

Для адекватного описания трехмерных стоячих волн на стекающей вязкой пленке жидкости, по-видимому, нужно рассматривать трехмерные уравнения движения с целью учета зависимости фазовой скорости не только от волнового числа, но и от направления распространения волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. — Новосибирск, 1979. — (Препринт/ИТФ СО АН СССР; № 36—79).
2. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеев С. В. Влияние волн на десорбцию углекислого газа из стекающих пленок жидкости // ТОХТ. — 1983. — Т. 17, № 3.
3. Шейнман А. Г., Ратников Е. Ф., Щеклеин С. Е. Исследование теплообмена пленки жидкости при турбулентном течении по вертикальной шероховатой поверхности // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. — Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977.
4. Накоряков В. Е., Алексеев С. В. Волны на наклонно стекающей пленке жидкости // Волновые процессы в двухфазных средах. — Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
5. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.
6. Унзем Д. Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

Поступила 5/VIII 1986 г.

УДК 532.529 + 533.6.011

ИССЛЕДОВАНИЕ КАУСТИК В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ ГАЗ — ЧАСТИЦЫ

С. П. Кислев, В. М. Фомин
(Новосибирск)

В [1] для случая малой объемной концентрации частиц предложена континуально-дискретная модель, в которой частицы описываются бесстолкновительным кинетическим уравнением, а газ — уравнениями сплошной среды, и показано, что в такой модели возможно возникновение уплотнений в ансамбле частиц, которые называются каустиками. Возникновение и развитие каустик в двухфазной среде имеет некоторые особенности по сравнению со средой из не взаимодействующих частиц [1, 2], связанные с взаимодействием частиц с газом. Во-первых, каустики возникают (в случае монодисперсных частиц) не всегда, а лишь тогда, когда градиент скорости отрицателен и меньше некоторой фиксированной величины [1]. Во-вторых, как будет показано ниже, каустика может возникнуть даже в том случае, когда скорости частиц и газа в момент $t = 0$ постоянны, но при этом размер частиц (или их истинная плотность) изменятся. Отметим, что каустики имеют другую физическую природу, нежели пелены [3], поскольку возникновение последних обусловлено столкновениями частиц. Пелены возникают при больших объемных концентрациях частиц, а каустики — при малых. Таким образом, обе модели охватывают практически весь диапазон по концентрации частиц.

1. Рассмотрим одномерное нестационарное течение смеси газа с частицами при малой объемной концентрации частиц $\rho_2/\rho_1 \simeq 10^{-2}$. В этом случае система уравнений из [1] упрощается, поскольку можно пренебречь влиянием частиц на газ:

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + u_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{u_1 - u_2}{\tau} f \right) = 0, \quad u_1 = \text{const},$$

$$n = n_0 \int_0^{r_m} dr \int_{-\infty}^{+\infty} f du_2, \quad f = f(t, x, r, u_2),$$

$$m_2 = \pi r^2 \int_{x-r}^{x+r} \left(1 - \left(\frac{x-y}{r_0} \right)^2 \right) n(t, y) dy, \quad \tau = \frac{2}{9} \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{r^2}{v}.$$

Здесь ρ_{11} , ρ_1 , u_1 , v — истинная и средняя плотность, скорость, кинематическая вязкость газа; ρ_{22} , ρ_2 , u_2 , m_2 , f — истинная и средняя плотность, скорость, объемная концентрация, функция распределения; r — радиус

частиц. Условие $\rho_2/\rho_1 \simeq 10^{-2}$ имеет место, например, для аэрозоля, капелек воды в облаке. Система (1.1) справедлива в случае

$$Kn = \frac{d}{6m_2 l_p} \gg 1, \quad i_p \simeq \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} \frac{d}{18} Re, \quad Re = \frac{|u_1 - u_2| d}{\nu}.$$

Полагая $Re \simeq 0,4$, $\rho_{22}/\rho_{11} \simeq 10^3$, получим $Kn \simeq 30$ при $m_2 \simeq 10^{-3}$, поэтому система (1.1) справедлива до $m_2 \simeq 10^{-3}$. Формула для m_2 (объемная концентрация частиц) введена в [4, 5] для течений с большими градиентами. На гладких течениях ($z \gg r$, z — характерный размер изменения параметров потока) эта формула переходит в обычную $m_2 = (4/3)\pi r^3 n$.

Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1) при наличии дисперсии частиц по размерам с начальными условиями

$$(1.2) \quad f(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma}\right) \delta(u_2 - u_2^0(x)),$$

$$u_2^0(x) = w_s - w \operatorname{arctg} \alpha x, \quad w_s = (w_1 + w_2)/2,$$

$$w = (w_1 - w_2)/\pi, \quad w_1 > w_2, \quad u_1 > 0.$$

Решение первого уравнения системы (1.1) найдено в [1] методом характеристик. Соответствующий интеграл, определяющий $n(t, x)$, вычисляется методом перевала. В отличие от [1] разложение аргумента экспоненты производится по малому параметру $\sigma/r_0^2 < 1$. В результате простых, но довольно громоздких вычислений получим

$$(1.3) \quad n(t, x) = \sum_{i=1}^m n_0 / |1 - \beta/(1 + (\alpha x^*)^2)|, \quad \beta = w\alpha K, \quad K = \tau(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$(1.4) \quad x^* = x|_{t=0};$$

$$n_{1,2} = n_0 \frac{8^{1/4} \Gamma(1/4)}{4\sqrt{\pi}} \beta^{1/2} \left(1 - 8^{1/4} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{|x - x_k|}{\theta\sigma^{1/2}} \right) / (\alpha\theta\sigma^{1/2} (\beta - 1)^{1/2})^{1/2},$$

$$|x - x_k| \leq \delta_1/4, \quad \delta_1 = \theta\sigma^{1/2}, \quad \alpha\theta\sigma^{1/2} < 1,$$

$$n_{1,2} = n_0 \frac{\beta^{1/2}}{2} / (\alpha|x - x_k| (\beta - 1)^{1/2})^{1/2},$$

$$\delta_1 \leq |x - x_k| \leq \delta_2, \quad \delta_2 = 0,5/\alpha,$$

$$\theta = \frac{2}{9} \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} Re^0 \left(1 - e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}\right), \quad Re^0 = Re|_{t=0};$$

$$(1.5) \quad n(t^+) = n_0 \frac{(72)^{1/6} \Gamma(1/6)}{6\pi^{1/2} (\alpha\theta\sigma^{1/2})^{2/3}} \left(1 - i\sqrt{3} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} \left(\frac{|x - x_k|}{\theta\sigma^{1/2}}\right)^{2/3}\right),$$

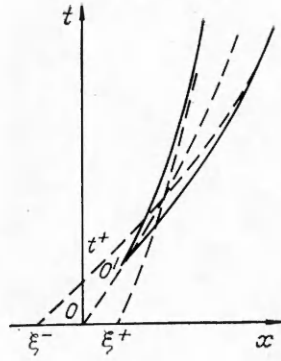
$$|x - x_k| \leq \frac{1}{4} \delta_1,$$

$$n(t^+, x) = n_0 / (3\alpha|x - x_k|)^{2/3}, \quad \delta_1 \leq |x - x_k| \leq \delta_2,$$

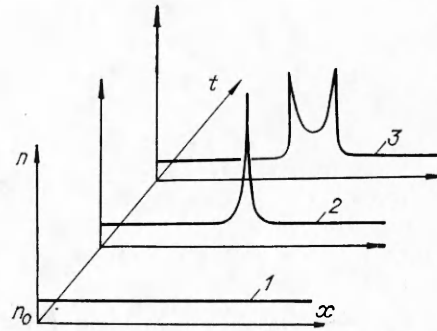
где $x_k = x_k(t)$ — координаты каустики; Γ — гамма-функция.

Решение (1.3) справедливо всюду, за исключением окрестности каустики, определяемой уравнением $1 - \beta/(1 + (\alpha x^*)^2) = 0$. Уравнение каустики в плоскости t, x найдено в [1], там же исследовано поведение траекторий частиц вблизи каустики.

На рис. 1 сплошной линией обозначена каустика, а штриховыми — траектории частиц [1]. Решение (1.4) описывает зависимость $n(t, x)$ в окрестности каустики при $t > t^+$, а формулы (1.5) — при $t = t^+$. Соответствующие зависимости $n(x)$ на три момента времени ($t = 0$, $t = t^+$, $t > t^+$) показаны на рис. 2 линиями 1—3. Оценим максимальную концентрацию частиц на каустике и ширину Δ на полувывсоте $n(x)$. Полагая



Р и с. 1



Р и с. 2

в (1.4) $\sigma^{1/2}/d \approx 0,1$, $Re \approx 0,1$, $\rho_{22}/\rho_{11} \approx 10^3$, $\alpha d \approx 0,1$, $\beta \approx 2$, получим

$$n/n_0 \approx 4 \left(1 - 5,7 \frac{|x - x_k|}{d} \right), \quad |x - x_k| \leq 0,1d,$$

$$n/n_0 \approx \sqrt{5} \left/ \left(\frac{|x - x_k|}{d} \right)^{1/2} \right., \quad d \leq |x - x_k| \leq 5d,$$

откуда $n_{\max}/n_0 \approx 4$, $\Delta \approx d$.

Для определения объемной концентрации частиц $m_2(x)$ на каустике необходимо вычислить интеграл от $n(x)$ (третья формула в (1.1)). В случае, если $\theta\sigma^{1/2}/d \geq 1$, из (1.5), (1.1) имеем $m_2/m_2^0 \approx n/n_0$, если выполнено обратное неравенство $\theta\sigma^{1/2}/d \ll 1$, то

$$(1.6) \quad m_2/m_2^0 \approx \frac{3}{4} \left(5 - 4 \left(\frac{x - x_k}{r_0} \right)^2 \right) / (\alpha d)^{2/3} + O(\theta\sigma^{1/2}/d).$$

Здесь $\alpha d \ll 1$; $\left(\frac{x - x_k}{r_0} \right)^2 \ll 1$; x_k — координата точки O' .

На рис. 3 приведена зависимость m_2/m_2^0 , вычисленная по формуле $m_2/m_2^0 = n/n_0$ и (1.6) (кривые 1, 2) для $\alpha d \approx 0,1$, $\sigma^{1/2}/d \approx 3 \cdot 10^{-3}$, $\theta\sigma^{1/2}/d \approx 6,6 \cdot 10^{-2}$. В [1] показано, что каустики возникают при достаточно больших градиентах $u_2^0(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$(1.7) \quad \alpha l_p > 1 \quad (l_p \approx wt).$$

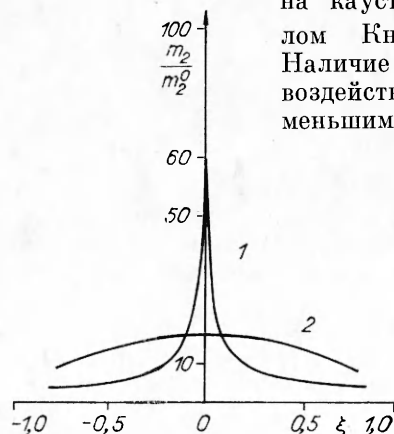
Учитывая это условие, из (1.6) найдем максимальную объемную концентрацию частиц на каустике $(m_2/m_2^0)_{\max} \approx 4/(d/l_p)^{2/3}$. Ограниченность m_2 на каустике приводит к тому, что число столкновений между частицами на каустике мало и определяется начальным числом Кнудсена $N \approx 1/Kn^0$ ($Kn^0 \approx d/(6m_2^0 l_p) \gg 1$). Наличие критического градиента (1.7) связано с воздействием газа на частицы: так, для течений с меньшими градиентами успевает произойти выравнивание скоростей газа и частиц до возникновения каустики.

2. Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1) в случае дисперсии частиц по скоростям с начальным условием

$$f(t=0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(- (u_2 - u_2^0(x))^2 / 2\sigma \right) \delta(r - r_0)$$

($u_2^0(x)$ определена в (1.2)). Производя аналогичные вычисления, получим вне каустики



Р и с. 3

$$(2.1) \quad n/n_0 = \sum_{i=1}^m 1/|1 - \beta/(1 + (\alpha x^*)^2)|, \quad m = 1, 3;$$

на каустике

$$(2.2) \quad n_{1,2} = n_0 \frac{8^{1/4} \Gamma(1/4)}{4 \sqrt{\pi}} \frac{\left(1 - \sigma^{1/4} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \frac{\alpha |x - x_k|}{\beta \sigma^{1/2} w}\right)}{((\beta - 1) \sigma/w^2)^{1/4}},$$

$$0 \leq |x - x_k| \leq 0,25 \sigma^{1/2} / (w \alpha);$$

$$(2.3) \quad n_{1,2} = 0,5 n_0 / ((\beta - 1)^{1/2} \alpha \beta |x - x_k|)^{1/2}, \\ \sigma^{1/2} / (w \alpha) \leq |x - x_k| \leq 0,5 / \alpha, \quad \sigma^{1/2} / w < 1;$$

в окрестности точки O'

$$(2.4) \quad n = n_0 \frac{18^{1/6} \Gamma(1/6)}{3 \sqrt{2\pi} (\sigma/w^2)^{1/3}} \left(1 - 0,2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \frac{(\alpha |x - x_k|)^{2/3}}{(\sigma/w^2)^{1/3}}\right),$$

$$0 \leq |x - x_k| < 0,25 \delta_3, \quad \delta_3 \approx 10^{-3} \left(\frac{\sigma}{w^2}\right)^{3/2} / \alpha;$$

$$(2.5) \quad n = n_0 / (3\alpha |x - x_k|)^{2/3}, \quad \delta_3 \leq |x - x_k| \leq 5 \cdot 10^{-2} / \alpha.$$

Оценим максимальную концентрацию на каустике и ширину Δ для дисперсии по скоростям. Полагая в (2.2) $\beta \approx 2$, $\alpha d \approx 0,1$, $\sigma^{1/2} / w \approx 0,1$, запишем

$$(2.6) \quad n/n_0 \approx 3 \left(1 - 0,95 \alpha |x - x_k| \sqrt{\frac{\beta \sigma^{1/2}}{w}}\right), \\ 0 \leq |x - x_k| \leq 0,25 d, \quad n/n_0 \approx \sqrt{5} \sqrt{\left(\frac{|x - x_k|}{d}\right)^{1/2}}, \\ d \leq |x - x_k| \leq 5d,$$

откуда $n_{\max}/n_0 \approx 3$, $\Delta \approx 2,5d$. Приведенные оценки показывают, что условие $Kn \gg 1$ достаточно хорошо выполняется на каустике. Это доказывает применимость системы (1.1) в данном случае.

3. Рассмотрим течение смеси газа с частицами при больших числах Рейнольдса ($Re = |u_1 - u_2| d / \nu \gg 1$). Тогда уравнения движения частицы имеют вид

$$(3.1) \quad \frac{dx}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = (u_1 - u_2)^2 / l_p, \quad l_p \approx \frac{4}{3} \frac{\rho_{20}}{\rho_{11}} \frac{d}{c_d}, \quad c_d \approx 0,5.$$

Найдем решение уравнений при $u_1 = \text{const}$

$$(3.2) \quad u_2 = u_1 - (u_1 - u_2^*) / (1 + t(u_1 - u_2^*) / l_p), \\ x = x^* + u_1 t - l_p \ln \left(1 + \frac{t}{l_p} (u_1 - u_2^*)\right), \quad u_1 > u_2, \\ (u_2^*, x^*) = (u_2, x) |_{t=0}.$$

Предположим, что в канале постоянного сечения длиной L находятся частицы, скорость которых равна нулю, плотность постоянна, а радиус распределен по нормальному закону

$$(3.3) \quad f^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma^2}\right) \delta(u_2^*) \quad (r_0(x^*) = r_s + \Delta r \arctg \alpha x^*).$$

Точка $x = 0$ находится в середине канала так, что координаты левого и правого конца равны соответственно $-L/2$, $+L/2$. В некоторый момент по каналу в сторону положительных x проходит ударная волна, за фронтом которой газ движется со скоростью u_1 . Под действием газа час-

тицы начинают ускоряться, при этом мелкие догоняют более крупные, и в некоторый момент может возникнуть каустика. Найдем момент образования каустики и расстояние между ее ветвями в предположении $tu_1/l_p \ll 1$. Разлагая правую часть во втором уравнении (3.2) по степеням, получим

$$(3.4) \quad x = x^* + \frac{u_1^2 t^2}{2l_p},$$

отсюда с учетом (3.3)

$$(3.5) \quad \frac{\partial x}{\partial x^*} = 1 - \frac{t^2 u_1^2 \kappa \alpha \Delta r}{2l_p^2 (1 + (\alpha x^*)^2)}, \quad \kappa = \frac{8}{3} \frac{\rho_{22}}{\rho_{11}} / c_d.$$

Используя (3.4), (3.5), имеем уравнение каустики

$$(3.6) \quad x \approx \frac{u_1^2 t^2}{2l_p} \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{(t/t^*)^2 - 1}, \quad t^* = (l_p/u_1) \sqrt{2/(l_p \alpha \Delta r/r_s)},$$

а расстояние между ветвями каустики

$$(3.7) \quad \Delta x = \frac{2}{\alpha} \sqrt{(t/t^*)^2 - 1}.$$

Для того чтобы найти концентрацию частиц на каустике, докажем тождество

$$(3.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f du_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f^* du_2^*,$$

где x, t фиксированы. Как следует из [1], решение уравнений (1.1) имеет вид

$$(3.9) \quad f = f^* \exp \left(- \int_0^t \frac{\partial F}{\partial u_2} dt' \right),$$

$$\frac{du_2}{dt} = F(u_1 - u_2), \quad \frac{dx}{dt} = u_2, \quad u_1 = \text{const.}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (3.9) по u_2^* , запишем $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} \right) =$
 $= \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u_2^*}$ (t, x фиксированы),

откуда $\frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} = \frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} \Big|_{t=0} \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F}{\partial u_2} dt' \right)$.

Поскольку $u_2 = u_2^* + \int_0^t F dt'$, при условии, что F — гладкая функция, найдем

$$(3.10) \quad \frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} \Big|_{t=0} = 1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial u_2^*} = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial F}{\partial u_2} dt' \right).$$

Подставляя f из (3.9) и $\partial u_2 / \partial u_2^*$ из (3.10) в левую часть (3.8), получим требуемое тождество.

Тождество (3.8) выражает закон сохранения числа частиц, поскольку в левой и правой части (3.8) записано выражение для числа частиц, лежащих на одних и тех же траекториях в моменты t и $t = 0$. С использованием тождества (3.8) и начальных условий (3.3) концентрация частиц

$$n(t, x) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- (r-r_0)^2 / 2\sigma \right) \frac{\partial r}{\partial x^*} dx^*.$$

Результат вычисления интеграла совпадает с (1.3)–(1.5), при этом $\beta = (t/t^*)^2$, $\theta = \beta/(\Delta r \alpha)$.

Оценим характерные размеры каустики в канале длиной $L = 10$ см. Пусть слева находятся частицы из бронзы $\rho_{22} = 8,6$ г/см³, $r_0 = 60$ мкм, а справа — из бронзы $r_0 = 80$ мкм, отсюда $r_s = 70$ мкм, $\Delta r = 20$ мкм, $l_p = 84$ см ($\rho_{11} = 3,8 \cdot 10^{-3}$ г/см³).

Область перехода от одного радиуса к другому выберем равной $1/\alpha \approx 0,21$ см. Слева направо распространяется ударная волна с $M = 3$, за фронтом которой $u_1 = 7,4 \cdot 10^4$ см/с, $\rho_{11} = 3,8 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Подставляя соответствующие величины в формулы (3.5)–(3.7), найдем момент образования каустики $t^+ = 150$ мкс, $x_k(t^+) = 0,73$ см, а расстояние между ветвями каустики в точке $L/2$ $\Delta x \approx 1$ см. Для определения концентрации частиц на каустике зададим $\sigma^{1/2}/d \approx 0,02$, тогда, подставляя $\beta \approx 6,8$, $\theta(L/2) \approx 7 \cdot 10^2$, $\theta(0) \approx 10^2$, $\alpha d \approx 0,066$ в (1.4), (1.5), имеем $(n/n_0)_k \approx 1,6$, $n(t^+)/n_0 \approx 7,26$, а толщина сгустка $\Delta_k \approx 3,5d$, $\Delta|_{t^+} \approx 0,5d$, откуда

$\left(\frac{m_2}{n_2^0}\right)_k \approx \left(\frac{n}{n_0}\right)_k$. Начальную концентрацию частиц выберем из условия отсутствия столкновений между частицами в объеме. Представляя число столкновений частицы в виде суммы столкновений на каустике [и вне каустики] $N \approx \int_0^{0,5} 2\pi d^3 n(x) d(x/d) + \pi d^2 n L$, получим $N \approx 6m_2^0 (n/n_0)_{t^+} + L/d$. Отсюда, учитывая $(n/n_0)_{t^+} \approx 7$, $L/d \approx 10^3$, найдем $N \approx 1/Kn^0$, $Kn^0 \approx 10^{-3}/(6m_2^0)$. Полагая $Kn \approx 10$, получим $m_2^0 \approx 1,7 \cdot 10^{-5}$, $n \approx 10$ 1/см³.

4. Результаты можно обобщить на случай произвольной зависимости начальной скорости частиц от координаты и произвольной зависимости $c_d(\text{Re}, M_{12})$ при постоянной скорости газа $u_1 = \text{const}$. Для простоты частицы будем считать монодисперсными, тогда с учетом (1.1), (3.8) запишем формулу

$$(4.1) \quad \frac{n}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(u_2^* - u_2^0(x^*))^2}{2\sigma}\right) du_2^*.$$

Здесь t, x фиксированы; $u_2^0(x^*)$ — произвольная гладкая функция.

Интеграл (4.1) вычисляется разложением подэкспоненциального выражения в ряд по степеням $(u_2^* - u_2^+)/\sqrt{\sigma}$ функции $\varphi^2/2\sigma = (u_2^* - u_2^0(x^*))^2/2\sigma$, где $u_2^+ = u_2^0(\xi)$; $x = \xi + \psi(t, u_2^0(\xi))$ — уравнение движения частицы. Ограничиваясь первым членом в разложении φ^2 , получим

$$(4.2) \quad n/n_0 = 1 \left| \frac{\partial x}{\partial x^*} \right|.$$

Формула (4.2) справедлива до тех пор, пока $\partial x/\partial x^*$ не обратится в нуль. Уравнение $(\partial x/\partial x^*)_t = 0$ определяет каустику в плоскости t, x^* , момент возникновения каустики t^+ находится из условия $(\partial^2 x/\partial x^{*2})_{t^+} = 0$, а условие возникновения каустики дается формулами $du_2^0/dx^* < 0$, $\left| \frac{du_2^0}{dx^*} \right| \tau > 1$.

Для того чтобы найти решение в окрестности каустики, в разложении φ^2 необходимо удерживать члены более высокого порядка малости. В результате соответствующих вычислений определим концентрацию частиц на каустике

$$(4.3) \quad n/n_0 = 1/(2x_{\xi\xi} |x - x_k|)^{1/2},$$

$$(n/n_0)_k = \frac{8^{1/4} \Gamma(1/4)}{2^{3/2} \pi^{1/2}} \left| \xi \right|^{-1/2}, \quad \xi = \frac{x_{\xi\xi} \sigma^{1/2}}{|du_2^0/d\xi|} \ll 1.$$

В частном случае $u_2^0(x^*) = w_s - w \arctg \alpha x^*$ при стоковом режиме обтекания полученные формулы (4.3) переходят в (2.2), (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев С. П., Фомин В. М. Континуально-дискретная модель для смеси газ — твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // ПМТФ.— 1986.— № 2.
2. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.
3. Крайко А. Н. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 3.
4. Фомин В. М., Киселев С. П. Комбинированный разрыв в смеси газа и твердых частиц // ЧМСС.— 1984.— Т. 15, № 2.
5. Ершов А. П. Об уравнениях механики двухфазных сред // ПМТФ.— 1983.— № 6.

Поступила 12/V 1986 г.

УДК 539.3 : 534.1

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

*В. В. Ларченко
(Новосибирск)*

Изложен адаптирующийся вариационный метод и показано его применение для исследования напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки, который в существенной части использует принцип максимума для включений [1, 2]. Особенность метода состоит в том, что координатная система вычисляется на ЭВМ, причем, согласно идее Г. И. Марчука, класс функций, на котором реализован принцип максимума, задается с учетом априори известных свойств решений краевой задачи [3, 4]. Предложена модель кинематических соотношений геометрически нелинейной теории оболочек в «квадратичном» приближении.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений Маргерра — Власова

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mu \Delta^2 w &= \theta \Delta \Phi + \Phi'' H w + w'' H \Phi - 2 I \Phi I w + p, \\ \mu \Delta^2 \Phi &= (I w)^2 - w'' H w - \theta \Delta w, \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad \Omega = [0, 1) \times [0, 2\pi], \\ \left[\begin{array}{l} r H(\dots) = (\dots)' + r^{-1}(\dots)'' \\ r I(\dots) = r^{-1}(\dots)' - (\dots)'' \end{array} \right. \\ & \quad \left. r \in \partial \Omega, w = w' = 0, H \Phi = I \Phi = 0, \right. \\ & \quad \mu = h/a\gamma, \gamma^2 = 12(1 - \nu^2), \theta = a/R, (\dots)' = \partial/\partial r(\dots), (\dots)'' = \partial^2/\partial \varphi^2(\dots), \end{aligned}$$

описывающую напряженно-деформированное состояние, устойчивость и послебифуркационное поведение пологого сферического купола с подвижно защемленным опорным контуром. Здесь w — нормальное перемещение срединной поверхности; Φ — функция Эри; μ — естественный малый параметр при старших производных; θ — полураствор оболочки; a — опорный радиус; R — радиус кривизны сферы; p — внешнее давление; h — толщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона; все величины безразмерные; переход их к размерным приведен в [5].

Исследуемая задача допускает применение двойственного метода анализа, который заключается в том, что при аппроксимации решения уравнений теории оболочек наряду с задачей Маргерра — Власова используется ее вариационная формулировка [6]

$$(1.2) \quad \langle \text{grad } \mathcal{D}(\mathcal{F}), \omega \rangle = 0, \quad \forall \omega \in \mathbf{U}(\Omega), \quad \mathbf{U}(\Omega) = \dot{\mathbf{H}}^2(\Omega) \times \dot{\mathbf{H}}^2(\Omega),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \mu [(\Delta \mathcal{F}_1)^2 - (\Delta \mathcal{F}_2)^2] - 2 \mathcal{F}_1 \Delta \mathcal{F}_2 + 2 p \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1 \times \\ & \times [\mathcal{F}_1'' H \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_2'' H \mathcal{F}_1 - 2 I \mathcal{F}_1 I \mathcal{F}_2] \} d\Omega, \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \equiv (\Phi, w). \end{aligned}$$

Постановки (1.1) и (1.2) эквивалентны в гильбертовом пространстве двумерных вектор-функций $\mathbf{U}(\Omega)$. Однако это утверждение справедливо лишь в бесконечномерном случае. При развитии приближенных методов