + i\kappa_2 [\Pi_2 Q (1 - \chi (1 - s)) + \eta (1 - s) (1 + \Pi_1 Y)]/\omega a_0^2}{\gamma p_{20} + i\kappa_2 s (2\sigma/3a_0) [\Pi_2 Q \chi - \eta (1 + \Pi_1 Y)]/\omega a_0^2},$$

$$\chi = c_{2p} T_0/l, \quad Y = (-i\omega a_0^2/\kappa_1)^{1/2}, \quad Z = (-i\omega a_0^2/\kappa_2)^{1/2},$$

$$\Pi_1 = \frac{AY \operatorname{th} [Y(A-1)] - 1}{AY - \operatorname{th} [Y(A-1)]}, \quad \Pi_2 = Z \operatorname{cth} Z - 1, \quad \kappa_1 = \lambda_1/\rho_{10}^0 c_1,$$

$$\kappa_2 = \lambda_2/c_{2p}\rho_{20}^0, \quad A = 1/\alpha_{20}^{1/3}, \quad p_{20} = p_{10} + 2\sigma/a_0,$$

$$s = \rho_{20}^0/\rho_{10}^0, \quad T_0 = T_s(p_{20}), \quad Q = 3(1 - \chi)(\gamma - 1), \quad \eta = 3(\gamma - 1)\chi^2 \lambda_1/\lambda_2.$$

При этом для распределения температур, давления в пузырьках, радиуса пузырьков и скорости имеют место соотношения

$$\frac{T_1^A}{T_0} = \chi(1 - 1/\gamma) \frac{[(AY + 1)e^{Y(R-A)} + (AY - 1)e^{-Y(R-A)}] p_2}{R [(AY + 1)e^{Y(1-A)} + (AY - 1)e^{-Y(1-A)}] p_{20}},$$

$$R = r/a_0 \quad (1 < R < A),$$

$$\frac{T_2^A}{T_0} = (1 - 1/\gamma) \left[\frac{(\chi - 1) \operatorname{sh}(ZR)}{R \operatorname{sh}(Z)} + 1 \right] \frac{p_2}{p_{20}} \quad (R < 1),$$

$$\frac{p_2}{p_{2c}} = - \{ 3\gamma/[1 + i\kappa_2 (\Pi_2 Q (1 - \chi) + \eta (1 + \Pi_1 Y))/\omega a_0^2] \} \frac{a}{a_0},$$

$$\frac{a}{a_0} = - \frac{r_1}{v_1}, \quad \psi_1 = \psi \left\{ 1 + s \frac{i\kappa_2 [Q\Pi_2 \chi - \eta (1 + \Pi_1 Y)]/\omega a_0^2}{1 + i\kappa_2 [\Pi_2 Q (1 - \chi) + \eta (1 + \Pi_1 Y)]/\omega a_0^2} \right\}, \quad v = \frac{K}{\omega} \frac{p_1}{\rho_0}.$$

На основании (2.2) предельным переходом при $\omega \rightarrow 0$ для равновесной скорости звука получаем выражение

$$d_e = [1/d_1^2 + 1/d_L^2 (1 - \alpha_{10} D/\alpha_{20} a_0)]^{-1/2} / \alpha_{10},$$

$$d_L^2 = \frac{\gamma p_{20}}{\rho_{10}^0} \left[1 + \frac{2\sigma}{3a_0 p_{20}} s (1 - 1/\gamma) \left(\chi(1 - \chi) - \frac{\rho_{10}^0 c_1}{\rho_{20}^0 c_{2p}} \chi^2 \right) \right] \left\{ \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} + (\gamma - 1) \times \right.$$

$$\left. \times \left[(1 - \chi)(1 - \chi(1 - s)) + \frac{\rho_{10}^0 c_1}{\rho_{20}^0 c_{2p}} \chi^2 (1 - s) \right] \right\}^{-1}, \quad D = 2\sigma/3\rho_{10}^0 d_L^2,$$

справедливое, если параметры среды удовлетворяют соотношению

$$(2.3) \quad 1/d_1^2 + 1/d_L^2 (1 - \alpha_{10} D/\alpha_{20} a_0) \geq 0.$$

В том случае, когда соотношение (2.3) не выполняется, $d_e = \infty$. Поскольку обычно

$$\chi \sim 1, \quad \frac{\rho_{10}^0 c_1}{\rho_{20}^0 c_{2p}} \gg \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}},$$

то выражение для d_L и D можно упростить:

$$(2.4) \quad d_L^2 = \frac{p_{20}}{(1 - 1/\gamma)\rho_{10}^0} \frac{\rho_{20}^0 c_{2p}}{\rho_{10}^0 c_1} \left(\frac{l}{c_{2p} T_0} \right)^2, \quad D = \frac{2}{3} \Sigma \beta, \quad \Sigma = \frac{\sigma}{\gamma p_{20}},$$

$$\beta = 3(\gamma - 1) \frac{\rho_{10}^0 c_1}{\rho_{20}^0 c_{2p}} \chi^2.$$

Если положить $p_{20} \approx p_{10}$, то выражение для d_L совпадает с известной формулой, полученной Ландау [1] для скорости звука в парожидкостной среде при малых массовых паросодержаниях. Таким образом,

равновесная скорость звука в жидкости с паровыми пузырьками описывается формулой Ландау только тогда, когда можно пренебречь поверхностным натяжением и сжимаемостью жидкости.

Значение скорости, оцениваемое по формуле (2.4), мало, если состояние парожидкостной среды не близко к критическому. Для пароводяной смеси, например, при $p_{20} = 10^5$ Па имеем $d_L = 1,1$ м/с ($D = 0,35 \cdot 10^{-4}$ м). Поэтому в выражении для равновесной скорости сжимаемостью жидкости можно пренебречь и для достаточно широкого диапазона значений параметров двухфазной среды положить

$$d_e = \frac{d_L}{\alpha_{10}} (1 - \alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0)^{1/2} \quad (\alpha_{20} a_0 / \alpha_{10} \geq D), \quad d_e = \infty \quad (\alpha_{20} a_0 / \alpha_{10} < D).$$

При отмеченных выше значениях d_L и D для $\alpha_{20} \leq 10^{-2}$ (что характерно для пузырьковых сред) и $a_0 \leq 10^{-3}$ м равновесная скорость бесконечна.

3. Анализ дисперсионного соотношения. На основании дисперсионного выражения (2.2) можно провести анализ устойчивости равновесного состояния среды по отношению к малым синусоидальным возмущениям. При этом соотношение (2.2) надо рассматривать как уравнение относительно ω при действительных K . Используя принцип аргумента аналогично тому, как это сделано в [6], можно показать, что это уравнение для ω имеет мнимый корень $\omega = \omega' i$ ($\omega' > 0$), если

$$(3.1) \quad \alpha_{20} a_0 / \alpha_{10} < D.$$

Поскольку при получении (3.1) решение ищется в виде (2.1), то наличие такого корня с положительной мнимой частью означает, что амплитуды возмущений с течением времени неограниченно возрастают. Поэтому равновесное двухфазное состояние при условии (3.1) неустойчиво.

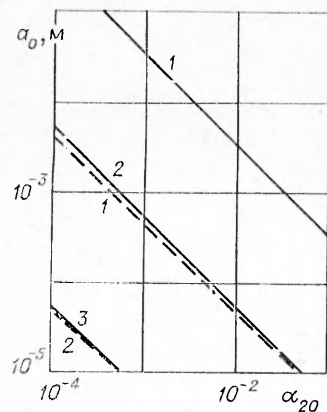
Ниже будут приведены результаты численного расчета, а также аналитические выражения для зависимости ω' , характеризующего рост во времени амплитуды наложенных возмущений ($t' = 1/\omega'$ — время, за которое амплитуда возрастает в e раз), от волнового числа K и от параметров среды.

Таким образом, для существования конечной равновесной скорости, а также для устойчивости равновесного состояния пузырьковой парожидкостной среды необходимо, чтобы значения объемного содержания и радиуса пузырьков удовлетворяли неравенству $\alpha_{20} a_0 / \alpha_{10} \geq D$.

Параметр D , вообще говоря, зависит от радиуса пузырьков, так как $T_0 = T_s(p_{20})$, $p_{20} = p_{10} + 2\sigma/a_0$. Однако изменение температуры при изменении радиуса от 10^{-3} до 10^{-6} м для большинства веществ составляет несколько градусов. Поэтому можно считать, что D зависит только от давления p_{10} . На фиг. 1 области, лежащие выше представленных линий, соответствуют значениям $p_{10} = 10^5, 10^6$ и 10^7 Па для пароводяной смеси (сплошные линии) и для парожидкостной пузырьковой смеси в азоте (штриховые линии). Как видно, при одинаковых давлениях p_{10} область значений параметров α_{20}, a_0 , при которых существует конечная равновесная скорость звука (и двухфазное состояние устойчивое), для азота значительно шире, чем для воды.

Для того чтобы равновесная скорость описывалась формулой Ландау, необходимо выполнение условия $\alpha_{20} a_0 / \alpha_{10} \gg D$, т. е. значения параметров α_{20} и a_0 должны лежать достаточно глубоко в области устойчивости. Этого можно добиться переходом к более высоким давлениям, а также выбором достаточно больших значений α_{20} и a_0 .

Отметим, что если адиабатичность ячейки заменить условием изотермичности и учиты-



Ф и г. 1

вать капиллярные эффекты, то равновесная скорость равна бесконечности, и поэтому по такой схеме парожидкостная пузырьковая смесь всегда является неустойчивой.

Приведем оценку для частот, при которых будут реализовываться значения скоростей, близкие к равновесной. Анализ дисперсионного соотношения (2.2) показывает, что для этого необходимо выполнение условий (3.2)

$$|Z| \ll 1, \quad |Y|(A - 1) \ll 1.$$

Для большинства сред второе условие является более сильным, и оно означает, что длины температурных волн, инициируемых радиальными движениями пузырьков, сравнимы с расстояниями между пузырьками. Из (3.2) имеем

$$(3.3) \quad \omega^{1/2} \ll \omega_*^{1/2} = \omega_T^{1/2} / (1/\alpha_{20}^{1/3} - 1), \quad t_* = 2\pi/\omega_* \quad (\omega_T = \kappa_1/a_0^2),$$

t_* — характерное время, за которое температурные волны вокруг пузырьков проходят расстояния, сравнимые с межпузырьковыми расстояниями. Для воды, например, при $a_0 = 10^{-5}$ м, $\alpha_{20} = 10^{-2}$ имеем $\omega_* \approx 10^2$ с $^{-1}$, $t_* = 0,05$ с ($\kappa_1 = 1,6 \cdot 10^{-7}$ м 2 /с).

Приведем асимптотические выражения для фазовой скорости и коэффициента затухания при выполнении условия (3.3). Выражение для Π можно упростить, если учесть, что для большинства веществ в широком диапазоне варьируемых параметров справедливы оценки

$$0 < Q < 1, \quad 0 < \chi < 1, \quad \eta \approx 1, \quad s \ll 1, \quad |\Pi_2| \ll \eta|1 + \Pi_1 Y|.$$

Физический смысл последнего неравенства состоит в том, что при наличии фазовых переходов внутренняя тепловая задача становится несущественной. После упрощения получим

$$\Pi = [Y^2 + \beta(1 + \Pi_1 Y)] / \gamma p_{20} Y^2.$$

Как показывают результаты исследований по динамике паровых пузырьков, а также оценки и расчеты на основе дисперсионного соотношения (2.2), эффекты из-за вязкости обычно несущественны, и в дальнейшем ими будем пренебрегать. При этом заметим, что при выполнении (3.2) заведомо будет выполнено условие

$$\rho_{10}^0 \omega^2 a_0^2 \ll 2\sigma/a_0.$$

Тогда с учетом указанных упрощений дисперсионное выражение примет вид

$$\frac{\omega^2}{K^2} = \frac{d_L^2}{\alpha_{10}^2} (1 - \alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0 - iM\omega/\omega_T), \quad M = \frac{(A-1)^3 (5A^3 + 6A^2 + 3A + 1)}{15(A^3 - 1)}.$$

Отсюда для частот, удовлетворяющих соотношению

$$\omega/\omega_T \ll |1 - \alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0| / M,$$

имеем

$$(3.4) \quad d_p = \frac{d_L}{\alpha_{10}} (1 - \alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0)^{1/2} (1 + O(\omega^2)), \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{\alpha_{10} M}{d_L (1 - \alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0)^{3/2}} \frac{\omega^2}{\omega_T^2}$$

$$(\alpha_{10} a_0 / \alpha_{20} > D),$$

$$d_p = \frac{2d_L (\alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0 - 1)^{1/2}}{\alpha_{10} M} \frac{\omega_T}{\omega}, \quad \delta = \frac{\alpha_{10} \omega}{d_L (\alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0 - 1)^{1/2}}$$

$$(\alpha_{10} a_0 / \alpha_{20} < D).$$

Согласно второй группе формул (3.4), с уменьшением частоты фазовая скорость неограниченно растет, а коэффициент затухания стремится к нулю, т. е. низкочастотные компоненты возмущений распространяются с большими скоростями при малом затухании, что также является признаком неустойчивости среды.

Рассмотрим диапазон частот, удовлетворяющих условию $|Y|(A - 1) \gg 1$, при котором температурные перепады реализуются на расстояниях, значительно меньших, чем среднее расстояние между пузырьками, тогда $\Pi_1 \approx 1$ и выражение для Π примет вид

$$\Pi = [Y^2 + \beta(1 + Y)] / \gamma p_{20} Y^2.$$

Пусть, кроме того, $|Y| \gg 1$, $|Y^2| \gg \beta|Y|$. Первое условие означает, что температурные перепады в жидкости реализуются в тонких слоях вблизи поверхности раздела фаз. Последнее условие является более сильным, и при выполнении его, т. е. когда

$$(3.5) \quad \omega^{1/2} \gg \omega_{**}^{1/2} = \beta \omega_T^{1/2},$$

дисперсионное выражение имеет вид

$$(3.6) \quad \frac{K^2}{\omega^2} = \alpha_{10} \{ \alpha_{10}/d_1^2 + 3\rho_{10}^0 \alpha_{20} [3\gamma p_{20} (1 - \beta/Y) - \rho_{10}^0 \omega^2 a_0^2 - 2\sigma/a_0]^{-1} \}.$$

Тогда для частот, значительно меньших, чем резонансная миннаерттовская частота [6], т. е. при

$$(3.7) \quad \omega^2 \ll \omega_0^2 = 3\gamma p_{20} / \rho_{10}^0 a_0^2,$$

для фазовой скорости и коэффициента затухания, пренебрегая капиллярными эффектами, имеем

$$(3.8) \quad d_p = [\alpha_{10}^2/d_1^2 + \rho_{10}^0 \alpha_{10} \alpha_{20} / \gamma p_0]^{-1/2}, \\ \delta = (1/2)^{3/2} \alpha_{20} \beta d_p (\rho_{10}^0 / p_0) (\omega \omega_T)^{1/2} \quad (p_{10} = p_{20} = p_0).$$

Если объемное содержание пузырьков не очень мало ($\alpha_{20} \gg \alpha_{2*} = \gamma p_0 / \rho_{10}^0 d_1^2$), то

$$(3.9) \quad d_p = d_T = (\gamma p_0 / \rho_{10}^0 \alpha_{20} \alpha_{10})^{1/2}.$$

Отметим, что приведенные приближения (3.8), (3.9) для фазовой скорости соответствуют условию отсутствия теплообмена между фазами и совпадают с выражениями для скорости звука в жидкости с паровыми пузырьками при их адиабатическом поведении. При $p_0 = 10^5$ Па, $a_0 = 10^{-3}$ м оценки (3.5), (3.7), при которых справедливы формулы (3.8), (3.9), для воды дают $10^{-3} \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 10^4 \text{ с}^{-1}$. С ростом давления p_0 , а также с переходом к более крупным пузырькам этот диапазон расширяется.

Для значения фазовой скорости и коэффициента затухания вблизи резонансной частоты ($\omega \approx \omega_0$), также пренебрегая сжимаемостью жидкости, получаем

$$(3.10) \quad d_p = d_T [2\varepsilon / (\sqrt{2} - 1)]^{1/2}, \quad \delta = \omega_0 / d_T [2\varepsilon / (\sqrt{2} - 1)]^{1/2} \\ (\varepsilon = \beta(\omega_T / \omega_0)^{1/2}).$$

Для широкого диапазона значений параметров a_0 и p_0 обычно $\varepsilon \ll 1$.

Следующей характерной частотой за резонансной (ω_0) является частота, при которой фазовая скорость имеет максимум (как правило, аномально высокий). Анализ соотношения (3.6) показывает, что значение этой частоты определяется из

$$(3.11) \quad \omega_{00}^2 = \omega_0^2 (1 + \xi) \quad (\xi = \alpha_{20} / \alpha_{2*} \alpha_{10}).$$

Как показывают расчеты, в диапазоне $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_{00}$ происходит аномально высокое затухание возмущений, т. е. этот диапазон является полосой непрозрачности. Из (3.11) следует, что с ростом объемного содержания пузырьков эта область расширяется.

Для частот, превышающих ω_{00} , можно записать выражение

$$(3.12) \quad d_p = [\alpha_{10}^2/d_1^2 + 3\alpha_{20} \alpha_{10} / a_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)]^{-1/2}, \\ \delta = \frac{3\alpha_{20} d_1}{2 \sqrt{2} a_0^2} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \beta (\omega \omega_T)^{1/2}.$$

Заметим, что при получении асимптотических формул (3.8) — (3.12) полагалось, что характерные частоты ω_{**} и ω_0 удовлетворяют соотношению $\omega_{**} \ll \omega_0$, откуда следует ограничение для радиусов пузырьков

$$(3.13) \quad a_0 \gg a_* = \beta^2 \kappa_1 (\rho_{10}^0 / \beta \gamma \rho_0)^{1/2}.$$

Для пароводяной смеси при $p_0 = 10^5$ Па, например, $a_0 = 10^{-4}$ м. Следовательно, приведенные аналитические формулы справедливы для достаточно крупных пузырьков, удовлетворяющих условию (3.13).

Таким образом, для парожидкостных смесей с крупными пузырьками ($a_0 \gg a_*$) имеются четыре характерные частоты. При этом для частот $\omega \gg \omega_*$ скорости распространения возмущений описываются формулами, аналогичными для пузырьковых газожидкостных сред при «замороженном» теплообмене. Для малых частот, когда температурные перепады между фазами реализуются на расстояниях, сравнимых с межпузырьковыми расстояниями ($\omega \ll \omega_*$), и когда значения параметров a_0 и α_{20} соответствуют устойчивому состоянию равновесия, фазовая скорость близка к равновесной скорости. Причем в тех случаях, когда можно пренебречь капиллярными эффектами, равновесная скорость определяется формулой Ландау. Отметим также, что для пузырьковых смесей при $a_0 = 10^{-4}$ — 10^{-3} м, представляющих обычно наибольший практический интерес, равновесная скорость реализуется для очень низких частот.

Если значения параметров a_0 и α_{20} в области неустойчивых состояний лежат достаточно близко к границе этой области, то при уменьшении частоты примерно от значения $\omega = \omega_*$ фазовая скорость неограниченно растет. Однако если значения параметров a_0 и α_{20} лежат достаточно глубоко в области неустойчивости, то фазовая скорость начинает расти раньше, уже при некотором $\omega = \omega_\sigma$, которое обычно значительно больше, чем ω_* . Для оценки ω_σ рассмотрим дисперсионное выражение в диапазоне частот

$$\omega_* \ll \omega \ll \omega_{**},$$

и, кроме того, пусть

$$\rho_{10}^0 \omega^2 a_0^2 \ll 2\sigma/a_0.$$

Тогда дисперсионное выражение в пренебрежении сжимаемостью жидкости запишется в виде

$$K^2/\omega^2 = 1/d_T^2 (Y/\beta - \Sigma_*), \quad \Sigma_* = (2/3) \Sigma/a_0.$$

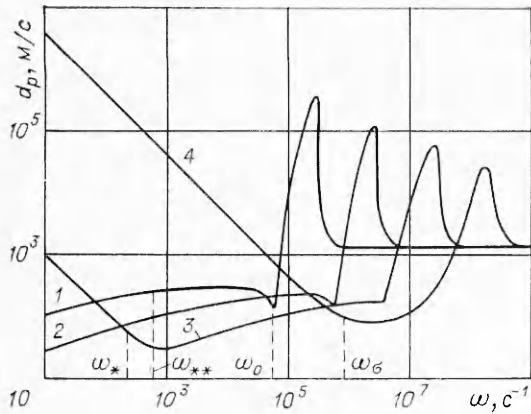
Из анализа этого выражения получим

$$\omega_\sigma = (2\beta\Sigma_*)^2 \omega_T.$$

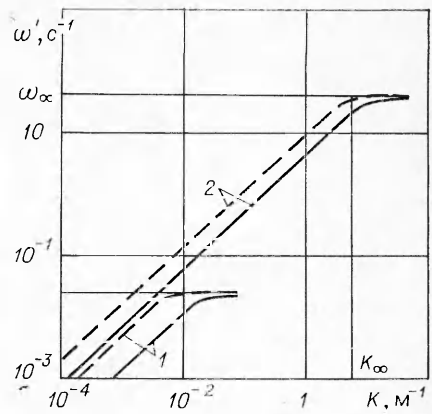
Полученная оценка хорошо согласуется с численными расчетами. Отметим также, что выражение для ω_σ с точностью до коэффициента четыре совпадает с частотой резонанса, вызванного капиллярными эффектами и фазовыми переходами для единичного пузырька [6].

На фиг. 2, 3 представлены дисперсионные кривые, рассчитанные для пароводяной пузырьковой смеси при $p_{10} = 10^6$ Па, $\alpha_{20} = 10^{-2}$. Все необходимые теплофизические параметры оценивались на основании [7]. Линии 1—4 соответствуют радиусам пузырьков $a_0 = 10^{-3}$, 10^{-4} , 10^{-5} и 10^{-6} м. При радиусах $a_0 = 10^{-3}$, 10^{-4} м смесь устойчивая, а при $a_0 = 10^{-5}$, 10^{-6} м — неустойчивая. На графиках для фазовой скорости (см. фиг. 2) отмечены характерные частоты, вычисленные по приведенным выше формулам. Видно, что кривые подтверждают те характерные особенности для фазовой скорости и коэффициента затухания, которые были высказаны выше на основе полученных асимптотических формул.

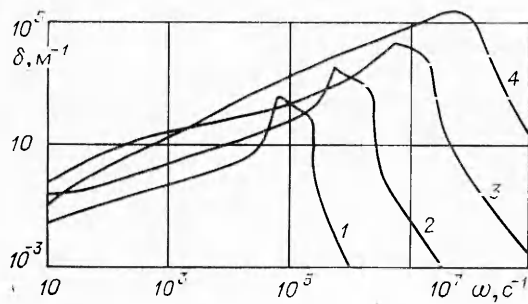
4. Исследование неустойчивых состояний. Как уже было отмечено выше, соотношение (2.2), рассматриваемое как уравнение для определения ω для параметров, соответствующих неустойчивому состоянию, имеет мнимое решение с положительной мнимой частью ($\omega = \omega' i$, $\omega' > 0$). На фиг. 4 представлены зависимости ω' от волнового числа K для парово-



Ф и г. 2



Ф и г. 4



Ф и г. 3

данной пузырьковой смеси при $p_{10} = 10^5$ Па. Линии 1 и 2 соответственно отвечают $a_0 = 10^{-3}$ и 10^{-4} м, сплошные линии — $\alpha_{20} = 10^{-2}$, а штриховые — $\alpha_{20} = 10^{-3}$. Анализ этих кривых показывает, что при изменении волнового числа K от нуля до бесконечности параметр ω' растет от нуля до некоторого наибольшего значения ω_∞ . Причем, если K значительно меньше некоторого K_∞ , зависящего от параметров двухфазной среды, для зависимости между ω' и K , пренебрегая сжимаемостью жидкости, можно записать

$$\omega' = K d_L (\alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0 - 1)^{1/2} / \alpha_{10}.$$

В качестве оценки для K_∞ используем выражение

$$K_\infty = \omega_\infty \alpha_{10} / d_L (\alpha_{10} D / \alpha_{20} a_0 - 1)^{1/2}.$$

Дальнейшее увеличение K от значения K_∞ практически не приводит к росту ω' . Как видно из представленных графиков, уменьшение объемного содержания, а также размера пузырьков при фиксированном K приводит к росту ω' — параметра, определяющего интенсивность роста амплитуды возмущений.

При анализе устойчивости равновесия наиболее важно определить максимальное ω_∞ , которое в данном случае является корнем уравнения

$$(4.1) \quad \frac{3\gamma p_{20} Y^2}{Y^2 + \beta(1 + \Pi_1 Y)} + \rho_{10}^0 \omega_\infty^3 a_0^2 + 4\nu_1 \rho_{10}^0 \omega_\infty - 2\sigma/a_0 = 0, \quad Y = (\omega_\infty/\omega_T)^{1/2}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям, аналогичным (3.2), имеет вид

$$\omega_\infty = (1 - \alpha_{20} a_0 / \alpha_{10} D) \omega_T / M.$$

Это решение удовлетворяет условиям, при которых оно получено, если $(1 - \alpha_{20} a_0 / \alpha_{10} D) \ll 1$, т. е. когда параметры α_{20} и a_0 лежат достаточно близко от границы в области неустойчивости. При $p_{10} = 10^5$ Па, $a_0 = 10^{-3}$ м и $\alpha_{20} = 3 \cdot 10^{-2}$, например, имеем $i_* = t' = 200$ с ($t' = 1/\omega_\infty$).

Если α_{20} и a_0 лежат достаточно глубоко в области неустойчивости, то, полагая $\rho_{10}^0 \omega_\infty^3 a_0^2 \ll 2\sigma/a_0$, $\Pi_1 \approx 1$, из уравнения (4.1) получим

$$(4.2) \quad \omega_\infty = \frac{\Gamma^2 [1 + (1 + 4(1 - \Sigma_*)/\Gamma)^{1/2}]^2 \omega_T}{4(1 - \Sigma_*)} \quad (\Gamma = \Sigma_* \beta).$$

При $p_{10} = 10^5$ Па, $a_0 = 10^{-3}$ и 10^{-4} м соответственно имеем $t' = 50$ и $0,02$ с. Отсюда видно, что для достаточно крупнодиспергированных сред ($a_0 \geq 10^{-3}$ м) характерные времена t' с практической точки зрения довольно большие, и во многих задачах такие среды можно рассматривать как устойчивые. На фиг. 5 представлена зависимость ω_∞ от радиуса пузырьков при $p_{10} = 10^5$ Па, линии 1—3 соответствуют значениям объемной концентрации $\alpha_{20} = 10^{-1}$, 10^{-2} и 10^{-3} , штриховая линия соответствует формуле (4.2). Если значения параметров пузырьковой смеси не очень близки к границе неустойчивости, а также пузырьки не очень мелкие, то решение уравнения (4.1) достаточно точно определяется формулой (4.2). Для очень мелких пузырьков

$$a_0 \ll a_{**} = (\rho_{10}^0 \kappa_1^2 \Gamma_*^4 / \sigma)^{1/5} \quad (\Gamma_* = (2/3) \Sigma \beta),$$

для корня имеем

$$\omega_\infty = (2\sigma / \rho_{10}^0 a_0^3)^{1/2}.$$

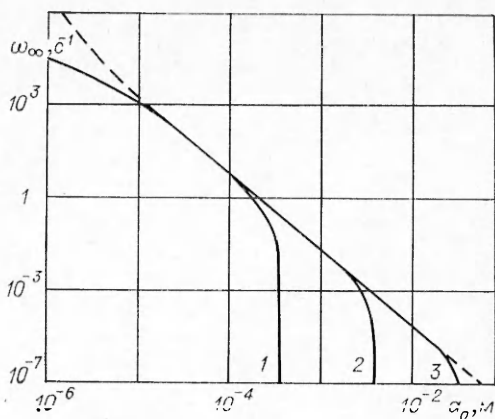
Таким образом, в пузырьковых парожидкостных средах эффекты, связанные с фазовыми переходами и капиллярными явлениями, приводят к новым принципиальным особенностям поведения пузырьковых смесей. В частности, парожидкостные пузырьковые смеси в отличие от пузырьковых газожидкостных сред могут быть неустойчивыми. Причем склонность к неустойчивости повышается (т. е. ω_∞ растет) с переходом к более мелкодисперсным смесям и к смесям с малым объемным содержанием пузырьков. Поэтому очень мелкодиспергированные пузырьковые парожидкостные смеси являются сильно неустойчивыми, и, следовательно, их трудно «удерживать».

В заключение авторы благодарят Р. И. Нигматулина за полезное обсуждение и за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
2. Шаганов В. Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками. — ПМТФ, 1977, № 1.
3. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. и др. Распространение возмущений давления конечной амплитуды в пузырьковой парожидкостной среде. — ПМТФ, 1982, № 3.
4. Оренбах З. М. Скорость распространения волн давления в парожидкостной суспензии. — В кн.: Гидродинамические течения и волновые процессы. Новосибирск, 1983.
5. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
6. Хабеев Н. С. Резонансные свойства паровых пузырьков. — ПММ, 1981, т. 45, № 4.
7. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд. М.: Наука, 1972.

Поступила 12/VII 1983 г.



Ф и г. 5