

2. **Бабенко К. И.** О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // *Мат. сб.* — 1973. — Т. 91(133), № 1(5).
3. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
4. **Пухначев В. В.** Стоксово приближение в задаче обтекания самодвижущегося тела // Краевые задачи математической физики и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1989.
5. **Сенницкий В. Л.** Пример обтекания самодвижущегося тела осесимметричным потоком жидкости // *ПМТФ.* — 1984. — № 4.
6. **Пухначев В. В.** О некоторых модификациях задачи обтекания // *Проблемы математики и механики.* — Новосибирск: Наука, 1983.
7. **Clark D. C.** The vorticity at infinity for solutions of the stationary Navier — Stokes equations in exterior domains // *Indiana Univ. Math. J.* — 1971. — V. 20, N 7.
8. **Бабенко К. И., Васильев М. М.** Асимптотическое поведение решения задачи обтекания конечного тела вязкой жидкостью. — М., 1971. — (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 84).
9. **Fischer T. M., Hsiao G. C., Wendland W. L.** Singular perturbations for the exterior three-dimensional slow viscous flow problem // *J. Math. Anal. and Appl.* — 1985. — V. 110, N 2.
10. **Finn R.** An energy theorem for viscous fluid motions // *Arch. Rat. Mech. and Anal.* — 1960. — V. 6, N 5.
11. **Биркгоф Г., Сарантонелло Э.** Струи, следы и каверны. — М.: Мир, 1964.

Поступила 28/VIII 1988 г.

УДК 532.516 : 532.574.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Б. Л. Рождественский, И. Н. Симакин, М. И. Стойнов

(Москва)

С помощью численного интегрирования уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости проводилось моделирование турбулентного течения Куэтта в плоском канале при переходных числах Рейнольдса. Коэффициент трения, профиль средней скорости, напряжение Рейнольдса и некоторые другие средние характеристики рассчитанных трехмерных вторичных статистически-стационарных течений хорошо согласуются с соответствующими характеристиками реальных турбулентных течений. Установлена неустойчивость ламинарного течения Куэтта по отношению к трехмерным возмущениям конечной амплитуды.

1. Рассматривается безнапорное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском канале, стенки которого движутся с постоянной скоростью в противоположных направлениях (плоское течение Куэтта). Исследование устойчивости ламинарного течения Куэтта относительно бесконечно малых возмущений выполнено с исчерпывающей полнотой (см. обзор [1]). В частности, строго доказана его устойчивость по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых числах Рейнольдса [2]. С другой стороны, экспериментально установлено, что при $R \geq 10^3$ * могут происходить разрушение ламинарного режима течения и переход к турбулентности [3, 4]. Этот экспериментальный факт связывают с неустойчивостью рассматриваемого течения относительно возмущений конечной амплитуды.

При использовании методов нелинейной теории гидродинамической устойчивости для исследования устойчивости течения Куэтта возникают серьезные трудности, связанные с отсутствием нейтральной кривой. В большинстве работ рассматривались двумерные уравнения Навье — Стокса [5—10]. Полученные в [5—8] критические числа Рейнольдса отличаются друг от друга на порядок и более. Результаты [9, 10] свидетельствуют об устойчивости течения Куэтта к двумерным конечным возмущениям.

Моделированию турбулентного течения Куэтта на основе численного интегрирования уравнений Навье — Стокса посвящены работы [11—14].

* Здесь и далее $R = U_w h/\nu$, U_w — скорость стенок, h — полуширина канала, ν — коэффициент кинематической вязкости.

В [11] при $R = 5000$ получено затухание двумерных возмущений конечной амплитуды. Все расчеты трехмерных течений выполнены на очень малых отрезках времени. Вычисления заканчиваются на этапе резкого увеличения амплитуды возмущений, при этом профили средней скорости незначительно отличаются от ламинарного. Ясно, что говорить о каком-либо установлении вторичного режима здесь нельзя. В [12] изучалось поведение во времени возмущения, представляющего собой суперпозицию конечно-амплитудного двумерного и малого трехмерного возмущений. Оказалось, что для $R \geq 10^3$ трехмерные возмущения экспоненциально возрастают, в то время как двумерные — затухают. Расчеты по-прежнему проводились на малых отрезках времени. В [13] моделировалось трехмерное течение при $R = 1450$. В расчетах энергия пульсаций колеблется с удивительно большой амплитудой, а профиль скорости имеет аномальную форму (изменение знака скорости происходит в трех точках). По-видимому, это связано с тем, что в представлении приближенного решения использовалось недостаточное число базисных функций. Отметим также работу [14], где проводилось моделирование турбулентного течения Куэтта при $R = 750-1750$. При всех рассмотренных числах Рейнольдса получены трехмерные вторичные течения. Рассчитанный профиль скорости, интенсивности среднеквадратичных пульсаций скорости качественно согласуются с экспериментом. Вместе с тем для ряда важных характеристик наблюдается существенное расхождение с экспериментальными данными: распределение напряжения Рейнольдса в центральной части канала неоднородно, профиль средней скорости не согласуется с логарифмическим профилем, значение коэффициента трения существенно меньше экспериментального.

2. В настоящей работе проводится исследование устойчивости течения Куэтта относительно конечных возмущений, а также моделирование вторичных статистически-стационарных течений, которые сравниваются с турбулентными течениями, наблюдаемыми в экспериментах. Рассматриваются дву- и трехмерные возмущения, периодические по однородным координатам x, y с периодами $X = 2\pi/\alpha_0, Y = 2\pi/\beta_0$. Численное решение уравнений Навье — Стокса, записанных в форме Громеки — Лэмба, проводилось с помощью схем 1, 2 (см. соответственно [15, 16]). В этих схемах по переменным x, y применяется метод Галеркина, а в качестве базисных функций — тригонометрические полиномы. В представлении решения по нормальной переменной z для схемы 1 используются полиномы Чебышева 1-го рода, а для схемы 2 — полиномы Якоби $P_q^{(1,1)}(z)$.

Интегрирование по времени в схеме 1 выполняется с помощью метода дробных шагов. На первом и третьем дробных шагах учитывается действие члена $[\mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{v}]$ со вторым порядком точности по t . При этом для аппроксимации уравнений по z применяется метод коллокации с узлами $z_l = \cos(\pi l/L), l = 0, 1, \dots, L$. На втором дробном шаге учитывается действие градиента полного напора $\nabla \Pi$ и диссипативного члена $\nu \Delta \mathbf{v}$, используются уравнение несжимаемости и условие прилипания жидкости на стенках канала. На этом шаге для аппроксимации по времени применяется неявная схема, а по z — спектральный метод Петрова (подробнее см. [15]).

Схема 2 одношаговая, для аппроксимации исходных уравнений по времени используется неявная схема типа Кранка — Николсона второго порядка точности, а по z — метод коллокации с узлами $z_l: z_0 = -1, z_1, \dots, z_{L-1}, z_L = 1$, где $z_l, l = 1, \dots, L-1$ — нули полинома Якоби $P_{L-1}^{(1,1)}(z)$. Решение дискретной задачи определяется с помощью итераций. Отметим, что для этой схемы при условии сходимости итераций точно выполняются дискретные аналоги законам сохранения импульса и энергии. Это позволяет проводить расчеты турбулентных течений в плоском канале с достаточно большим шагом по времени [16].

Моделирование дву- и трехмерных безнапорных течений в плоском канале проводилось при переходных числах Рейнольдса. В качестве на-

Таблица 1

Номер расчета	R	α_0	$E'(0) \cdot 10^2$	T	$E'(T) \cdot 10^5$	Схема	τ	M	P
1	5 000	1,25	0,098	100	0,34	2(3)	0,25	9	31
2	5 000	1,25	0,88	150	3,4	2(3)	0,25	9	31
3	5 000	1,25	0,39	150	0,59	2(3)	0,25	9	31
4	5 000	1,25	9,8	600	0,3	2(2)	0,1	9	31
5	5 000	2,0	0,85	70	0,81	2(3)	0,25	9	31
6	10 000	1,25	0,25	250	1,2	2(3)	0,25	9	31
7	10 000	1,25	6,3	500	0,31	2(3)	0,25	9	31
8	10 000	2,0	0,34	250	0,016	2(3)	0,25	9	31
9	10 000	2,0	2,6	360	1,6	2(3)	0,1	9	31
10	5 000	0,5	0,4	250	2,1	1	0,1	33	33
11	5 000	0,3	0,22	250	1,2	1	0,1	33	33
12	5 000	0,3	0,8	350	0,81	1	0,1	33	33
13	5 000	0,3	3,0	500	3,2	1	0,025	33	33
14	5 000	0,15	0,48	250	5,0	1	0,1	33	33
15	10 000	0,3	0,42	250	4,6	1	0,1	33	33
16	10 000	0,15	1,9	600	12,9	1	0,1	33	33

чального условия задавалось ламинарное течение, на которое накладывались различные конечно-амплитудные возмущения. С помощью схемы 1 или 2 рассчитывалась эволюция течения до выхода его на установившийся режим, т. е. на вторичное или ламинарное течение. Выход на вторичный режим контролировался по стабилизации основных интегральных характеристик течения (коэффициента трения, энергии пульсаций и др.). Заметим, что существование вторичного течения означает неустойчивость ламинарного течения относительно конечных возмущений.

3. На основе изложенного выше подхода был проведен систематический поиск безнапорных двумерных вторичных течений в плоском канале при $R = 5000$ и $10\,000$. Выполнены серии расчетов при различных интервалах периодичности течения и начальных условиях. Характеристики двумерных расчетов приведены в табл. 1. В первой серии расчетов (см. 1—9) моделировалась эволюция конечных возмущений с интервалами периодичности $X \leq 2\pi$ ($\alpha_0 \geq 1$ — коротковолновые возмущения). В качестве начального возмущения задавались наименее затухающие собственные функции краевой задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда. Начальная амплитуда возмущений скорости варьировалась от 5 до 35 % от скорости стенки (в табл. 1 приведены значения энергии возмущений E' при $t = 0$). Во всех этих расчетах получено полное затухание возмущений: в финальной части вычислений пульсации затухают по линейной теории, а течение стремится к ламинарному течению Куэтта. В табл. 1 приведены значения энергии возмущений E' , найденные в конце каждого расчета, т. е. при времени $t = T$. Там же указывается, по каким схемам проводились расчеты, приводятся шаг по времени τ и количество базисных функций, используемых в представлении приближенного решения по переменным $x - M$ и $z - P$. Для схемы 2 в скобках дано число итераций.

В следующей серии расчетов (см. 10—16) моделировалась эволюция длинноволновых возмущений ($\alpha_0 \leq 0,5$) при различных начальных амплитудах. В качестве начального условия задавалось несколько фурье-гармоник в представлении приближенного решения (в расчетах 10—13, 15 четыре гармоники, а в 14, 16 восемь). В этих расчетах также было получено затухание возмущений. Однако следует отметить, что по сравнению с коротковолновым случаем при аналогичной или меньшей амплитуде начального возмущения затухание пульсаций до уровня, когда нелинейное взаимодействие возмущений практически себя не проявляет, происходило на больших интервалах времени.

Итак, в проведенных расчетах при различных интервалах периодичности течения и амплитудах начального возмущения не удалось получить вторичный (незатухающий) двумерный режим течения. Ясно, что выпол-

Таблица 2

Номер расчета	R	α_0	β_0	$E'(0) \cdot 10^2$	$T \cdot 10^{-2}$	$\bar{E} \cdot 10$	$\bar{E}' \cdot 10^2$	$\bar{C}_f \cdot 10^3$	Схема	τ
1	5000	1,25	2	0,011	3	1,58	1,7	4,5	2(4)	0,1
2 *	5000	1,25	2	1,6	54	1,54	2,5	4,8	1	0,05
3 *	4000	1,25	2	2,5	20	1,73	2,3	5,4	1	0,05
4 *	2900	1,25	2	2,5	34	1,48	2,7	7,7	1	0,05
5 *	1450	1,25	2	2,6	16	1,45	2,6	9,5	1	0,05
6 *	1000	1,25	2	2,6	11	1,70	3,0	9,7	1	0,05
7 *	750	1,25	2	3,1	12	Выход на ламинарный режим			1	0,05
8	5000	0,5	2	2,6	12	1,79	2,7	4,7	1	0,05
9	5000	1,25	1	2,6	40	1,55	2,0	3,0	1	0,05
10	5000	3,125	5	2,6	5	0,93	1,2	4,2	2(3)	0,15
11	5000	5,0	8	2,6	6	0,92	1,2	3,6	2(3)	0,075
12	2900	1,25	3	2,8	16	1,40	2,5	7,1	1	0,05
13	2900	2,0	2	2,8	15	1,25	2,4	6,1	1	0,05

* В расчетах, отмеченных звездочкой, в качестве начального условия задавалось поле скорости течения, получаемое в конце предыдущего расчета.

енное в данной работе исследование не является исчерпывающим: рассматривались только умеренные числа Рейнольдса, интервал периодичности течения варьировался в сравнительно небольшой области, в качестве начального условия задавались лишь собственные функции линейной задачи, и, наконец, рассматривался узкий класс возмущений, периодически зависящих от продольной координаты. Тем не менее результаты наших расчетов, а также результаты [7, 9] свидетельствуют о том, что лоское течение Куэтта, по крайней мере, в переходной области устойчиво относительно двумерных периодических возмущений конечной амплитуды. По-видимому, это справедливо и для произвольных двумерных возмущений.

4. Расчеты трехмерных течений проводились при $R = 750-5000$; основном исследовались коротковолновые возмущения (см. табл. 2). Во всех расчетах в представлении приближенного решения использовались 9×9 фурье-гармоник по переменным x и y и 33 полинома по z (для схемы 1 полиномы Чебышева, для схемы 2 полиномы Якоби). Шаги интегрирования по времени τ , а также число итераций для схемы 2 приведены в табл. 2.

В первом расчете моделировалось трехмерное течение при $R = 5000$. В качестве начального условия задавалось поле скорости ламинарного течения, на которое накладывалось конечно-амплитудное возмущение, представляющее собой суперпозицию трех собственных функций линейной задачи при волновых числах $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, 0), (0, \beta_0), (\alpha_0, \beta_0)$. Значение энергии этого возмущения $E'(0)$ дано в табл. 2. Эволюция течения рассчитана с помощью схемы 2. На начальной стадии наблюдалось резкое увеличение коэффициента трения и полной энергии возмущений, а затем при $t \geq 200$ установился вторичный режим течения с профилем скорости, характерным для турбулентного течения Куэтта. Таким образом, уже в первом трехмерном расчете, несмотря на сравнительно малую энергию начального возмущения, удалось получить вторичный режим для беззвонного течения в плоском канале.

Следующий расчет выполнен при тех же параметрах, что и предыдущий, но по схеме 1. В качестве начального условия задавалось поле скорости течения, полученное в конце расчета 1. Эволюция течения рассчитана на значительном интервале времени для статистической обработки результатов. Вычисление средних характеристик вторичного течения

$$\bar{f} = \langle f(\mathbf{x}, t) \rangle_{xyzt} = \frac{1}{2XY\Delta T} \int_D \int_{t_*}^{t_* + \Delta T} f(\mathbf{x}, t) dx dy dz dt,$$

$$D \equiv [x: 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, |z| \leq 1]$$

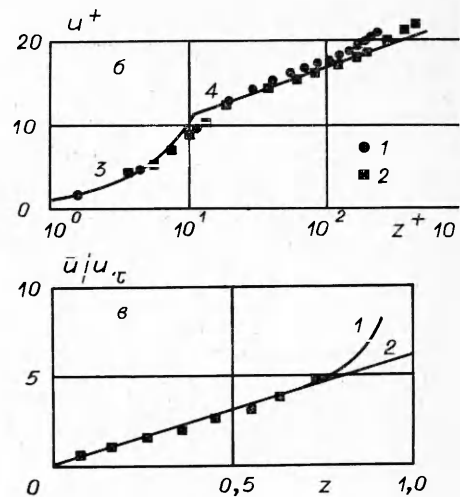
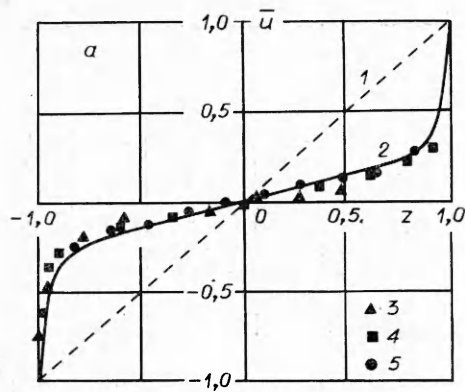


Рис. 1

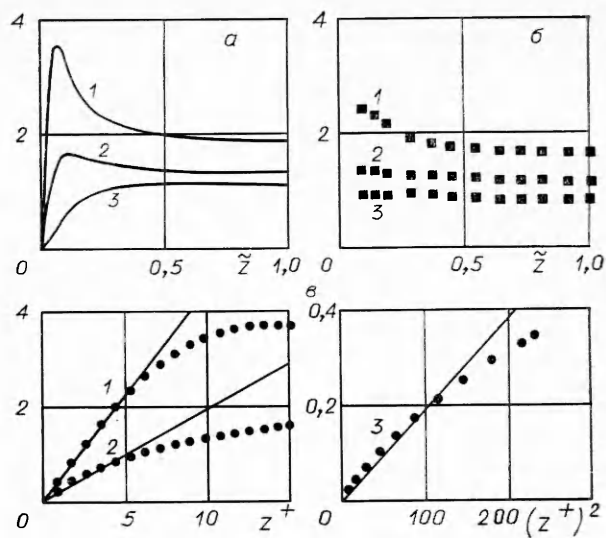
проводилось при различных $t_* \geq 10^3$ и интервалах ΔT . При этом установлено, что изменение начальной точки интегрирования t_* , а также увеличение интервала $\Delta T \approx 10^2$ не приводят к каким-либо заметным изменениям в средних характеристиках вторичного течения. Это свидетельствует о том, что полученный вторичный режим статистически-стационарный. В табл. 2 приведены значения полной энергии возмущений \bar{E} , энергии пульсаций \bar{E}' и коэффициента трения \bar{C}_f . Для сравнения укажем что в экспериментах [17] для турбулентного течения Куэтта в плоском канале при $R = 4930$ получен коэффициент трения $C_f = 4,6 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 1, а линия 1 — профиль скорости ламинарного течения 2 — профиль средней скорости $\bar{u}(z) = \langle u(x, t) \rangle_{xyt}$ трехмерного вторичного течения, полученный в расчете 2; результаты экспериментов при различных числа Рейнольдса: 3 — $R = 8200$ [18], 4 — $R = 17\,000$ [17] 5 — $R = 28\,500$ [19]. На рис. 1, б профиль средней скорости рассмотряемого вторичного течения построен в полулогарифмическом масштабе (точки 1 соответствуют узлам коллокаций), точки 2 — результат эксперимента [20] при $R = 9500$. Полученный в расчете профиль средней скорости достаточно хорошо согласуется с экспериментальными и с универсальным законом стенки: $u^+ = z^+$ (кривая 3) для $z^+ \leq 10$ и $u^+ = 2,55 \ln z^+ + 5,2$ (кривая 4) для $z^+ \geq 30$, где $u^+ = (1 - \bar{u})/u_\tau$, $z^+ = (1 - z)u_\tau/\nu$, $z \in [0, 1]$, $u_\tau = \left(\nu \frac{d\bar{u}}{dz} \Big|_{z=\pm 1} \right)^{1/2}$. Кроме того, в ядре потока $|z| \leq 0,5$ профиль скорости вторичного течения (см. рис. 1, в, кривая 1) согласуется с законом дефекта скорости, который в принятых здесь переменных записывается в виде $\bar{u}/u_\tau = R_f z$, $R_f = 5,9$ (кривая 2). В экспериментах [20] показано, что с ростом R коэффициент R_f уменьшается, при этом для $R = 9500$ $R_f = 5,7$ (рис. 1, в, точки).

Распределения среднеквадратичных пульсаций каждой компоненты вектора скорости $\mathbf{v}' = (u', v', w')$ * для трехмерного вторичного течения при $R = 5000$ и турбулентного течения при $R = 9500$ [20] приведены соответственно на рис. 2, а, б (1 — u'/u_τ , 2 — v'/u_τ , 3 — w'/u_τ), $\tilde{z} = 1 - z$. Сравнение графиков показывает по меньшей мере хорошее качественное согласие. В центральной части канала $|z| \leq 0,5$ как в расчете так и в эксперименте имеет место однородное распределение рассматриваемых характеристик. Асимптотические зависимости от переменной в окрестности стенки канала для среднеквадратичных пульсаций скорости вторичного течения представлены на рис. 2, в. Видно, что для про

* $u' = (\langle \tilde{u}^2 \rangle_{xyt})^{1/2}$, \tilde{u} — отклонение продольной компоненты скорости от среднего значения, v' , w' определяются аналогично.

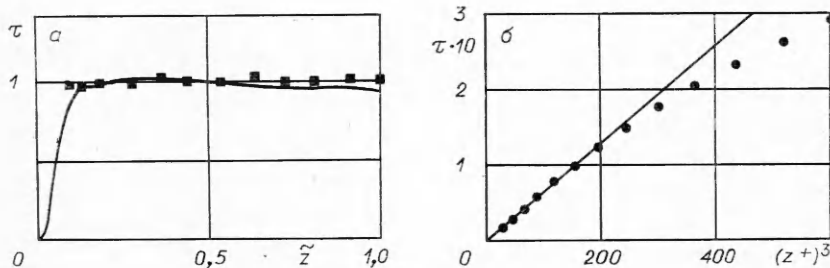
дольной и поперечной компонент при $z^+ \leq 5$ наблюдается линейная зависимость $u'/u_\tau = A_u z^+$, $v'/u_\tau = A_v z^+$ (кривые 1, 2), а для нормальной компоненты при $z^+ \leq 10$ — квадратичная $w'/u_\tau = A_w (z^+)^2$ (кривая 3), при этом $A_u = 0,39$, $A_v = 0,22$, $A_w = 2,3 \cdot 10^{-3}$. Аналогичные асимптотические зависимости получены в эксперименте [21] для развитого турбулентного течения Куэтта при $R = 28\,500$. В этом случае $A_u = 0,28$, $A_v = 0,08$, $A_w = 5 \cdot 10^{-3}$. Поскольку числа Рейнольдса в расчете и эксперименте существенно отличаются, то здесь можно говорить лишь о качественном согласии.



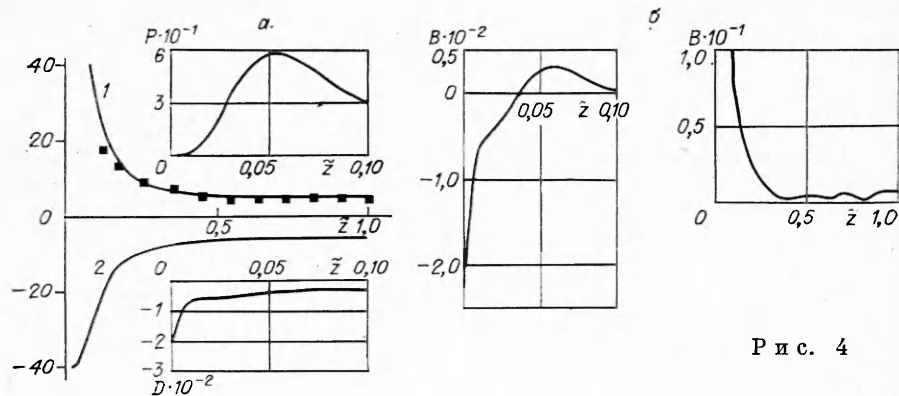
Р и с. 2

Напряжение Рейнольдса $\tau(z) = -\langle uw \rangle_{xyt} / u_\tau^2$ для вторичного течения при $R = 5000$ построено на рис. 3, а (линия), точки — результаты эксперимента [20] при $R = 9500$. Наблюдается хорошее согласие. На рис. 3, б построено напряжение Рейнольдса в окрестности стенки канала. Здесь при $z^+ \leq 5$ имеет место асимптотическая зависимость $\tau = A_\tau (z^+)^3$, где $A_\tau = 4,9 \cdot 10^{-4}$. Отметим, что с помощью численного интегрирования уравнений Навье — Стокса для напорного турбулентного течения в плоском канале при умеренном числе Рейнольдса получены аналогичные зависимости для среднеквадратичных пульсаций скорости и напряжения Рейнольдса, при этом $A_u = 0,36$, $A_v = 0,19$, $A_w = 8,6 \times 10^{-3}$, $A_\tau = 7,2 \cdot 10^{-4}$ [22].

Локальные средние распределения по z производства энергии возмущений $P(z) = \tau(z) \frac{d\bar{u}}{dz} \Big|_{u_\tau}$ и ее диссипации $D(z) = -\nu \langle (\nabla \tilde{u})^2 + (\nabla \tilde{v})^2 + (\nabla \tilde{w})^2 \rangle_{xyt} / u_\tau^2$ для рассматриваемого вторичного течения построены на рис. 4, а (кривая 1 — P , 2 — D). Для производства энергии возмущений приведены также результаты эксперимента [20] при $R = 9500$ (точки). На рис. 4, б построена функция $B(z) = P(z) + D(z)$, которая характеризует баланс генерации и диссипации энергии возмущений. В окрестности стенок канала происходит диссипация энергии. В области $0,62 \leq |z| \leq 0,96$ энергия, переданная от среднего течения пульсациям, превышает ее диссипацию, причем максимум генерации достигается около стенок $|z| \simeq 0,94$. Интересно отметить, что в ядре потока $|z| \leq 0,6$ производство и диссипация энергии возмущений практически компенсируют друг друга.



Р и с. 3



Р и с. 4

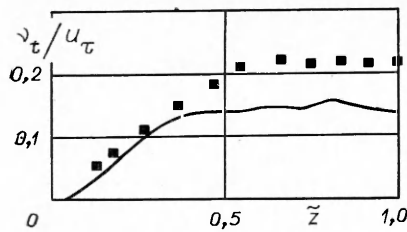
На рис. 5 изображена вихревая (турбулентная) вязкость $\nu_t = \tau(z) u_\tau \frac{d\bar{u}}{dz}$ для вторичного течения при $R = 5000$ (линия) и турбулентного при $R = 9500$ [20] (точки). В центральной части канала значения ν_t для вторичного течения несколько меньше экспериментальных. По-видимому, это объясняется тем, что числа Рейнольдса в расчете и эксперименте отличаются почти в 2 раза.

В последующих расчетах 3—7 (см. табл. 2) в качестве начального условия задавалось поле скорости течения, получаемое в конце предыдущего. Трехмерные вторичные течения найдены при $R \geq 10^3$. При меньших R получить вторичные течения с интервалами периодичности $X = 2\pi/1,25$ и $Y = \pi$ не удалось. Таким образом, установлена неустойчивость плоского течения Куэтта относительно трехмерных периодических возмущений конечной амплитуды при $R \geq 10^3$. Этот результат неплохо согласуется с экспериментальными данными [3]. Возможно, что учет длинноволновых возмущений позволит получить трехмерные вторичные течения и при меньших R .

Пространственно-периодические вторичные течения в плоском канале при фиксированном числе Рейнольдса образуют двухпараметрическое семейство решений уравнений Навье — Стокса, зависящих от волновых чисел α_0, β_0 . Расчеты 8—13 (см. табл. 2) проведены с целью выяснить, как изменение α_0, β_0 влияет на интегральные характеристики вторичных течений. Начальные условия в этих расчетах задавались так же, как в расчете 1, при этом в каждом случае брались соответствующие α_0, β_0 . В рассматриваемых расчетах использовалось такое же количество базисных функций в представлении приближенного решения, как и в предыдущих.

Сравнение результатов расчетов 2, 8, 9 показывает, что уменьшение α_0 или β_0 , отвечающее увеличению соответствующих интервалов периодичности течения, приводит к некоторому снижению коэффициента трения и увеличению полной энергии возмущений. В свою очередь, рост α_0, β_0 (расчеты 2, 10, 11 и 4, 12, 13) вызывает уменьшение как коэффициента трения, так и полной энергии возмущений. Ясно, что для каждого фиксированного значения $R \geq 10^3$ существуют такие α_0^*, β_0^* , при которых реализуется максимальное трение. Вторичные течения с интервалами периодичности $X^* = 2\pi/\alpha_0^*, Y^* = 2\pi/\beta_0^*$ называются предельными [15].

В плоскости переменных (R, C_f) предельным вторичным течениям отвечает кривая, которая является верхней границей сопротивления для всего бесконечного множества вторичных течений. Даже приблизительное определение этой границы представляет собой исключительно трудоемкую задачу. В настоящей работе получена грубая оценка для α_0^*, β_0^* только при $R = 5000$.



Р и с. 5

Расчеты 10, 11 проведены также с целью оценить протяженность области энергосодержащих вихрей в пространстве волновых чисел. Оказалось, что на отрезках $\alpha \in [5, 20]$, $\beta \in [8, 32]$ энергия гармоник затухает меньше чем на порядок. Это свидетельствует о том, что для безнапорного течения при переходном числе Рейнольдса ($R = 5000$) данная область достаточно протяженная и граница ее находится вне рассмотренных здесь интервалов волновых чисел, т. е. при $\alpha > 20$, $\beta > 30$. Для сравнения укажем, что в случае напорного вторичного течения в плоском канале также при переходном числе Рейнольдса на отрезках $\alpha \in [1,3; 13]$, $\beta \in [2; 20]$ затухание энергии гармоник составляет более двух порядков. По-видимому, полученное в настоящих расчетах завышение среднеквадратичных пульсаций скорости по сравнению с экспериментом связано с недостаточным разрешением области энергосодержащих масштабов, т. е. в представлении приближенного решения по однородным переменным x, y использовалось малое число базисных функций.

В заключение отметим, что, несмотря на сравнительно небольшое число степеней свободы, используемое для описания трехмерных вторичных течений, удалось получить основные интегральные характеристики турбулентного течения Куэтта в плоском канале при переходных числах Рейнольдса. При $R \geq 10^3$ установлена неустойчивость ламинарного течения Куэтта относительно трехмерных конечных возмущений. Вместе с тем при $R \leq 10^4$ найти незатухающие двумерные возмущения не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность.— Новосибирск: Наука, 1977.
2. Романов В. А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // ДАН СССР.— 1971.— Т. 196, № 5.
3. Reichardt H. Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couetteströmung // ZAMM.— 1956.— Bd 36.— Sonderheft.— S. 26.
4. Leutheusser H. J., Chu V. H. Experiments on plane Couette flow // Proc. ASCE. J. Hydr. Div.— 1971.— V. 97, N 9.
5. Kuwabara S. Nonlinear instability of plane Couette flow // Phys. Fluids.— 1967.— V. 10, N 9, pt 2: suppl.
6. Ellingsen T., Gjevik B., Palm E. On the non-linear stability of plane Couette flow // J. Fluid Mech.— 1970.— V. 40, N 1.
7. Coeffe T. Finite amplitude instability of plane Couette flow // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 83, N 3.
8. Афендиков А. Л., Бабенко К. И. О возможности возникновения автоколебательных режимов в плоском течении Куэтта // ДАН СССР.— 1980.— Т. 252, № 1.
9. Lessen M., Cheifetz M. G. Stability of plane Couette flow with respect to finite two-dimensional disturbances // Phys. Fluids.— 1975.— V. 18, N 8.
10. Herbert T. Finite amplitude stability of plane parallel flow // Proc. AGARD Symp. on Laminar-Turbulent Transition.— 1977.— N 224, par. 3.
11. Orszag S. A., Kells L. C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // J. Fluid Mech.— 1980.— V. 96, N 1.
12. Orszag S. A., Patera A. T. Secondary instability of wall-bounded shear flows // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 128.— P. 347.
13. Rummel B., Breitschuh U. Berechnung der turbulenten Couetteströmung mittels Galerkinapproximation der Navier — Stokes — Gleichung — Ergebnisse und Probleme // ZAMM.— 1984.— Bd 64.— N 10.
14. Miyaka Y., Kajishima T., Obana S. Direct simulation of plane Couette flow at transitional Reynolds numbers // JSME Intern. J.— 1987.— V. 30, N 259.
15. Рождественский Б. Л., Симакин И. Н. Моделирование турбулентных течений в плоском канале // ЖВММФ.— 1985.— Т. 25, № 1.
16. Рождественский Б. Л., Стойнов М. И. Алгоритмы интегрирования уравнений Навье — Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии.— М., 1987.— (Препр./ИИМ им. В. Н. Келдыша АН СССР; № 119).
17. Reichardt H. Gesetzmässigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung // Mitt./Max Planck Inst. für Ström.— 1959.— N 22.
18. Robertson J. M. On turbulent plane Couette flow // Proc. 6th Midwestern Conf. Fluid Mech., Univ. Texas, Austin, 1959.
19. El Telbany M. M. M., Reynolds A. J. Velocity distributions in plane turbulent channel flows // J. Fluid Mech.— 1980.— V. 100, N 1.
20. El Telbany M. M. M., Reynolds A. J. The structure of turbulent plane Couette flow // Trans. ASME. J. Fluids Engng.— 1982.— V. 104.— P. 367.

21. El Telbany M. M. M., Reynolds A. J. Turbulence in plane channel flows // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 111.— P. 283.
 22. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1987.— V. 177.— P. 133.

Поступила 26/VIII 1988 г.

УДК 532.525.3—191.44

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКЕ С ПОМОЩЬЮ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Б. А. Луговцов

(Новосибирск)

В настоящее время для расчета основных параметров течения в центробежных форсунках широко применяется предложенный Г. Н. Абрамовичем [1, 2] принцип максимального расхода (ПМР). В данной работе показано, что для центробежной форсунки специальной формы (форсунка с насадком Борда) в рамках модели идеально несжимаемой жидкости основные параметры течения определяются точно с помощью законов сохранения. Сравнение точных результатов с полученными на основе ПМР обнаруживает заметное их различие.

Схема центробежной форсунки и картина течения в ней приведены на рис. 1. Жидкость, протекающая через форсунку, подается в камеру закручивания по тангенциальным цилиндрическим каналам радиуса r_1 оси которых смещены относительно оси форсунки, совпадающей с осью z цилиндрической системы координат, на расстояние R_0 и расположены в плоскости, перпендикулярной к оси z . Жидкость приобретает осевой момент импульса, и возникает интенсивное вращательное движение. На осевой линии форсунки образуется полый вихрь, имеющий радиус R_1 на задней стенке камеры закручивания и радиус R_2 на прямолинейном участке сопла, где поток выравнивается (осевая компонента скорости не зависит от z). Давление p на границе полости принимает постоянное значение, которое можно считать равным нулю. При выходе из сопла (насадка) радиуса R жидкость разлетается, образуя факел распыла с углом α . Фактически пленка жидкости распадается на капли, размер которых в значительной степени зависит от толщины слоя жидкости δ на прямолинейном участке сопла. δ определяется коэффициентом заполнения сопла $\phi = 1 - (R_2/R)^2$.

Основные параметры течения в центробежной форсунке, важнейшие характеристики форсунки с точки зрения практического использования, — расход при заданном перепаде давления на входе и выходе, определяем коэффициентом расхода μ , коэффициент заполнения сопла ϕ , угол распыла α .

В центробежных форсунках, используемых на практике, течение перечисленные выше величины существенным образом зависят от вязкости жидкости (необходимо учитывать возможность возникновения турбулентности).

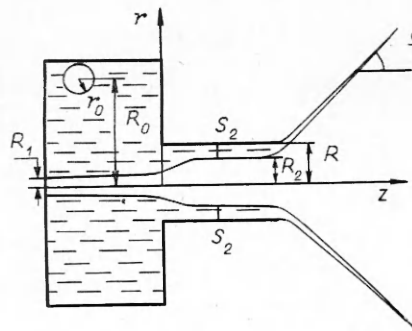


Рис. 1

Тем не менее определенный интерес представляет изучение течения в центробежных форсунках в рамках теории идеальной несжимаемой жидкости. Такое исследование дает основу для понимания наиболее характерных особенностей рассматриваемого явления, позволяет найти в первом приближении основные параметры потока и является, по-видимому, необходимым шагом на пути к созданию достаточ-