ПМТФ, № 1, 1973

УДК 537.521.7

К ТЕОРИИ СТРИМЕРНОГО ПРОБОЯ

А. И. Захаров, И. Г. Персианцев, В. Д. Письменный, А. В. Родин, А. Н. Старостин

(Москва)

Создание последовательной теории стримерного пробоя газа требует рассмотрения переноса области ионизации в сторону неионизованного газа в электрическом поле, зависящем от формы стримера, которая, в свою очередь, определяется механизмами переноса [1–3]. В таком виде эта задача очень сложна, и теория идет по пути изучения различных качественных моделей стримера [4].

В работе [4] предполагается, что скорости анодонаправленного и катоднонаправленного стримеров определяются дрейфовой скоростью электронов. Механизмом распространения анодонаправленного стримера считается развитие лавины от переднего фронта электронов, бегущих к аноду. Со стороны катода электроны перед фронтом катоднонаправленного стримера создаются благодаря переносу излучения из ионизованной области [1]. В работе [5] показано, что прямая фотоионизация является неэффективной из-за малого пробега квантов и предложен механизм развития катоднонаправленного стримера, связанный с ассоциативной ионизацией возбужденных атомов. Эти атомы образуются дальнопролетными резонансными фотонами из крыльев спектральной линии.

Интересным предсказанием теории [4] оказалась линейная зависимость скорости стримеров от их длины. Эта зависимость была подтверждена в экспериментах по изучению стримерного пробоя, инициируемого в центре разрядного промежутка в искровых камерах [6,7]. В то же время для стримеров, развившихся из лавин, инициированных у одного из электродов, скорость распространения «волны пробоя» остается с хорошей точностью постоянной на промежутках длиной порядка метра.

В настоящей работе построена качественная теория, позволяющая вычислить скорость анодонаправленного стримера в случае, когда последняя не зависит от его длины. Поскольку для давлений порядка атмосферного коэффициент диффузии возбужденных атомов [8] сравним с коэффициентом электронной диффузии, то влияние переноса излучения не учитывается.

Исследуется устойчивость фронта стримера по отношению к бесконечно малым возмущениям. Показано, что при учете конечной толщины фронта стример устойчив. В приближении бесконечно тонкого переднего фронта стример неустойчив.

1. Основная модель. Рассмотрим одномерную задачу о распространении волны ионизации в электрическом поле, направленном от анода к катоду ($E_x = -E,\ E > 0$). Для качественного описания будем считать подвижность электронов μ_e, коэффициент диффузии D_e, коэффициент рекомбинации β и другие неэкспоненциально меняющиеся величины постоянными. В этом предположении, считая в установившемся режиме все величины функциями от $\xi = x - ut$ (u — искомая скорость распространения), имеем следующую систему уравнений для анодонаправленного стримера, возникшего у катода

$$-u\frac{\partial n_e}{\partial \xi} + \mu_e \frac{\partial}{\partial \xi}(En_e) - D_e \frac{\partial^2 n_e}{\partial \xi^2} = \alpha(T_e)\,\mu_e\, Enn_e - \beta\, n_e n_i \quad (1.1)$$

$$-u\frac{\partial n_i}{\partial \xi} = \alpha(T_e)\,\mu_e Enn_e - \beta n_e n_i \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -4\pi e(n_i - n_e) \quad (1.3)$$

$$-u\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{3}{2}T_e n_e\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\varkappa_e \frac{\partial T_e}{\partial \xi} + \mu_e \frac{\partial}{\partial \xi}\left(En_e \frac{5}{2} T_e\right) = \quad (1.4)$$

$$= n_e e \mu_e E^2 - I(\alpha \mu_e Enn_e - \beta n_e n_i) - \dot{\varepsilon}$$

Здесь n_e, n_i — концентрации электронов и ионов, $\alpha(T_e)\mu_e En$ — константа ионизации, n — концентрация газа, T_e — электронная температура, $\varkappa_e$ — коэффициент электронной теплопроводности, пропорциональный n_e, I — потенциал ионизации, $\dot{\varepsilon}$ характеризует потери энергии электронов при соударениях с газом. Если основной механизм — упругие потери, то

$$\dot{\varepsilon} \sim \frac{2m_e}{M} \frac{n_e T_e}{\tau_y}$$

τ_y — время свободного пробега между упругими соударениями; в случае неупругих потерь $\dot{\varepsilon} \sim \Delta\varepsilon / \tau_H$, $\Delta\varepsilon$ порядка характерной энергии, передаваемой при неупругом соударении с частотой τ_H^{-1}.

Уравнения (1.1) и (1.2) описывают баланс числа электронов и ионов (для последних пренебрегаем их подвижностью и диффузией вдоль поля); (1.3) — уравнение Пуассона для электрического поля ($e > 0$). Уравнение (1.4) описывает баланс энергии электронного газа с учетом переноса энергии как теплопроводностью, так и в дрейфовом движении электронов к аноду. В правой части (1.4) представлены джоулев нагрев, энергия на ионизацию и потери энергии при соударениях электронов с атомами газа. В отсутствии поля система (1.1) — (1.4) описывает медленную волну ионизации, рассмотренную в [9].

Математически задача о медленной волне ионизации родственна задаче о распространении медленного горения [10]. Строгая математическая теория для задач такого рода была создана впервые в работе [11].

Система уравнений, аналогичная (1.1) — (1.4), исследовалась в работах [12, 13] о волне ионизации при стримерном пробое. В этих работах задача решалась в предположении постоянства температуры в пределах ширины переходного слоя. Это может приводить к существенным ошибкам, поскольку константа ионизации является экспоненциальной функцией температуры. В уравнении баланса энергии были опущены члены, описывающие теплопроводность и потери энергии электронов при соударениях с атомами газа.

Отметим, что в полях порядка 10^5 *в/см* и при давлениях порядка атмосферного температура электронов в случае преобладания механизма упругих потерь оказывается $\gtrsim 10^2$ *эв*, т. е. существенно больше энергии ионизации. Поэтому основную роль в балансе энергии электронов играют неупругие соударения. В этом случае можно предположить, что в пределах ширины переходной области, где осуществляется эффективная ионизация, функция распределения электронов подстраивается под локальное значение электрического поля и коэффициент ионизации $\alpha(T_e)$ является функцией напряженности электрического поля $\alpha(E)$ в данном месте [14]. После этого система уравнений (1.1) — (1.3) отделяется от уравнения (1.4) и оказывается достаточным исследовать ее для нахождения скорости u и структуры переходного слоя.

В случае отсутствия процессов ионизации и рекомбинации система (1.1) — (1.3) описывает так называемую волну электрического поля в полупроводниках с N-образной вольт-амперной характеристикой (см. обзор [15]). В рассматриваемом случае процессы ионизации и рекомбинации являются определяющими. Для упрощения задачи воспользуемся следующей моделью. Так как стример распространяется в виде узкой нити, размывающейся в результате сравнительно медленного процесса амбиполярной диффузии, можно в грубом приближении заменить поперечный размер нити некоторым средним r. При этом главным механизмом гибели заряженных частиц в основном канале можно считать диффузионный уход вбок, т. е. вместо члена — $\beta n_e n_i$, описывающего рекомбинацию, в правой части уравнений (1.1), (1.2) писать $-n_e/\tau$, $\tau \sim r^2/D_a$. Такая замена сохраняет качественно основные свойства рассматриваемого явления, существенно упрощая математическое рассмотрение.

Вычтем уравнение (1.1) из (1.2) и воспользуемся (1.3)

$$\frac{u}{4\pi e}\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \mu_e \frac{\partial}{\partial \xi}(En_e) + D_e \frac{\partial^2 n_e}{\partial \xi^2} = 0 \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) имеет интеграл. Так как при $\xi \to +\infty$ $n_e \to 0$, $E \to E_\infty$ получим

$$\frac{u}{4\pi e}\frac{\partial E}{\partial \xi} = \mu_e E n_e - D_e \frac{\partial n_e}{\partial \xi} \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) выражает собой закон сохранения полного тока, складывающегося из тока смещения $\sim u\, \partial E / \partial \xi$, тока проводимости $\sim \mu_e E n_e$ и диффузии. Будем искать решение с граничными условиями на $-\infty$

$$E \to E_0 = \mathrm{const}, \quad n_e \to n_{-\infty}$$

Легко видеть из (1.6), что в этом случае $n_{-\infty} = 0$. Если пренебречь потерями энергии электронов на возбуждение атомов газа, как в [12,13], то можно получить $n_{-\infty} \neq 0$. Уравнение (1.6) допускает такой вид граничных условий:

$$E_0 = 0, \quad n_{-\infty} \neq 0$$

Однако в данном случае это влечет за собой $\alpha = 0$, и поэтому такой подход неприменим.

Рассмотрим сначала случай, когда диффузионный член в (1.6) мал по сравнению с током проводимости. (В уравнении (1.1) диффузионный член может быть порядка разности двух «больших» членов $-u\, \partial n_e / \partial \xi$ и $\mu_e \partial / \partial \xi\, (En_e)$, и его следует оставить.) Подставляя из (1.6)

$$n_e - \frac{u}{4\pi e \mu_e E}\frac{\partial E}{\partial \xi}$$

в (1.1) получим

$$-\frac{u}{\mu_e}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \frac{D_e}{\mu_e}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \xi}\right) =$$
$$= \alpha(E)\, n \frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{1}{\tau \mu_e E}\frac{\partial E}{\partial \xi} \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) также имеет интеграл, который запишем с учетом условия на $-\infty$:

$$E(-\infty) = E_0$$

$$\left(1 - \frac{u}{\mu_e E}\right)\frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{D_e}{\mu_e}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \xi}\right) = \int\limits_{E_0}^{E}\left(n\alpha - \frac{1}{\tau\mu_e E}\right)dE \tag{1.8}$$

Рассмотрим условие на $+\infty$

$$E \to E_\infty = \mathrm{const}$$

Из (1.8) следует:

$$\int\limits_{E_0}^{E_\infty}\left(n\alpha - \frac{1}{\tau\mu_e E}\right)dE = 0 \tag{1.9}$$

Условие (1.9) связывает значения полей E_0 и E_∞ и имеет вид правила равных площадей. Его можно использовать для оценки напряжения пробоя E_* промежутка длины d. Предполагая для определенности, что $\alpha(E)$ имеет вид $\sim \exp(-A / E)$ [14], можно получить приближенно ($E_\infty = E_*$)

$$\frac{nE_*^2}{A}\alpha(E_*) = \frac{1}{\tau\mu_e}\ln\frac{E_*}{E_0} \tag{1.10}$$

Оценим величину E_0, считая, что в проионизованной области ток $\sim \sigma_0 E_0 r^2$, σ_0 — проводимость, а вне ее он определяется током смещения $\sim U\,dC / dt$, U — напряжение на промежутке, C — емкость системы электрод — стример

$$C \sim S / 4\pi d, \quad dC / dt \sim Su / 4\pi d^2, \quad u \sim \mu_e E_*$$

Поскольку величина E_0 входит в (1.10) под знаком логарифма, такая оценка является вполне удовлетворительной. В результате имеем

$$E_0 \sim \frac{U}{d}\frac{S}{r^2}\frac{\mu_e E_*}{4\pi\sigma_0 d} \tag{1.11}$$

$$n\alpha(E_*)d \sim \frac{Ad}{\tau\mu_e E_*^2}\ln\frac{4\pi\sigma_0 d^2 r^2}{\mu_e u S}$$

Условие (1.11) является аналогом условий Мика [2] и Ретера [3], которые в данных обозначениях имеют вид:

$$n\alpha(E_*)\,d \sim 20$$

Для практического использования (1.11) в качестве величины τ можно брать величину $\tau \sim 10^{-8} - 10^{-10}$ *сек*. Правая часть (1.11) может иметь порядок величины, не противоречащий условию

$$n\alpha(E_*)\,d \sim 20$$

В то же время буквенно правая часть (1.11) отличается от этого условия и поддается экспериментальной проверке.

Условие (1.9) может быть обобщено на случай, когда уход частиц из основного канала имеет рекомбинационный характер. Уравнение (1.8) допускает понижение порядка. Обозначая

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{d\xi} = y(E)$$

и переходя к безразмерным величинам

$$E = E_\infty\varepsilon, \quad \frac{u}{\mu_e E_\infty} = \varkappa, \quad \xi = \frac{\chi}{n\alpha_0}, \quad y = \eta(\varepsilon)\,n\alpha_0$$

так, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\chi} = \eta(\varepsilon)$$

получим

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon} = \gamma\left\{\left(1 - \frac{\varkappa}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon\eta}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\left[\sigma(\varepsilon') - \frac{\delta}{\varepsilon'}\right]d\varepsilon'\right\} \tag{1.12}$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma = \frac{\mu_e E_\infty}{n\alpha_0 D_e}, \quad \alpha(E) = \alpha_0\sigma(E), \quad \delta = \frac{1}{\tau\mu_e E_\infty n\alpha_0}$$

(Условие пренебрежения в (1.6) диффузионным членом имеет вид: $\gamma \gg 1$.)

Условие (1.9) в новых переменных

$$\int_{\varepsilon_0}^{1} d\varepsilon \left[\sigma(\varepsilon) - \frac{\delta}{\varepsilon}\right] = 0$$

Граничные условия к уравнению (1.12) следующие: при $\varepsilon = \varepsilon_0$ $\eta = 0$, а при $\varepsilon = 1$ $\eta = 0$, т.е. интегральная кривая уравнения (1.12) должна проходить через две особые точки этого уравнения. Умножая (1.12) на $\eta(\varepsilon)$ и интегрируя по ε от ε_0 до 1 с учетом граничных условий, получим

$$\int_{\varepsilon_0}^{1} d\varepsilon\, \eta(\varepsilon) \left[\frac{\varkappa}{\varepsilon} - 1\right] = \int_{\varepsilon_0}^{1} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \left[\frac{\delta}{\varepsilon'} - \sigma(\varepsilon')\right] d\varepsilon' \qquad (1.13)$$

Условие (1.13) можно использовать для определения безразмерной скорости $\varkappa$. Перепишем уравнение (1.12) в следующем виде:

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon} = \gamma \left[\frac{\theta(\varepsilon)}{\varepsilon\eta} - \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon} - 1\right)\right], \quad \theta(\varepsilon) = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \left[\frac{\delta}{\varepsilon} - \sigma(\varepsilon)\right] d\varepsilon \qquad (1.14)$$

При ε, близком к ε_0

$$\theta(\varepsilon_0) = 0, \ \theta(\varepsilon) \approx \theta_0'(\varepsilon - \varepsilon_0), \ \theta_0' \sim \frac{\delta}{\varepsilon_0}$$

а при ε, близком к 1

$$\theta(1) = 0, \ \theta(\varepsilon) \approx |\theta_1'|(1 - \varepsilon), \ |\theta_1| \sim \sigma(1)$$

Исследуем уравнение (1.14) вблизи особой точки $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\eta = 0$. Ищем решение в виде: $\eta = A(\varepsilon - \varepsilon_0)$. Предполагая $\varkappa / \varepsilon_0 \gg 1$, получим

$$A = \sqrt{\left(\frac{\gamma\varkappa}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \frac{\gamma\theta_0'}{\varepsilon_0}} - \frac{\gamma\varkappa}{2\varepsilon_0} \qquad (1.15)$$

Корни характеристического уравнения имеют разные знаки, т. е. особая точка $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\eta = 0$ является седлом, а искомое решение соответствует корню (1.15). Решение в x-пространстве имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + C \exp(A\varepsilon_0 x)$$

а характерная толщина заднего фронта $\sim u\tau$.

Вблизи точки $\varepsilon = 1$, $\eta = 0$ уравнение (1.14) принимает вид

$$\frac{d\eta}{d\varepsilon} = \gamma\,[\,|\theta_1'|(1 - \varepsilon) - \eta(\varkappa - 1)]\,\eta^{-1} \qquad (1.16)$$

Характеристическое уравнение имеет вещественные корни (если $\gamma(\varkappa - 1)/2 > (\gamma\,|\,\theta'_1\,|)^{1/2}$) одного знака (узел)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma(\varkappa - 1)}{2} \pm \left\{\left[\frac{\gamma(\varkappa - 1)}{2}\right]^2 - \gamma|\theta_1'|\right\}^{1/2} \qquad (1.17)$$

Отсюда получаем условие для скорости

$$\varkappa \geqslant 1 + 2\sqrt{\frac{|\theta_1'|}{\gamma}} \qquad (1.18)$$

или в размерном виде

$$u \geqslant \mu_e E_\infty + 2\sqrt{D_e \mu_e E_\infty n\alpha(E_\infty)}$$

Как показано в [11], скорость

$$u = \mu_e E_\infty + 2\sqrt{D_e \mu_e E_\infty n\alpha(E_\infty)} \tag{1.19}$$

является предельной скоростью при $t \to \infty$ для всех монотонных решений уравнения рассматриваемого вида.

Полученное выражение имеет простой физический смысл: в системе координат, движущейся с дрейфовой скоростью $\mu_e E_\infty$, волна ионизации распространяется благодаря электронной диффузии на характерный размер $\sim (D_e \tau_i)^{1/2}$, где

$$\tau_i \sim [\mu_e E_\infty n\alpha(E_\infty)]^{-1}$$

среднее время между ионизирующими соударениями, так что толщина переднего фронта порядка $(D_e/n\alpha(E_\infty)\mu_e E_\infty)^{1/2}$, а характерная скорость $\sim (D_e / \tau_i)^{1/2}$, что отражено вторым слагаемым в (1.19). При $\gamma \gg 1$ имеем $\mu_e E_\infty \gg (D_e / \tau_i)^{1/2}$. Это условие означает, что скорость анодонаправленного стримера совпадает по порядку величины с дрейфовой скоростью.

Диффузионная поправка к скорости стримера (1.19) не может превышать слагаемое, соответствующее дрейфовой скорости $\mu_e E_\infty$. Рассматривая уравнение (1.4) при $\xi \to \infty$, получим оценку сверху для электронной температуры T_e на $+\infty$

$$eE_\infty/I > \alpha(T_e)\, n \tag{1.20}$$

Условие (1.20) физически означает, что на ионизацию расходуется только часть джоулева тепла, выделяющегося перед фронтом. Оценивая диффузионный член в формуле (1.19) с помощью этого неравенства, а также используя связь коэффициента диффузии и подвижности, имеем

$$2\sqrt{D_e \mu_e E_\infty n\alpha(E_\infty)} < 2\mu_e E_\infty \sqrt{T_{e\infty}/I}$$

Отсюда видно, что второе слагаемое в формуле (1.19) в условиях применимости данного рассмотрения всегда мало по сравнению с первым. По этой причине механизм электронной диффузии не может обеспечить распространение катоднонаправленного стримера, для рассмотрения которого необходим учет переноса излучения.

2. Устойчивость фронта стримера. Приближенный способ решения системы уравнений (1.1)—(1.3) позволяет найти невозмущенное состояние в задаче об устойчивости фронта стримера. При этом не требуется предположения $\gamma \gg 1$ и легко построить метод последовательных приближений, уточняющих найденное решение. Для фактического нахождения функций $n_e(\xi)$, $n_i(\xi)$ и $E(\xi)$ с требуемой точностью следует выполнить несколько итераций.

Заменяя в уравнениях (1.1) и (1.2) поле E на его асимптотическое значение на $\pm\infty$, получим

$$-u\frac{\partial n_e}{\partial \xi} + \mu_e E(\pm\infty)\frac{\partial n_e}{\partial \xi} - D_e\frac{\partial^2 n_e}{\partial \xi^2} = \alpha[E(\pm\infty)]\,\mu_e E(\pm\infty)\, n n_e - \frac{n_e}{\tau} \tag{2.1}$$

$$-u\frac{\partial n_i}{\partial \xi} = \alpha[E(\pm\infty)]\,\mu_e E(\pm\infty)\, n n_e - \frac{n_e}{\tau} \tag{2.2}$$

Вместо поля E введем потенциал φ

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -E$$

и запишем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = -4\pi e(n_i - n_e) \qquad (2.3)$$

Уравнения (2.1)—(2.3) легко решаются для $\xi > 0$ и $\xi < 0$. Найденные решения требуется сшить при $\xi = 0$ с учетом условий

$$n_e|_{0-} = n_e|_{0+}$$

$$\left[D_e\frac{\partial n_e}{\partial\xi} + (u - \mu_e E_0)n_e\right]\Big|_{0-} = \left[D_e\frac{\partial n_e}{\partial\xi} + (u - \mu_e E_\infty)n_e\right]\Big|_{0+} \qquad (2.4)$$

$$n_i|_{0-} = n_i|_{0+}, \quad \varphi|_{0-} = \varphi|_{0+}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{0-} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{0+}$$

Второе из условий (2.4) легко получить, интегрируя (2.1) вблизи $\xi = 0$. Связь поля на $+\infty$ и на $-\infty$ получается из уравнения (1.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\left[\alpha(E)\mu_e Enn_e - \frac{n_e}{\tau}\right] = 0$$

Найдя решения и подставив их в (2.4), получим условие разрешимости этих уравнений

$$\left[(L_3^{-1} + L_1^{-1}) + \frac{\mu_e(E_\infty - E_0)}{D_e}\right]\left(\frac{L_2}{l_2} - \frac{L_3}{l_3}\right) = \left[(L_3^{-1} + L_2^{-1}) + \frac{\mu_e(E_\infty - E_0)}{D_e}\right]\left(\frac{L_1}{l_1} - \frac{L_3}{l_3}\right) \qquad (2.5)$$

где

$$L_{1,2}^{-1} = +\frac{u - \mu_e E_\infty}{2D_e} \pm \left[\left(\frac{u - \mu_e E_\infty}{2D_e}\right)^2 - \frac{\alpha(E_\infty)\mu_e E_\infty n - 1/\tau}{D_e}\right]^{1/2}$$

$$L_3^{-1} = -\frac{u - \mu_e E_0}{2D_e} \pm \left[\left(\frac{u - \mu_e E_0}{2D_e}\right)^2 + \frac{1/\tau - \alpha(E_0)\mu_e nE_0}{D_e}\right]^{1/2}$$

$$l_1^{-1} = \left[\alpha(E_\infty)\mu_e nE_\infty - \frac{1}{\tau}\right]u^{-1}, \quad l_2 = l_1, \quad l_3^{-1} = \left[\frac{1}{\tau} - \alpha(E_0)\mu_e nE_0\right]u^{-1}$$

Предполагается, что

$$\alpha(E_\infty)\mu_e nE_\infty \gg 1/\tau, \quad 1/\tau \gg \alpha(E_0)\mu_e nE_0$$

При

$$u = \mu_e E_\infty + 2\sqrt{D_e n\mu_e E_\infty\alpha(E_\infty)}$$

равенство (2.5) удовлетворяется тождественно, так как при этом $L_1 = L_2$. Это подтверждает предположение, что полученная формула для скорости стримера справедлива без использования условия $\gamma \gg 1$.

Рассмотрим задачу об устойчивости фронта стримера. Пусть возмущенное решение зависит от $\xi = x - ut$, t и y по закону $\sim \exp(-i\omega t + iky)f(\xi)$. Устойчивость по отношению к одномерным возмущениям, не зависящим от y, устанавливается методом, использованным в [16] в задаче об устойчивости фронта пламени. Обозначая возмущенные величины штрихом, получим систему, обобщающую (2.1)—(2.3)

$$D_e \frac{\partial^2 n_e'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial n_e'}{\partial \xi}(u - \mu_e E(\pm\infty)) + n_e'[i\omega - D_e k^2 + \\ + \alpha[E(\pm\infty)]\mu_e n E(\pm\infty) - 1/\tau] = 0 \tag{2.6}$$

$$u\frac{\partial n_i'}{\partial \xi} + i\omega n_i' + n_e'\left[\alpha[E(\pm\infty)]\mu_e n E(\pm\infty) - \frac{1}{\tau}\right] = 0 \tag{2.7}$$

$$\partial^2\varphi'/\partial\xi^2 - k^2\varphi' = -4\pi e(n_i' - n_e') \tag{2.8}$$

Возмущения предполагаются убывающими на $\pm\infty$ и асимптотики поля E ($\pm\infty$) остаются прежними. В невозмущенной задаче решения для $\xi > 0$ и $\xi < 0$ сшивались на фронте $\xi = 0$. Теперь сшивку следует производить на возмущенной границе

$$\xi' = A' \exp(-i\omega t + iky) \tag{2.9}$$

Решая систему (2.6)—(2.8) и сшивая решения на возмущенной границе (2.9), получим условие существования ненулевого решения

$$\left[\frac{1}{\lambda_+} + \frac{1}{\lambda_-} + \frac{\mu_e(E_+ - E_-)}{D_e}\right]\left[\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3}\right)\frac{\lambda_-}{l_3(1 + i\omega\lambda_-/u)} - \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_3}\right] = \tag{2.10}$$

$$= \left[\frac{\lambda_-}{l_3(1 + i\omega\lambda_-/u)} - \frac{\lambda_+}{l_1(1 - i\omega\lambda_+/u)}\right]\left[\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{\lambda_-} + \frac{1}{L_1}\right) + \\ + \frac{1}{L_3}\left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{L_3}\right) + \frac{\mu_e(E_+ + E_-)}{DL_1}\right]$$

где

$$\lambda_+^{-1} = \left[\frac{\mu_e E_\infty n\alpha(E_\infty)}{D_e}\right]^{1/2} + \left[\frac{k^2}{2} - \frac{i\omega}{2D_e}\right]^{1/2}$$

$$\lambda_-^{-1} = -\frac{u - \mu_e E_0}{2D_e} + \left[\left(\frac{u - \mu_e E_0}{2D_e}\right)^2 + \frac{1/\tau - \alpha(E_0)\mu_e n E_0 + D_e k^2 - i\omega}{2D_e}\right]^{1/2}$$

При $k = 0$, $\omega = 0$, $\lambda_+ = L_1 = L_2$, $\lambda_- = L_3$ условие (2.10) превращается в (2.5); (2.10) играет роль дисперсионного уравнения, с помощью которого находится $\omega(k)$ и выясняется вопрос об устойчивости. Рассмотрим (2.10) в длинноволновом пределе $kL \ll 1$. После простых вычислений можно получить

$$\omega \approx -iD_e k^2 + O(k^4) \tag{2.11}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае фронт оказывается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям. (В случае $kL \gg 1$ решение также оказывается устойчивым.) Выражение (2.11) физически означает, что искривления фронта восстанавливаются благодаря диффузии частиц из проионизованной зоны.

Рассмотрим вопрос об устойчивости стримера в приближении бесконечно тонкого переднего фронта. Пусть скорость движения границы $u(E)$ удовлетворяет условию

$$(du/dE)_0 = u'(E_\infty) > 0$$

(В рассматриваемом случае это условие выполняется.) Вне границы ($\xi > 0$) невозмущенный потенциал имеет вид: $\varphi = -E_\infty\xi$. Искривим границу, так что уравнение возмущенной границы примет вид (2.9). Возмущения потенциала находятся из уравнения Пуассона

$$\partial^2\varphi'/\partial\xi^2 - k^2\varphi' = 0$$

откуда

$$\varphi' = B \exp(-k\xi + iky - i\omega t)$$

Требуя равенства нулю потенциала $(\varphi + \varphi')$ на возмущенной границе, получим

$$E_\infty A' = B'$$

Возмущение электрического поля (компоненты, нормальной к границе)

$$E' = kB' \exp(-k\xi + iky - i\omega t) = kA'E_\infty \exp(-k\xi + iky - i\omega t)$$

Возмущение скорости определяется соотношением

$$u' = \frac{d\xi'}{dt} = -i\omega A' \exp(-i\omega t + iky) = \left(\frac{du}{dE}\right)_0 E'$$

В результате для скорости нарастания возмущений получим

$$\omega = ik\left(\frac{du}{dE}\right)_0 E_\infty \tag{2.12}$$

В отличие от (2.11) из (2.12) следует, что бесконечно тонкий фронт неустойчив с инкрементом $\gamma \sim ku$. Аналогичная картина имеется в задаче об устойчивости фронта пламени. Как показано Л. Д. Ландау [17], пламя, рассматриваемое как поверхность разрыва, неустойчиво с инкрементом $\sim ku$. В то же время учет конечной ширины фронта показывает [18], что благодаря теплопроводности (пренебрегая диффузией горючего) фронт устойчив по отношению к бесконечно малым возмущениям. Два рассматриваемых подхода не дают решений, плавно переходящих друг в друга в пределе, когда длина волны больше ширины фронта. По-видимому, это означает, что приближение бесконечно тонкого фронта соответствует исследованию возмущений, амплитуда которых велика по сравнению с толщиной фронта (это замечение принадлежит А. А. Веденову).

В результате может оказаться, что в начальной стадии, когда ширина фронта велика, стример устойчив по отношению к бесконечно малым возмущениям фронта. На поздней стадии, когда фронт становится тонким (такая картина имеет место при распространении стримера, развившегося вдали от обоих электродов), он неустойчив по отношению к возмущениям, большим ширинам фронта. Подобные физические соображения развивались в [4].

Авторы благодарны А. А. Веденову, Е. П. Велихову, А. П. Напартовичу, О. Б. Фирсову за полезные обсуждения работы.

Поступила 24 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е б Л. Основные процессы электрических разрядов в газах. М., Гостехиздат, 1950.
2. М и к Д., К р э г с Д. Электрический пробой в газах. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Р е т е р Г. Электронные лавины и пробой в газах. М., «Мир», 1968.
4. Л о з а н с к и й Э. Д., Ф и р с о в О. Б. Качественная теория стримера. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 2.

5. Лозанский Э. Д. К вопросу о природе фотоионизующего излучения при стримерном пробое газа. Ж. техн. физ., 1968, т. 38, вып. 9.
6. Давиденко В. А., Долгошеин Б. А., Сомов С. В. Экспериментальное исследование развития стримерного пробоя в неоне. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 2.
7. Руденко Н. С., Сметанин В. И. Исследование развития стримерного пробоя неона в больших промежутках. ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 1.
8. Мышенков В. И., Райзер Ю. П. Волна ионизации, распространяющаяся благодаря диффузии резонансных квантов и поддерживаемая сверхвысокочастотным излучением. ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 5.
9. Велихов Е. П., Дыхне А. М. Волна неравновесной ионизации в газе. Proc. VII Internat. Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.
10. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, вып. 1.
11. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюллетень МГУ, Секция А, 1937, т. 1, вып. 6.
12. Turcotte D. L., Ong R. S. B. The structure and propagation of ionizing wave fronts. J. Plasma Phys., 1968, vol. 2, No. 2.
13. Albright N. W., Tidman D. A. Ionizing potential waves and high-voltage breakdown streamers. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 1.
14. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. М., Атомиздат, 1961.
15. Волков А. Ф., Коган Ш. М. Физические явления в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. Усп. физ. н., 1968, т. 96, вып. 4.
16. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.—Л., Гостехиздат, 1954.
18. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени. ПМТФ, 1962, № 4.