

ТЕОРИЯ ЗАКАЛКИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРОЦЕССОВ В СТРУЯХ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

А. Б. Васильева, Ю. С. Саясов

(Москва)

В ряде задач газодинамики ионизированного газа естественным образом возникает вопрос о нахождении асимптотических величин относительных концентраций электронов, которые получаются при понижении температуры и давления газа вдоль линий тока. Примером такого рода задачи является задача о течении низкотемпературной плазмы в расширяющемся сопле. В этом случае скорости всех элементарных процессов по мере удаления от критического сечения сопла стремятся к нулю в связи с заметным падением температуры и давления в сопле. Отсюда следует, что относительная концентрация электронов должна стремиться к некоторой постоянной величине, которая называется закаленной концентрацией. Исследование таких процессов имеет большое значение в применении к соплам ракетных двигателей [1] и магнетогидродинамическим установкам.

§ 1. Постановка задачи. Во многих случаях уравнение, описывающее кинетику изменения относительной концентрации электронов x вдоль линии тока, можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = w(t) - \alpha(t)x^2 \quad \left(t = \int \frac{dz}{v}, \quad x = \frac{n_e}{n} \right) \quad (1.1)$$

Здесь t — время, отсчитываемое вдоль линии тока; z — координата, отсчитываемая вдоль линии тока; v — скорость газа; n — полное число частиц газа на $см^3$; n_e — концентрация электронов. Величины w и α расшифровываются в зависимости от того, какая совокупность элементарных процессов определяет электронную кинетику. Так, для совокупности элементарных процессов



будем соответственно иметь

$$w = k_1 x_A n x_M, \quad \alpha = k_1' n^2 x_M, \quad k_1 = a_1(T) \exp(-E_1/kT) \quad (1.3)$$

или

$$w = k_2 x_A x_B n, \quad \alpha = k_2' n, \quad k_2 = a_2(T) \exp(-E_2/kT) \quad (1.4)$$

Здесь k_i, k_i' ($i = 1, 2$) — константы скорости соответственно прямой и обратной реакций; x_A, x_B и x_M — относительные концентрации реагирующих частиц A, B и M ; T — температура.

В дальнейшем нижним индексом 0 будем отмечать значения всех величин, соответствующие началу отсчета времени $t = 0$, которое выберем так, чтобы оно отвечало критическому сечению сопла. Тогда x_0 можно считать совпадающим с равновесной концентрацией, т. е.

$$x_0 = \sqrt{w_0 / \alpha_0} \quad (1.5)$$

Если ввести концентрацию электронов, отнесенную к ее начальному значению $\xi = x/x_0$, а время t предполагать выраженным в единицах

характерного времени τ течения газа, то уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\lambda d\xi/dt = \varphi(t) \exp[-G(t)\varepsilon] - \psi(t)\xi^2 \quad (\lambda = \tau^*/\tau) \quad (1.6)$$

$$\tau^* = \frac{1}{V w_0 \alpha_0}, \quad \varphi = \frac{w}{w_0}, \quad \psi = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad G = \frac{T_0 - T}{T},$$

$$\varepsilon = \frac{kT_0}{E_i} (i = 1, 2), \quad \varphi(0) = \psi(0) = 1, \quad G(0) = 0.$$

Здесь τ^* — время установления равновесной концентрации.

Входящие в уравнение (1.6) функции φ , ψ , G предполагаем зависящими только от температуры T и будем считать, что температурная зависимость коэффициентов рекомбинации имеет вид $k_1' \sim T^{-\nu}$ ($\nu = 5/2$ — для одноатомного газа [2], $\nu = 7/2$ — для недипольных молекул [3], $\nu = 9/2$ — для газа дипольных молекул [4,5]); $k_2' \sim T^{-\nu}$, $1/2 < \nu < 3/2$. Коэффициенты k_i и k_i' будем предполагать связанными принципом детального равновесия.

Замечания. Приведенное выше основное уравнение (1.1) имеет место при выполнении следующих условий.

1. Влияние электронных процессов на газодинамику течения является пренебрежимо малым, так как в рассматриваемых условиях концентрации заряженных частиц невелики. Это позволяет считать все газодинамические параметры течения (распределение давлений, температуры и скоростей) заданными, т. е. строить кинетику электронных процессов на основе решений уравнений химической газодинамики, полученных в пренебрежении электронными процессами.

Следует, однако, отметить, что в специальном случае одноатомного газа и при весьма низких температурах газа, возникающих при его расширении, необходимо учитывать влияние эффектов повышения температуры, возникающих в результате рекомбинации электронов и положительных ионов [6]. В случае одноатомного газа конечная остаточная ионизация в газе возникает лишь благодаря указанному выше эффекту связи электронных и газодинамических процессов. В ряде практически важных случаев это обстоятельство не имеет существенного значения, так как на представляющем интерес участке течения газа (например до среза сопла) температура не успевает понизиться настолько, чтобы отмеченный эффект имел существенное значение. В дальнейшем не будем принимать его во внимание.

2. Плазму в низкотемпературных струях можно считать квазинейтральной, т. е. принимать, что в каждом элементарном объеме число отрицательно заряженных частиц равно числу положительно заряженных частиц. Это условие нарушается только при очень больших градиентах давления.

3. Диффузией электронов (а тем более, тяжелых частиц) в рассматриваемых условиях больших скоростей их газодинамического переноса можно пренебречь (отношение скоростей диффузионного и газодинамического потоков электронов равно примерно $D_e/vL \approx v_e l_e/vL \ll 1$, где D_e — коэффициент амбиполярной диффузии, l_e — длина пробега электронов, v_e — их скорость, L — характерный размер сопла). Это обстоятельство позволяет написать уравнения кинетики в виде дифференциальных уравнений типа (1.1), представляющих собой соотношение баланса скоростей газодинамического переноса и скоростей элементарных процессов с участием электронов для каждой линии тока.

4. Электронную температуру можно считать равной температуре тяжелых частиц. Так, например, в условиях сопел ЖРД время релаксации электронной температуры, связанное главным образом с колебательно-вращательным возбуждением молекул, весьма мало. Действительно, это время по порядку величины равно $\tau_e \approx 1/\sigma v_e n w$, где σ — сечение рассеяния электрона на w — вероятность передачи энергии (порядка kT) при одном столкновении электрона с молекулой, т. е. $w \approx 10^{-2}$. При $n \approx 10^{20} \text{ см}^{-3}$ имеем $\tau_e \approx 10^{-10} \text{ сек}$, т. е. τ_e обычно меньше других эффективных времен релаксации, фигурирующих в кинетическом уравнении (1.1). Поэтому в константах скорости элементарных процессов с участием электронов их температуру можно считать равной температуре тяжелых частиц.

Следует отметить, что в последнее время появились указания на то, что время релаксации электронной температуры на самом деле может быть значительно больше определяемого соотношением $\tau_e \approx 1/\sigma v_e n w$. Это связано с тем, что при рассеянии электронов молекулами могут возникать долго живущие квазистационарные вращательно-возбужденные состояния. Поэтому в некоторых случаях электронная температура даже в условиях сопел ЖРД может существенно отличаться от температуры тя-

железных частиц. Это обстоятельство не сказывается на последующем изложении, так как приводит только к некоторому переопределению входящих в уравнение (1.6) функций φ , ψ и G .

Исследованию процессов закалки, вписываемых уравнением (1.1), посвящено большое число работ, в которых используются, однако, только численные методы или методы, позволяющие получить лишь грубые оценки [1, 7, 8].

В противоположность этому, в настоящей работе дается последовательная аналитическая теория процессов закалки, описываемых уравнением (1.6), основанная на использовании единственного допущения $\varepsilon = kT_0/E_i \ll 1$ ($i = 1, 2$), которое обычно можно считать выполненным. Действительно, энергия ионизации E_i обычно составляет несколько эв, а T_0 в обычно используемых установках не превосходит нескольких тысяч градусов. Поэтому, как правило, $\varepsilon < 0.1$.

2. Математическое исследование уравнения (1.6). Перепишем уравнение (1.6) в виде

$$\lambda \frac{d\xi}{dt} = \varphi(t) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t g dt\right) - \psi(t) \xi^2 \quad (2.1)$$

введя производную $g(t)$ от функции $G(t)$. Будем рассматривать (2.1) при начальном условии

$$\xi(0) = \xi_0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1), вообще говоря, не интегрируется в элементарных функциях. Поэтому нужно воспользоваться асимптотическими методами, опираясь на наличие параметров λ и ε . Математически параметр ε будем считать бесконечно малым, а λ может быть как конечным, так и бесконечно малым, причем порядок его малости относительно ε может быть произвольным, т. е. ε/λ может либо стремиться к некоторому конечному пределу, либо к бесконечности, либо к нулю.

Задача заключается в построении асимптотики решения (2.1), (2.2) по ε и λ , а в особенности — в асимптотическом представлении предельного значения $\lim \xi(t, \varepsilon, \lambda) = \xi_\infty(\varepsilon, \lambda)$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. величины, закаленной концентрации.

Свойства решений (2.1), (2.2) и характер асимптотики существенно различны в зависимости от соотношений между параметрами ε и λ . Поэтому отдельно рассматриваются случаи, когда $\varepsilon \ll \lambda$ и $\varepsilon > \lambda$. В основном тексте будет дана математическая формулировка результатов в виде асимптотических формул. Некоторые моменты, связанные с доказательством этих формул, отнесены в дополнение. Там же перечислены условия на φ , ψ и G , при которых справедлива указанная асимптотика.

Первый случай. $\varepsilon \ll \lambda$, при этом $\varepsilon \rightarrow 0$, а λ может оставаться конечным или стремиться к нулю медленнее, чем ε , или быть с ε одного порядка малости. В этом случае для $\xi(t, \varepsilon, \lambda)$ имеет место следующее равномерное асимптотическое представление

$$\xi(t, \varepsilon, \lambda) = \lambda \left[-\lambda \frac{\psi(0) C(\kappa) I_0(s) + K_0(s)}{\varphi(0) C(\kappa) I_1(s) - K_1(s)} \exp \frac{g(0)t}{2\varepsilon} - \psi(0)t + \Psi(0, t) + O(\varepsilon^2) \right]$$

Здесь $I_j(s)$, $K_j(s)$ ($j = 0, 1$) — функции Бесселя мнимого аргумента,

$$s = 2\kappa \exp \frac{-g(0)t}{2\varepsilon}, \quad \kappa^2 = \frac{\psi(0)\varphi(0)}{g^2(0)} \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}, \quad \Psi(a, b) = \int_a^b \psi(t) dt \quad (2.4)$$

$$C(\kappa) = \frac{K_1(2\kappa) - \xi_0 \sqrt{\psi(0)/\varphi(0)} K_0(2\kappa)}{I_1(2\kappa) + \xi_0 \sqrt{\psi(0)/\varphi(0)} I_0(2\kappa)} \quad (2.5)$$

$O(\varepsilon^2)$ — обычное обозначение для величины, имеющей порядок малости ε^2 . Оценка остаточного члена $O(\varepsilon^2)$ носит равномерный характер относительно t на всем бесконечном промежутке $0 \leq t < \infty$.

Из (2.3) можно получить выражение для величины закаленной концентрации $\xi_{\infty}(\varepsilon, \lambda)$, воспользовавшись асимптотикой функций Бесселя при $s \rightarrow \infty$. Оно имеет вид (C_E — постоянная Эйлера)

$$\xi_{\infty}(\varepsilon, \lambda) = \lambda \left[\Psi(0, \infty) + \frac{2\psi(0)}{\varphi(0)} \varepsilon (C(\kappa) - C_E - \ln \kappa) + O(\varepsilon^2) \right]^{-1} \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь различные возможные соотношения между ε и λ .

а) Пусть $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon/\lambda \rightarrow 0$. В этом случае $\kappa \rightarrow 0$, аргумент функций Бесселя, входящих в (2.6), мал, и, пользуясь опять же асимптотикой этих функций при малых значениях аргумента, будем иметь после некоторых выкладок

$$\xi_{\infty} = \lambda \left[\Psi(0, \infty) + \frac{\lambda}{\xi_0} - \varepsilon \frac{\varphi(0)}{g(0)} \frac{1}{\xi_0^2} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\lambda}\right) + O(\varepsilon^2) \right]^{-1} \quad (2.7)$$

Если λ конечно, то отсюда

$$\frac{\lambda}{\lambda/\xi_0 + \Psi(0, \infty)} + \varepsilon \frac{\varphi(0)}{g(0)} \frac{\lambda/\xi_0^2}{(\lambda/\xi_0 + \Psi(0, \infty))^2} + O(\varepsilon^2) \quad (2.8)$$

а если λ мало, то

$$\xi_{\infty} = \frac{\lambda}{\Psi(0, \infty)} - \frac{1}{\Psi^2(0, \infty)} \left(\frac{\lambda^2}{\xi_0} - \varepsilon \lambda \frac{\varphi(0)}{g(0)} \frac{1}{\xi_0^2} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

в) Пусть $\varepsilon = \lambda \rightarrow 0$ (к этому случаю всегда можно свести случай, когда порядок стремления ε и λ к нулю один и тот же). Формула (2.6) в этом случае дает

$$\xi_{\infty} = \varepsilon \left\{ \frac{2\psi(0)}{g(0)} \varepsilon \left[C \left(\frac{\sqrt{\varphi(0)\psi(0)}}{g(0)} \right) - C_E - \ln \frac{\sqrt{\varphi(0)\psi(0)}}{g(0)} \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \quad (2.10)$$

Второй случай $\varepsilon > \lambda$. Математически этот случай будет описывать ся так: $\lambda/\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \ln(\varepsilon/\lambda) \sim 1$. Второе из этих соотношений означает что λ не может стремиться к нулю слишком быстро, т. е. $\lim \varepsilon \ln(\varepsilon/\lambda) = p$ при $\varepsilon \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$. Здесь p — любое (фиксированное) число. Будем считать, что $\varepsilon \ln(\varepsilon/\lambda) \rightarrow 1$ (так как случай $p \neq 1$ заменой переменных можно привести к случаю $p = 1$). Величина закаленной концентрации будет даваться формулой

$$\xi_{\infty} = \lambda \left[\Psi(t^\circ, \infty) - \frac{2\psi^\circ}{g^\circ} \varepsilon \left(C_E + \ln \frac{\sqrt{\varphi^\circ\psi^\circ}}{g^\circ} \right) + o(\varepsilon) \right] \quad (2.11)$$

где t° определяется равенством

$$\int_0^{t^\circ} g dt = 2\varepsilon \ln \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad (2.12)$$

Верхний индекс $^\circ$ означает, что функции g, φ, ψ берутся в точке $t = t^\circ$. Символ $o(\varepsilon)$ — обычное обозначение для величины, имеющей порядок малости более высокий, чем ε .

§ 3. Расчет закаленных концентраций. На основании полученных в § 2 общих формул легко провести расчеты закаленных концентраций при различных зависимостях газодинамических величин от координаты z . Приведем здесь расчет для течения газа с постоянным показателем адiabаты γ . При течении продуктов сгорания в соплах ЖРД это допущение,

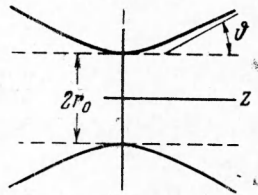
строго говоря, не имеет места, так как состав газа меняется вдоль сопла. Тем не менее, его использование не приводит к существенным ошибкам, если в качестве γ принять величину, относящуюся к критическому сечению сопла, поскольку процесс установления закаленной концентрации электронов происходит обычно на малых расстояниях от критического сечения сопла, на которых γ не успевает изменяться существенным образом.

При этих предположениях связь между газодинамическими параметрами и временем t дается известными формулами [9]

$$\frac{T_0}{T} = \Phi(M), \quad \frac{v}{v_0} = M\Phi^{-1/2}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \Phi^{-1/(\gamma-1)}, \quad \Phi(M) = \frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{\gamma + 1}$$

где ρ — плотность газа.

В качестве аргумента взято число Маха M , которое связано с координатой z , отсчитываемой вдоль оси сопла (а следовательно, и с t) соотношением



Фиг. 1

$$\frac{\rho v}{\rho_0 v_0} = M\Phi^{-\nu} = \frac{S(z_0)}{S(z)} = \frac{S_0}{S}, \quad \nu = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}$$

где S — сечение сопла.

Конкретные численные расчеты производились, когда форма сопла задана соотношением (фиг. 1)

$$z_0 = 0, \quad S = S_0 + k^2 z^2, \quad S = \pi r^2, \quad S_0 = \pi r_0^2 \\ \vartheta = \arctg(k/\sqrt{\pi})$$

и, следовательно, в приведенных выше формулах нужно положить

$$S/S_0 = 1 + \zeta^2, \quad \zeta = z/L, \quad L = r_0/\operatorname{tg} \vartheta, \quad \tau = L/v_0$$

При проведении численных расчетов предполагалось также, что кинетика элементарного процесса отвечает первой схеме (1.2), в которой частица A — атом щелочного металла. В этом случае соотношение между k_1 и k'_1 на основании принципа детального равновесия можно записать в виде

$$k'_1/k_1 = (2\pi)^{3/2} (\hbar^2/m_e kT)^{3/2} \exp(E_1/kT)$$

Иначе говоря, функции φ и ψ имеют в этом случае вид

$$\varphi = \Phi^{\nu-3/2-1/(\gamma-1)}, \quad \psi = \Phi^{-2/(\gamma-1)+\nu}$$

Переходя в формулах § 2 к независимому переменному M , нужно положить

$$dt = \frac{1}{M} \Phi^{1/2} \frac{d\tau}{dM} dM,$$

$$g(M) = \frac{dG}{dt} = \frac{d}{dM} \Phi(M) = \frac{2(\gamma-1)M^4}{M^2-1} \Phi^{-1/(\gamma-1)} (M^{-1}\Phi^\nu - 1)^{1/2} \quad (M \neq 1)$$

$$g(1) = \frac{(\gamma-1)\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma+1}}, \quad \Psi(t^0, \infty) = \int_{t^0}^{\infty} \psi(t) dt = \int_{M^0}^{\infty} f(M) dM = F(M^0, \infty)$$

$$f(M) = \frac{M^2-1}{(\gamma+1)M^3} \frac{\Phi^{-1/(\gamma-1)+\nu}}{(M^{-1}\Phi^\nu - 1)^{1/2}} \quad (M \neq 1), \quad f(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma+1}}$$

Начальные условия имеют вид $\xi_0 = \xi(M=1) = 1$.

Для удобства счета вводятся величины, обозначаемые штрихом и связанные с прежними соотношениями

$$\varphi' = \frac{\Phi}{\sqrt{\vartheta}}, \quad \psi' = \frac{\Psi}{\sqrt{\vartheta}}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{\vartheta}}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{g(1)}, \quad g' = \frac{g}{g(1)}$$

$$\vartheta = \exp C_E = 1.781 \dots$$

Тогда, переписывая в новых переменных для $\lambda' \geq \varepsilon'$ формулу (2.6), а для $\varepsilon' > \lambda'$ формулу (2.11), приходим к следующим расчетным формулам:

$$y_\infty = \left\{ F(1, \infty) + 2\varepsilon' \left[Q \left(\frac{2\varepsilon'}{\lambda'} \right) - \ln \frac{\varepsilon'}{\lambda'} \right] \right\}^{-1} \quad (\varepsilon' \leq \lambda') \quad \left(y = \frac{\xi}{\lambda} = x\alpha_0\tau \right) \quad (3.1)$$

$$y_\infty = \left\{ F(\bar{M}, \infty) - 2\varepsilon' \beta a^{3/4-1/2(\gamma-1)} \ln \beta \right\}^{-1} \quad (\varepsilon' > \lambda')$$

$$\beta = 2\varepsilon' \ln \frac{\varepsilon'}{\lambda'} a^{\nu-3/4-1/2(\gamma-1)} b^{-2} (a^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} b^{-1/2} - 1)^{-1/2}$$

$$a = 1 + 2\varepsilon' \ln \frac{\varepsilon'}{\lambda'}, \quad b = 1 + 2\varepsilon' \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \ln \frac{\varepsilon'}{\lambda'}, \quad \bar{M} = b^{1/2}$$

$$Q(z) = \frac{K_1(z) - K_0(z)}{I_1(z) + I_0(z)}$$

По формуле (2.14) было просчитано y_∞ как функция λ для следующих четырех комбинаций параметров ν и γ :

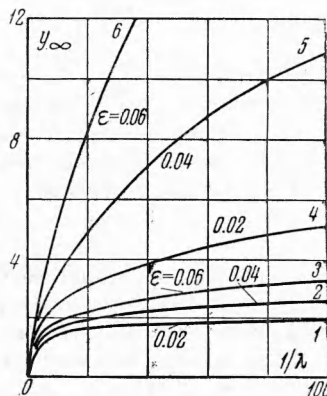
- (1) $\nu = 7/2, \gamma = 9/7$; (2) $\nu = 9/2, \gamma = 1.25$
 (3) $\nu = 9/2, \gamma = 1.20$; (4) $\nu = 9/2, \gamma = 1.15$

При этом для каждой комбинации вычисления велись для значений $\varepsilon = 0.02, 0.04, 0.06$. Комбинация (1) соответствует ионизации в среде газа недипольных двухатомных молекул типа N_2 в предположении, что возбуждены колебательные степени свободы; (2), (3), (4) — ионизации в среде газа дипольных молекул типа H_2O . Вычисленные значения приведены в таблице и на фиг. 2. В целях проверки асимптотических формул (3.1) на машине «Стрела» было точно проинтегрировано уравнение (2.1) для случая $\nu = 7/2, \gamma = 9/7, \varepsilon = 0.04$ и для значений $\lambda = 10, 1, 0.2, 0.1, 0.02, 0.01$. Полученные таким образом значения y_∞ находятся в хорошем согласии со значениями y_∞ , даваемыми формулой (3.1). За проведение вычислений авторы благодарят Э. К. Гутковича, Е. В. Чеботаева и В. М. Мартынову.

На основании фиг. 2 могут быть проведены конкретные расчеты закаленных концентраций для всех практически интересных случаев. Приведем в качестве примера расчет закаленных концентраций в продуктах сгорания ЖРД. В этом случае основным продуктом сгорания будет H_2O , а основным ионизационным процессом, согласно [4], можно считать первую реакцию (1.2), где M — молекула H_2O . Используя выражение для коэффициента рекомбинации k_1' , данное в [4,5], будем иметь

$$\alpha = \alpha_0 \Phi^{3/2-2/(\gamma-1)}, \quad \alpha_0 = k_1' n_0^2 x_M, \quad k_1' = 6.3 \cdot 10^{-12} T^{-1/2}$$

Принимаем, что концентрация воды не меняется существенно вдоль сопла. С другой стороны, величина $1/\lambda = \alpha_0 \tau x_0 = \alpha_0 \tau \sqrt{x_A} / k_1' n_0$. Если, в частности, принять $T_0 = 2500^\circ K, n_0 = 10^{20} \text{ см}^{-3}, \tau = 10^{-3} \text{ сек}, x_M = 0.5$ и считать, что первичным процессом является ионизация натрия, т. е. под частицей A следует подразумевать атом Na , для которого $E_1 = 5.14 \text{ эв}$, то $\varepsilon = 0.04, \alpha_0 \tau = 1.1 \cdot 10^{10}, 1/\lambda = 2.3 \cdot 10^5 \sqrt{x_A}$. Согласно фиг. 3, получаем для этого примера при $x_A = 10^{-3}, x_0 = 2 \cdot 10^{-9}$ следующие величины: $1/\lambda = 23, x_\infty \alpha_0 \tau = 3$ и окончательно $x_\infty = 2.7 \cdot 10^{-10}$.



Фиг. 2. Графики y_∞ как функции $1/\lambda$ для значений $\nu = 9/2, \gamma = 1.25$ (кривые 1, 2, 3) и $\nu = 9/2, \gamma = 1.15$ (кривые 4, 5, 6)

Значения y_∞ как функции $1/\lambda$ для различных ν , γ и ε

$1/\lambda$		0.1	1	5	10	50	100
$\nu = 3.5$	$\varepsilon = 0.02$	0.07	0.53	1.27	1.65	2.04	2.24
	$\varepsilon = 0.04$	0.07	0.56	1.57	1.81	2.62	3.01
$\gamma = 9/7$	$\varepsilon = 0.06$	0.07	0.59	1.65	2.04	3.28	3.88
	$\varepsilon = 0.02$	0.07	0.51	1.17	1.44	1.79	1.96
$\nu = 4.5$	$\varepsilon = 0.04$	0.07	0.54	1.43	1.62	2.29	2.60
	$\varepsilon = 0.06$	0.07	0.58	1.48	1.83	2.83	3.30
$\gamma = 1.25$	$\varepsilon = 0.02$	0.07	0.57	1.52	1.95	2.71	3.11
	$\varepsilon = 0.04$	0.07	0.61	1.87	2.34	4.03	4.94
$\nu = 4.5$	$\varepsilon = 0.06$	0.07	0.68	2.03	2.93	5.78	7.37
	$\varepsilon = 0.02$	0.07	0.61	2.02	2.52	4.15	5.11
$\gamma = 1.2$	$\varepsilon = 0.04$	0.07	0.69	2.39	3.50	7.96	10.85
	$\varepsilon = 0.06$	0.07	0.82	3.15	5.32	14.78	21.55

Отметим также, что на основании общих формул § 2 можно сделать ряд важных качественных заключений о поведении закаленных концентраций в зависимости от различных параметров. Заслуживает внимания, в частности, тот факт, что зависимость закаленной концентрации x_∞ от концентрации легко ионизируемой примеси x_A носит (при прочих заданных условиях) совершенно различный характер в области малых x_A , определяемых неравенством

$$1/\lambda = \alpha_0 \tau \sqrt{x_A/k_1 n_0} < 1/\varepsilon$$

и достаточно больших x_A , определяемых неравенством $1/\lambda > 1/\varepsilon$.

В первом случае закаленная концентрация x_∞ существенно зависит от x_A (см., например, (2.8)). С другой стороны, как непосредственно ясно из фиг. 2, при $1/\lambda > 1/\varepsilon$ эта зависимость носит очень слабый характер.

Иначе говоря, условие $1/\lambda = 1/\varepsilon$, т. е.

$$E_1/kT_0 = \sqrt{w \alpha_0 \tau},$$

определяет некоторую критическую величину x_A^* , начиная с которой закаленная концентрация не меняется существенным образом. Для рассмотренного выше численного примера эта критическая величина составляет $x_A^* \approx 10^{-8}$.

В заключение остановимся на сопоставлении выведенных в этой работе точных формул (2.6), (2.11) для закаленных концентраций с обычно используемым приближенным методом (см., например [6], стр. 447) определения x_∞ . Согласно этому методу предполагается, что в области $0 \leq t \leq t_1$ концентрация x , определяемая уравнением (1.1), изменяется квазистационарным образом, т. е. $x = x_{eq} = \sqrt{w/\alpha}$, а в области $t \geq t_1$ она получается интегрированием уравнения (1.1), в котором принимается $w = 0$, т. е., согласно этой оценке,

$$x_\infty = x_{eq}(t_1) / (1 + x_{eq}(t_1) A(t_1, \infty)), \quad A(t_1, \infty) = \int_{t_1}^{\infty} \alpha dt$$

Момент t_1 определяется из условия, что отклонения δx концентрации от квазистационарной, даваемой формулой $\delta x = -(1/2\alpha) d \ln x_{eq} / dt$, примерно равно x_{eq} .

Так как обычно закаленная концентрация x_∞ будет заметно меньше $x_{eq}(t_1)$, т. е. $x_{eq}(t_1) A(t_1, \infty) \gg 1$ и, следовательно, $x_\infty \approx 1/A(t_1, \infty)$, а с другой стороны, введенная здесь величина t_1 примерно совпадает, как легко показать, с τt^0 , где t^0 определяется (2.12), то отсюда вытекает, что формула (2.11), если пренебречь в ней членом, пропорциональным ε , дает результат, совпадающий по порядку величины с получаемым на основании обычно используемой оценки, которая давалась в работах [1, 6, 8] и, которая, таким образом, справедлива при $\lambda < \varepsilon$. Если, однако, $\varepsilon < \lambda$, то, как видно из формулы (2.6), выражение для величины закаленной концентрации сильно отличается от получаемой вышеуказанным приближенным методом и в этом случае его использование совершенно не оправдано.

§ 4. Дополнение. Укажем основные моменты доказательства асимптотических формул (2.3) и (2.11).

Прежде всего, перечислим основные допущения относительно входящих в уравнение (2.1) величин, при которых развивается математическая теория. Эти допущения в достаточной мере естественны, с точки зрения физики.

1) $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $g(t)$ положительны и непрерывно дифференцируемы на $0 \leq t < \infty$; 2) $\psi(t)$ равномерно ограничена вместе с производной и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ как некоторая степень $1/t^\alpha$ ($\alpha > 1$) (записываем: $\psi(t) \sim 1/t^\alpha$), так что существует

$$\Psi(0, \infty) = \int_0^\infty \psi(t) dt$$

Заметим, что формула (2.3) остается справедливой и при $\alpha \leq 1$ (например, в случае ионизации в среде одноатомного газа, когда $\beta = 5/2$, $\gamma = 5/3$). Величина закаленной концентрации в этом случае равна нулю, так как $\Psi(0, \infty) = \infty$ (см. замечание 1, § 1); 3) $\varphi(t) \sim t^p$ ($p \geq 0$), $\varphi'(t) \sim t^{p-1}$ при $t \rightarrow \infty$. 4) при $t \rightarrow \infty$ $g(t) \sim t^{-q}$ ($1 \leq q < 1$).

Первый случай. $\varepsilon \leq \lambda$. Перейдем в (2.1) к переменному $V = \lambda/\xi$, уравнение для которого имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\varphi(t)}{\lambda^2} V^2 \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t g dt\right) + \psi(t), \quad V(0) = \frac{\lambda}{\xi_0} \quad (4.1)$$

Сопоставим с этим уравнением уравнение, получающееся из него, если в φ , ψ и g положить $t = 0$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\varphi(0)}{\lambda^2} U^2 \exp\left(-\frac{g(0)t}{\varepsilon}\right) + \psi(0), \quad U(0) = \frac{\lambda}{\xi_0} \quad (4.2)$$

Теорема 1: Для V имеет место равномерное на $0 \leq t < \infty$ асимптотическое представление

$$V(t) = [U(t) - \psi(0)t + \Psi(0, t)] + \delta, \quad \Psi(0, t) = \int_0^t \psi(t) dt \quad (4.3)$$

где $|\delta| < C\varepsilon^2$, C — некоторая константа, не зависящая от λ и ε для достаточно малых λ, ε .

Доказательство этой теоремы состоит в написании дифференциального уравнения для разности $\Delta = V - (U - \psi(0)t + \Psi(0, t))$, последующего перехода к интегральному уравнению и получению из него неравенства для Δ так называемым методом априорной оценки. Не имея возможности приводить здесь этого доказательства, поясним лишь вкратце самую идею приближенной замены V выражением $U - \psi(0)t + \Psi(0, t)$. Интуитивно ясно, что величины $\alpha = V - \Psi(0, t)$ и $\beta = U - \psi(0)t$ должны быть близкими. Действительно,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\varphi(t)}{\lambda^2} V^2 \exp\left(-\int_0^t \frac{g dt}{\varepsilon}\right), \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\varphi(0)}{\lambda^2} U \exp\left(-\frac{g(0)t}{\varepsilon}\right)$$

Но вследствие малости ε (сильного затухания экспоненты) в предэкспоненциальном множителе и в самом показателе величины можно заменить, не делая существенной ошибки, их начальными значениями. Тогда правые части уравнений для α и β будут иметь соответственно вид

$$-\frac{\varphi(0)}{\lambda^2} V^2(0) \exp\left(-\frac{g(0)t}{\varepsilon}\right), \quad -\frac{\varphi(0)}{\lambda^2} U^2(0) \exp\left(-\frac{g(0)t}{\varepsilon}\right)$$

а так как $V(0) = U(0) = \lambda/\xi_0$, то $da/dt \approx d\beta/dt$, т. е. $\alpha \approx \beta$, что собственно и выражено в формуле (4.3).

Приближенное представление (4.3) V через U рационально потому, что уравнение (4.2) интегрируется в функциях Бесселя мнимого аргумента, а именно, U имеет вид

$$U = -\lambda \sqrt{\frac{\varphi(0)}{\varphi(0)} \frac{CI_0(s) + K_0(s)}{CI_1(s) - K_1(s)}} \exp \frac{g(0)}{2\varepsilon} t \quad (4.4)$$

где s и C даются формулами (2.4) и (2.5). Подставляя (4.4) в (4.3) и учитывая, что $\xi = \lambda/V$, приходим к равномерному асимптотическому представлению (2.3) для $\xi(t, \varepsilon, \lambda)$

Второй случай. $\lambda < \varepsilon$, $\varepsilon \ln(\varepsilon/\lambda) \sim 1$. В этом случае можно воспользоваться следующим приемом. Начиная с момента $t = t^0$, где t^0 определено (2.12), введем новую функцию $\eta = (\varepsilon/\lambda)\xi$. Тогда уравнение (2.1) запишется в виде

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = \varphi(t) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t^0}^t g dt\right) - \psi(t) \eta^2 \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) по существу будет уравнением уже рассмотренного типа $\lambda = \varepsilon$, если только в качестве начальной точки принять $t = t^0$. К уравнению (4.5) поэтому можно применить все предыдущие рассуждения, т. е. использовать тот факт, что при

$t \geq t^0$ в выражении $\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{t^0}^t g dt\right)$ основную роль играют моменты времени, близкие к t^0 , и, следовательно, решение можно выразить через решение вспомогательного уравнения, получающегося из (4.5), если принять в нем

$$\varphi(t) = \varphi(t^0) = \varphi^0, \quad \psi(t) = \psi(t^0) = \psi^0, \quad \int_{t^0}^t g dt = g(t^0)(t - t^0) = g^0(t - t^0)$$

В рассматриваемом случае возникает, однако, вопрос о формулировке видоизмененного начального условия $\eta(t^0) = \eta_0$ для уравнения (4.5). Не приводя его вывода, укажем окончательный результат.

$$\eta_0 = \left(\frac{\varphi^0}{\psi^0}\right)^{1/2} \frac{K_1(2\sqrt{\varphi^0\psi^0/g^0})}{K_0(2\sqrt{\varphi^0\psi^0/g^0})}$$

Воспроизводя при таком начальном условии все рассуждения, приводящие к формуле (4.3), и учитывая, что $\lambda = \varepsilon$, получим для ξ_∞ формулу (2.11).

Поступила 10 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Eshenroeder A. Q., Ionization Nonequilibrium in Expanding Flows. A. R. S. Journal, 1962, т. 32, № 1.
2. П и т а е в с к и й Л. П. Рекомбинация электронов в одноатомном газе, Ж. эксперим. и теор. физики, 1964, т. 42, № 5.
3. Д а л и д ч и к Ф. И., С а я с о в Ю. С. Рекомбинация электронов в молекулярных газах. Ж. эксперим. и теор. физ., 1965, т. 49, № 7.
4. H a y h u r s t A. N., S u g d e n T. M. The Ionization Processes Associated with Metallic Additives in Flame Gases, Тр. ЮПАК, 1965.
5. Д а л и д ч и к Ф. И., С а я с о в Ю. С. О рекомбинации электронов в газе дипольных молекул, Ж. эксперим. и теор. физ., 1967, т. 52, № 7.
6. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Изд. «Наука», 1966.
7. В г а у К. N. Atomic Recombination in a Hypersonic Wind. Tunnel Nozzle. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, No. 1.
8. С а я с о в Ю. С., Теория закалки ионизационных процессов в расширяющихся газовых струях, Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 4.
9. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М., Механика сплошных сред. Физматгиз, 1953.