

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СРЕДАХ

УДК 539.3

В. А. Даниленко, С. В. Микуляк

Отделение геодинамики взрыва Института геофизики НАН Украины,
252054 Киев

Численно моделируются процессы распространения импульсных возмущений в предварительно напряженных упругой и упруговязкопластической средах. Показано, что наличие начального напряженного состояния приводит к образованию волновых структур, отсутствующих в ненапряженных изотропных средах. Асимптотическим методом исследуется квазипродольная волна, распространяющаяся в предварительно напряженной упруговязкопластической среде.

Существующие в реальных твердых средах статические напряжения могут существенно изменять волновые поля, вызванные воздействием импульсных нагрузок. Например, во время проведения ядерных взрывов на полигоне в штате Невада были зарегистрированы SH -волны и волны Лява с амплитудами, сравнимыми с амплитудами соответственно продольной и рэлеевской волн [1, 2]. Эти волны связаны с тектоническими напряжениями, поскольку взрыв в ненапряженном твердом теле является источником типа центра расширения, излучающим в окружающую среду только продольную волну [3]. В данной работе решаются две задачи, в которых в результате взаимодействия нелинейного волнового поля, вызванного импульсной нагрузкой, с полем начальных статических напряжений образуются волновые структуры, принципиально отсутствующие в ненапряженном изотропном твердом теле.

РАСШИРЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим процесс расширения бесконечной цилиндрической полости в напряженной среде под воздействием импульсной нагрузки, прикладываемой к ее поверхности. Краевая задача, описывающая этот волновой процесс в плоскости, перпендикулярной к оси полости, имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{dS_{ij}}{dt} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (3)$$

$$\frac{dp}{dt} = -K e_{kk}, \quad i, j, k = 1, 2, \quad (4)$$

где v_i , σ_{ij} и S_{ij} — компоненты вектора скорости, тензора напряжений и девиатора тензора напряжений соответственно; $p = -\sigma_{ii}/3$; ρ — плотность; e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; μ , K — упругие константы.

В начальный момент среда находится в состоянии одноосного сжатия в направлении x_2 :

$$t = 0: \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0. \quad (5)$$

В силу симметрии движения относительно осей координат задачу достаточно решать в первом квадранте, поэтому на осях x_1 и x_2 граничные условия задаются так же, как на жестких стенках:

$$x_1 = 0: \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_2} = 0; \quad x_2 = 0: \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} = 0. \quad (6)$$

На границу полости воздействует импульсная нагрузка

$$p = \begin{cases} p_{\max} t / \tau_0 & \text{при } t < \tau_0, \\ p_{\max} \exp[\alpha(\tau_0 - t)] & \text{при } t \geq \tau_0. \end{cases} \quad (7)$$

Задача решалась численно с использованием конечно-разностного метода «Тензор» [4]. Начальное напряженное состояние задавалось соотношением $\sigma_{22}^0 = p_{\max}/2$; константы в уравнениях (3), (4) ($\mu = 2,74 \cdot 10^{10}$ Па, $K = 3,27 \cdot 10^{10}$ Па) соответствует граниту.

Векторное поле в момент времени $t = 0,304$, когда фронт продольной волны достигает расстояния $8,5R_0$, представлено на рис. 1; здесь $t = \bar{t}R_0\sqrt{\rho_{\max}/\rho}$; \bar{t} — размерное время; $R_0 = 7 \cdot 10^{-2}$ м — радиус полости, ρ — плотность гранита, $\rho = 2,61 \cdot 10^3$ кг/м³; $p_{\max} = 10^8$ Па. Отчетливо виден фронт поперечной волны, радиус которого к этому моменту времени равен $5,5R_0$. Амплитуда поперечного возмущения, как показывают расчеты, зависит от расстояния до центра полости и от угловой координаты $\varphi = \arctg(x_2/x_1)$. Максимальное значение амплитуды поперечного возмущения достигается в направлении $\varphi = \pi/4$, что соответствует экспериментальным результатам работы [5], где исследовались взрывные процессы в предварительно напряженных гранитных блоках. Для продольного компонента амплитуда максимальна в направлении $\varphi = 0$. Здесь возникают максимальные градиенты напряжений. В перпендикулярном направлении ($\varphi = \pi/2$) амплитуда компонента v_r достигает минимума.

На рис. 2 представлены зависимости радиальных и тангенциальных компонентов вектора скорости от времени для точек, находящихся на различных расстояниях от поверхности полости. Все три точки расположены на прямой, проходящей через начало координат под углом $\varphi = \pi/4$. Стрелками отмечены моменты прихода соответственно P - и S -волн, вычисленные через упругие скорости c_p и c_s и приблизительно совпадающие с началом возрастания соответственно радиальных и тангенциальных скоростей. Из рис. 3 видно, что поперечные волны генерируются на поверхности полости, где происходит разгрузка статических напряжений. При этом рост тангенциального компонента v_φ до максимального значения происходит быстрее, чем компонента v_r , т. е. генерирование поперечных волн не зависит от нагрузки, прикладываемой к стенке полости. Об этом свидетельствуют и другие расчеты, в которых изменялось τ_0 — время возрастания давления на стенке полости до максимального значения. В продольной волне имеются малые смещения в направлении, перпендикулярном к направлению распространения продольной волны, вызванные изменением направлений главных осей тензора напряжений. Это приводит к тому, что продольная волна трансформируется в квазипродольную.

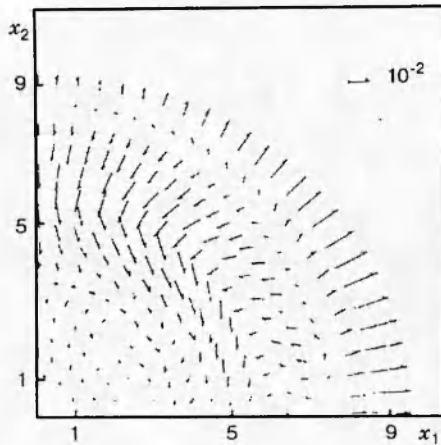


Рис. 1

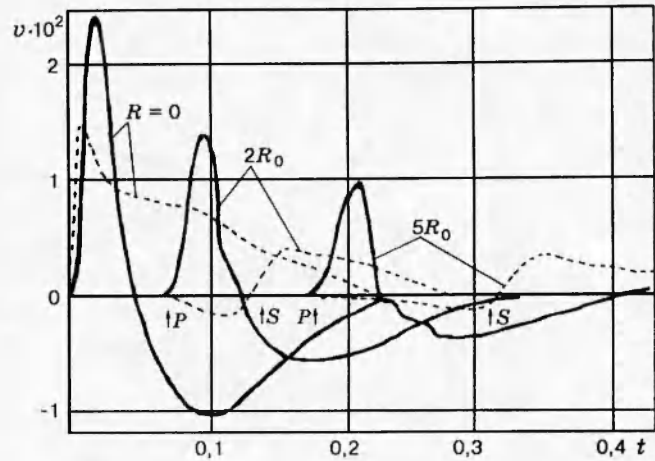


Рис. 2

Рис. 1. Поле скоростей в момент времени $t = 0,304$

Рис. 2. Зависимости компонентов вектора скорости v_r (сплошные линии) и v_φ (штриховые) от времени

Таким образом, нелинейное волновое поле, взаимодействуя с полем начальных напряжений, приводит к образованию новых волновых структур — квазипродольных и поперечных волн, которые отсутствуют в ненапряженной среде.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НАПРЯЖЕННОЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Будем рассматривать процессы распространения плоских нелинейных волн, вызванных импульсными нагрузками в упруговязкопластической среде с начальными напряжениями. Уравнения, описывающие динамическое поведение среды, имеют вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{S}_{ij} + \frac{1}{\tau} \hat{\Phi} \left[\sqrt{J_2} - Y_0 \right] \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon} = (1/E(\varepsilon)) \dot{\sigma} + \hat{F}[\sigma - f(\varepsilon)], \quad (9)$$

$$E(\varepsilon) = E_0(1 + m\varepsilon^\alpha), \quad (10)$$

$$f(\varepsilon) = K_0(\varepsilon + n\varepsilon^\beta). \quad (11)$$

Здесь J_2 — второй инвариант тензора напряжений; Y_0 — предел текучести; τ — время релаксации; ε — объемная деформация ($\varepsilon = \varepsilon_{ii}$, $i = 1, 2, 3$); $\sigma = \sigma_{ii}/3$; E_0 , m , α , K_0 , n , β — константы;

$$\hat{\Phi}[\xi] = \begin{cases} \xi & \text{при } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0, \end{cases} \quad \hat{F}[\chi] = \begin{cases} \mu\chi^\alpha & \text{при } \chi \geq 0, \\ 0 & \text{при } \chi < 0. \end{cases} \quad (12)$$

В уравнениях (8)–(12) задавали следующие константы: $\bar{E}_0 = 1,38 \cdot 10^8$ Па, $m = 3,3 \cdot 10^5$, $\alpha = 2,68$, $K_0 = 10^7$ Па, $n = 5,6 \cdot 10^3$, $\beta = 4$, $\alpha = 0,1$, $\tau = 0,2 \cdot 10^{-3}$, $\mu = 5,2 \cdot 10^8$ Па,

$\bar{Y}_0 = 0,816 \cdot 10^5$ Па, $\bar{\rho}_0 = 1,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Характерный размер $\bar{l} = 0,1$ м.

Рассмотрим процесс распространения плоских волн в предварительно напряженном полупространстве $x_1 \geq 0$, вызванных прикладываемой к его поверхности импульсной нагрузкой:

$$t = 0: \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0, \quad i, j = 1, 2, \quad (13)$$

$$x_1 = 0: \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^b, \quad i, j = 1, 2, \quad (14)$$

где $\sigma_{ij}^0, \sigma_{ij}^b$ — константы (σ_{ij}^0 не равны нулю одновременно). При такой постановке задачу достаточно решать в узкой полубесконечной полосе $x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq L$, на границе которой задаются условия непротекания:

$$x_2 = 0; \quad x_2 = L: \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_2} = 0. \quad (15)$$

Начальные напряжения σ_{ij}^0 таковы, что среда находится в пластическом состоянии, т. е. выполнено условие текучести

$$(\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)^2/3 + (\sigma_{12}^0)^2 = Y_0^2. \quad (16)$$

Переменные и константы в уравнениях (8)–(16) приведены к безразмерному виду таким образом, что $\sigma_{11}^b = 1, \rho_0 = 1, l_0 = 1$, где σ_{11}^b — амплитуда нагрузки, прикладываемой к поверхности полупространства, ρ_0 — начальная плотность среды, l_0 — характерный размер задачи.

Краевую задачу решали численно с использованием конечно-разностного метода «Тензор» с аппроксимацией определяющих уравнений (8), (9) конечно-разностными уравнениями второго порядка [6].

На рис. 3 представлены зависимости $\sigma_{11}(x_1)$ и $\sigma_{12}(x_1)$ для четырех различных моментов времени, полученные в результате расчетов распространения импульсного возмущения в полупространстве, подвергнутом начальному сдвиговому усилию $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = 0, \sigma_{12}^0 = 0,1$. Касательное напряжение σ_{12}^0 мало по сравнению с нормальной нагрузкой σ_{11}^b , прикладываемой к поверхности полупространства. На поверхности полупространства при $t \geq 0$ касательное напряжение полагается равным нулю ($\sigma_{12}^b = 0$). Нормировочная константа $\bar{\sigma}_{11}^b = -8,16 \cdot 10^5$ Па. Видно, что в продольной волне происходит разгрузка статических касательных напряжений и по полупространству распространяется квазипродольная волна, в которой малые смещения перпендикулярны к направлению ее распространения. Ширина фронта квазипродольной волны со временем увеличивается, причем это увеличение имеет место как для компонента σ_{11} , так и для σ_{12} .

На рис. 4 показаны зависимости $\sigma_{11}(x_1)$ и $\sigma_{12}(x_1)$ для случая, когда величина начальных касательных напряжений сравнима с амплитудой нагрузки, прикладываемой к поверхности полупространства ($\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = 0,49, \sigma_{12}^0 = 0,4, \sigma_{11}^b = 1, \sigma_{22}^b = 0,49, \sigma_{12}^b = 0$). При этом на фронте волны не происходит разгрузки касательных напряжений и по среде распространяются две волны — чисто продольная и поперечная. Последняя генерируется на поверхности полупространства.

Исследуем структуру квазипродольной волны, распространяющейся в упруговязкопластической предварительно напряженной среде. Исследования проведем с помощью асимптотического метода, который использовался в работах [7, 8] для изучения продольных ударных волн.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении x_1 , в которой допускаются смещения в направлении x_2 . Сдвиговые деформации будем описывать уравнениями

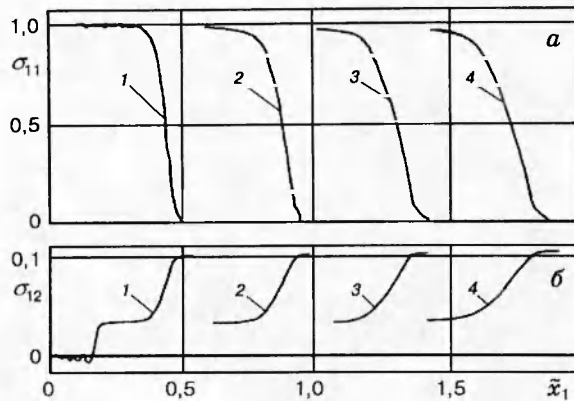


Рис. 3

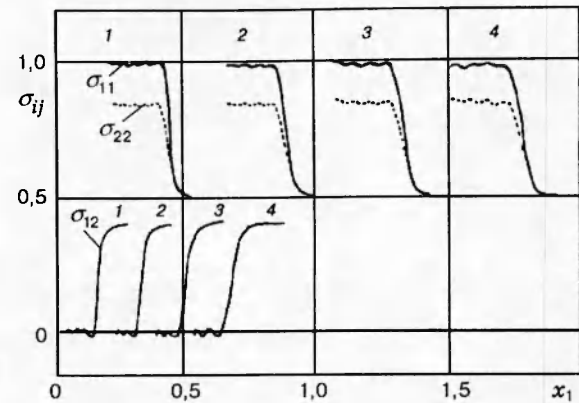


Рис. 4

Рис. 3. Зависимости $\sigma_{11}(x_1)$ (а) и $\sigma_{12}(x_1)$ (б) для моментов времени $t = 0,66 \cdot 10^{-2}$ (1); $1,32 \cdot 10^{-2}$ (2); $1,98 \cdot 10^{-2}$ (3) и $2,64 \cdot 10^{-2}$ (4)

Рис. 4. Зависимости $\sigma_{11}(x_1)$, $\sigma_{22}(x_1)$ и $\sigma_{12}(x_1)$ для моментов времени $t = 0,32 \cdot 10^{-2}$ (1); $0,64 \cdot 10^{-2}$ (2); $0,99 \cdot 10^{-2}$ (3) и $1,13 \cdot 10^{-2}$ (4)

(8), а объемные — уравнением для упругого тела (4). Замкнутая система уравнений при условии малых деформаций имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varepsilon_{1i}}{\partial t} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{2\mu}{\tau} \hat{\Phi} \left[\sqrt{J_2} - Y_0 \right] \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Начальное напряженное состояние пластическое:

$$(\sigma_{11}^+ - \sigma_{22}^+)^2/3 + (\sigma_{12}^+)^2 = Y_0^2.$$

Здесь σ_{ij}^+ — компоненты тензора напряжений в начальный момент времени, т. е. перед фронтом волны. За фронтом осуществляется переход к новому пластическому состоянию:

$$(\sigma_{11}^- - \sigma_{22}^-)^2/3 + (\sigma_{12}^-)^2 = Y_0^2.$$

Приведем уравнения (17) к безразмерному виду через размерные параметры $\bar{\sigma}_0^b$, $\bar{\rho}_0$, t_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varepsilon_{1i}}{\partial t} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_1}, \\ \delta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= \delta \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} \delta_{ij} + 2\mu \delta \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - 2\mu \hat{\Phi} \left[\sqrt{J_2} - Y_0 \right] \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

здесь $\delta = \tau/t_0$. Далее, рассмотрим волновой процесс в моменты времени $\delta \ll 1$, т. е. характерное время значительно больше времени релаксации. В уравнениях (18) малый параметр стоит при старших производных, поэтому решение на фронте будем искать в виде пограничного слоя [7, 8]. Введя новые переменные

$$\tilde{x}_1 = (Dt - x_1)/\alpha, \quad \tilde{t} = t, \quad (19)$$

где D — скорость фронта волны, $\alpha = \alpha(\delta)$ — толщина пограничного слоя ($\alpha \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$), перепишем систему (18), опуская тильды:

$$D \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{1i}}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_{1i}}{\partial t} - \frac{1}{i} \frac{\partial v_i}{\partial x_1}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} = & \alpha \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} + \lambda D \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + 2\alpha\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + 2\mu D \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} - \\ & - \frac{2\mu\alpha}{\delta} \hat{\Phi} \left[\sqrt{J_2} - Y_0 \right] \frac{S_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение системы (20)–(22) будем искать в виде асимптотических рядов при $\alpha \rightarrow 0$. Запишем разложение переменной σ_{ii} в асимптотический ряд:

$$\sigma_{ii} = \sigma_{ii}^{(0)} + \alpha \sigma_{ii}^{(1)} + \dots + \alpha^n \sigma_{ii}^{(n)} + O(\alpha^{n+1}).$$

Разложение переменных v_1 и ε_{11} аналогично.

Будем считать, что поперечные возмущения малы, т. е. будем рассматривать квазипродольную волну. Поэтому значения величин σ_{12} и v_2 перед и за фронтом запишем в виде

$$\sigma_{12}^+ = \alpha \hat{\sigma}_{12}^+, \quad v_2^+ = \alpha \hat{v}_2^+, \quad \sigma_{12}^- = \alpha \hat{\sigma}_{12}^-, \quad v_2^- = \alpha \hat{v}_2^-,$$

где $\hat{\sigma}_{12}^+ = O(1)$, $\hat{v}_2^+ = O(1)$, $\hat{\sigma}_{12}^- = O(1)$, $\hat{v}_2^- = O(1)$. Разложим переменную σ_{12} в асимптотический ряд:

$$\sigma_{12} = \alpha \sigma_{12}^{(0)} + \alpha^2 \sigma_{12}^{(1)} + \dots + \alpha^n \sigma_{12}^{(n-1)} + O(\alpha^{n+1}). \quad (23)$$

Аналогично разложим и v_2 . Решение системы (20)–(22) должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty: \quad v_1^{(0)} = v_1^+, \quad v_2^{(0)} = \hat{v}_2^+, \quad \sigma_{ii}^{(0)} = \sigma_{ii}^+, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \hat{\sigma}_{12}^+; \\ x \rightarrow -\infty: \quad v_1^{(0)} = v_1^-, \quad v_2^{(0)} = \hat{v}_2^-, \quad \sigma_{ii}^{(0)} = \sigma_{ii}^-, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \hat{\sigma}_{12}^-. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом осуществляется сращивание решения для пограничного слоя с внешним решением. Введем переменную

$$z = \sigma_{11} - \sigma_{22} - Y_0 \sqrt{3} \quad (25)$$

и разложим в асимптотический ряд аналогично σ_{12} .

Сначала рассмотрим уравнения, связанные с продольными возмущениями. Из уравнений совместности и движения, подставляя в них разложения величин σ_{ii} , v_i , ε_{11} и приравнявая выражения при α в нулевой степени, получим

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial x_1} - D^2 \frac{\partial \varepsilon_{11}^{(0)}}{\partial x_1}. \quad (26)$$

Проинтегрировав уравнение (26) и учтя, что за фронтом среда находится в стационарном состоянии, находим

$$\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{11}^+ = D^2 (\varepsilon_{11}^{(0)} - \varepsilon_{11}^+). \quad (27)$$

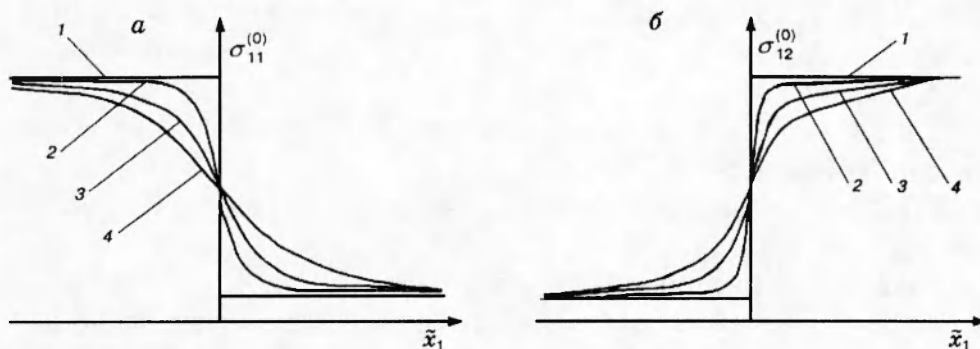


Рис. 5. Зависимости $\sigma_{11}^{(0)}(\bar{x}_1)$ (а) и $\sigma_{12}^{(0)}(\bar{x}_1)$ (б) для моментов времени $t = 0$ (1); $1,32 \cdot 10^{-2}$ (2); $1,98 \cdot 10^{-2}$ (3) и $2,64 \cdot 10^{-2}$ (4)

где $B = \sqrt{3}(\lambda + 2\mu - D^2)/Y_0(\mu - D^2)$. Константа C находится из граничных условий (24):

$$C = [\hat{\sigma}_{12}^+ \exp(-B\sigma_{11}^+) + \hat{\sigma}_{12}^- \exp(-B\sigma_{11}^-)]/2.$$

Используя замену переменных (19), окончательно запишем выражения для нулевого приближения в асимптотическом разложении решения, которое описывает структуру квазипродольной волны:

$$\sigma_{11}^{(0)}(x_1, t) = 2\sqrt{\pi}A^2(t - t_0)[\sigma_{11}^+ \operatorname{erfc} \xi + \sigma_{11}^- \operatorname{erfc} \xi], \quad (37)$$

где

$$\xi = (x_1 - Dt)/[2A\sqrt{\delta(t - t_0)}],$$

$$\sigma_{12}^{(0)}(x_1, t) = \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{12}^+ \exp(-B\sigma_{11}^+) + \hat{\sigma}_{12}^- \exp(-B\sigma_{11}^-)] \exp[B\sigma_{11}^{(0)}(x_1, t)]. \quad (38)$$

На рис. 5 показаны зависимости $\sigma_{11}^{(0)}(\bar{x}_1)$ и $\sigma_{12}^{(0)}(\bar{x}_1)$ в разные моменты времени. Видно, что со временем ширина фронта квазипродольной волны возрастает, причем это возрастание имеет место как для компонента σ_{11} , так и для компонента σ_{12} . Сравнение фронтов квазипродольных волн, полученных численно (см. рис. 3) и аналитически (см. рис. 5), свидетельствует об их качественном подобии.

Таким образом, в результате проведенных исследований по распространению импульсных возмущений в напряженных средах установлено, что наличие начального напряженного состояния приводит к значительному изменению волновой картины: при определенных условиях образуются квазипродольные и поперечные волны, отсутствующие в ненапряженной среде.

Работа частично поддержана Международным научным фондом Дж. Сороса (грант UAE200).

ЛИТЕРАТУРА

1. Torksoz M. N., Kehler H. H. Tectonic strain release by underground nuclear explosions and its effect on seismic discrimination // Geophysics. 1972. V. 32. P. 141-156.
2. Aki K., Tsai Y. B. Mechanism of Love wave excitation by explosive sources // J. Geophys. Res. 1972. V. 77, N 8. P. 1452-1468.

3. **Aki K., Resenberg R., De Fasio T., Tsai Y. B.** Near-field and far-field seismic evidences for triggering an earthquake by the Benham explosion // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1969. V. 59, N 6. P. 2197–2207.
4. **Майнчен Дж., Сак С.** Метод расчета «Тензор» // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 232–263.
5. **Куликов В. И.** Сейсмозрывные волны в напряженной среде // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987. № 5. С. 12–21.
6. **Белинский И. В., Даниленко В. А., Микуляк С. В.** Численное моделирование процессов распространения импульсных возмущений в предварительно напряженной упругопластической среде // Геофиз. журн. 1994. Т. 16, № 5. С. 45–48.
7. **Кукуджанов В. Н.** Распространение упругопластических волн в стержне с учетом скоростей деформации. М., 1967. (Тр. ВЦ АН СССР).
8. **Кукуджанов В. Н.** Распространение волн в упруговязкопластических средах // Проблемы нелинейной акустодиагностики. Таллин: Валгус, 1986. С. 51–59.
9. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

*Поступила в редакцию 26/III 1996 г.,
в окончательном варианте — 2/VII 1996 г.*
