

УДК 532.5:532.517.4

ПОДАВЛЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ РЕЛАКСАЦИОННЫМ ПРОЦЕССОМ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГАЗЕ

Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

* Новосибирская государственная академия водного транспорта, 630099 Новосибирск

На модельной задаче исследовано влияние термического возбуждения на динамику вихревого возмущения конечной амплитуды в сдвиговом потоке молекулярного газа. Эволюция подобных вихревых структур характерна как для нелинейной стадии ламинарно-турбулентного перехода, так и для развитой турбулентности. В предположении относительно невысокого уровня возбуждения в расчетах использовались полные уравнения Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа, в которых неравновесность учитывалась с помощью коэффициента объемной вязкости. Показано, что при увеличении объемной вязкости (в диапазоне реальных значений) скорость затухания энергии возмущений в слабосжимаемом потоке возрастает примерно на 10 %. При увеличении числа Маха эффект подавления возмущений усиливается.

Ключевые слова: вихревые возмущения, молекулярный газ, релаксация, подавление.

Введение. В последнее время ведется поиск новых способов воздействия на процессы ламинарно-турбулентного перехода и генерации турбулентности. При этом основное внимание уделяется эффектам, ранее находившимся вне поля зрения специалистов-гидродинамиков. Одно из возможных воздействий на сжимаемое течение молекулярного газа связано с дополнительным диссипативным эффектом, возникающим при релаксации внутренних степеней свободы молекул. Этот эффект проявляется, например, как аномальное поглощение ультразвука в молекулярных газах, которое впервые наблюдалось и получило физическую интерпретацию в 30-х гг. XX в. (см. [1]). В сверхзвуковых течениях неравновесное распределение внутренней энергии молекул во многих случаях возникает естественным образом, например в соплах, нерасчетных струях, за косыми скачками уплотнения. В гидродинамическом приближении этому диссипативному процессу соответствует коэффициент объемной вязкости в тензоре напряжений [2]. В уравнения теории устойчивости сжимаемого пограничного слоя (СПС) объемная вязкость впервые была введена в работе [3]. Однако до настоящего времени влияние объемной вязкости или в общем случае релаксации внутренних степеней свободы молекул на устойчивость СПС не исследовано достаточно полно.

В [4] дано описание сравнительных экспериментов по ламинарно-турбулентному переходу в течении Пуазейля в круглой трубе для азота N_2 и окиси углерода CO . Эти газы почти идентичны по термодинамическим и транспортным свойствам, но объемная вязкость CO , рассчитанная по данным о затухании ультразвука, в несколько раз превышает аналогично вычисленную величину для N_2 . В эксперименте установлено, что при одинаковых условиях число Рейнольдса перехода Re_t в более “вязком” CO примерно на 10 %

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00827).

превышает соответствующее значение для N_2 . Такое изменение Re_t существенно, так как по порядку величины сравнимо с результатом воздействия на поток используемых на практике механических способов снижения сопротивления [5]. Хотя достоверность полученных данных представляется дискуссионной, этот результат, несомненно, заслуживает теоретической проверки и анализа, тем более что ранее в литературе по гидродинамической устойчивости и ламинарно-турбулентному переходу подобный эффект не рассматривался. Конечно, используя данные о затухании ультразвука, можно было предполагать, что в газе с большей объемной вязкостью высокочастотные пульсации подавляются более интенсивно. Однако эти данные относятся к частотам порядка нескольких мегагерц, в то время как даже в сверхзвуковых потоках доля энергии возмущений в этой части спектра пренебрежимо мала.

В работе [6], частично инспирированной публикацией [4], впервые выполнено подробное исследование влияния неравновесности внутренних степеней свободы на ламинарно-турбулентный переход. Рассмотрена устойчивость СПС на полубесконечной пластине для условий полета в атмосфере на высоте $H = 12$ км с числом Маха $M_\infty = 4,5$. Выбранный режим соответствует движению реальных объектов, когда диссоциация в пристенном потоке отсутствует, но внутренние степени свободы молекул кислорода и азота возбуждены достаточно сильно. В расчетах предполагалось, что неравновесность вращательных и колебательных степеней создается естественным образом. В частности, считалось, что при моделировании такого полета в аэродинамической трубе равновесное распределение энергий нарушается из-за разгона воздуха в сопле до расчетного числа Маха, а при движении в невозмущенной атмосфере — за счет ускорения потока за косым скачком на затупленной передней кромке пластины. В расчетах на основе уравнений линейной теории устойчивости получено, что учет объемной вязкости приводит к незначительному стабилизирующему воздействию, уменьшающему на несколько процентов амплитуду второй неустойчивой моды. (Заметим, что определение первой и второй неустойчивых мод в СПС, впервые обнаруженных в [3], можно найти в [7].) При этом в зависимости от температуры отношение коэффициентов объемной вязкости μ_b и динамической вязкости μ изменялось в характерном для воздуха диапазоне $\alpha = \mu_b/\mu = 0,6 \div 1,0$.

Значительно более сильный и неожиданно дестабилизирующий эффект наблюдался при существенном отклонении от равновесия, которое уже не описывается моделью объемной вязкости. Из расчетов устойчивости СПС для трубного эксперимента на пластине с острой передней кромкой следует, что амплитуда низкочастотных возмущений первой неустойчивой моды примерно в 50 раз больше значений, рассчитанных в предположении термического равновесия. При этом из-за сдвига верхней ветви кривой нейтральной устойчивости область неустойчивости первой моды оказывается значительно расширенной вниз по потоку.

Результаты расчетов для затупленной пластины, движущейся в невозмущенной атмосфере, с учетом неравновесности за ударной волной показали увеличение амплитуды первой моды в два раза по сравнению с величиной, полученной для равновесных условий.

Представленные данные свидетельствуют о необходимости дальнейшего изучения влияния термической неравновесности, в том числе специально создаваемой, на переход в сжимаемых течениях. Отметим, что в [6] модель объемной вязкости рассматривалась для существенно меньших значений параметра α , чем в экспериментальной работе [4], в которой, по оценке авторов, для СО значение $\alpha \simeq 7$.

Эффект дестабилизации СПС был обнаружен вне области применимости модели объемной вязкости. В работе [6] он объяснялся сильным понижением статической температуры потока из-за избыточной доли внутренней энергии, остающейся в колебательных степенях свободы при быстром расширении. При этом считалось, что за характерное

время течения вращательные степени свободы мгновенно приходят в равновесие с поступательными, а энергия в колебательных степенях свободы остается замороженной. Таким образом, в данном случае изменение устойчивости СПС не связано непосредственно с воздействием релаксационного процесса. Кроме того, как отмечалось в работе [6], даже экспоненциальный в линейном приближении рост возмущений может стабилизироваться на нелинейной стадии перехода. В то же время в [4] изучался нелинейный этап перехода в турбулентный режим, так как в линейном приближении течение Гагена — Пуазейля устойчиво.

Авторами настоящей работы в [8] также в рамках линейной теории выполнены оценки влияния объемной вязкости на устойчивость СПС на тонкой пластине с конечной хордой. Для чисел Маха $M \leq 10$ и значения $\alpha \leq 30$, которое реально достигается для водорода [9], получено, что вклад дополнительного диссипативного эффекта в изменение Re_t не превышает десятых долей процента.

Из современных сценариев процессов ламинарно-турбулентного перехода и генерации турбулентности следует, что на нелинейной стадии происходит зарождение, эволюция и распад характерных вихревых структур. В пристенных течениях и трубах наблюдаются λ -структуры (подковы, шпильки), в плоских сдвиговых слоях и струях — двумерные вихри, вытянутые по трансверсальной координате. Поэтому генерацию турбулентности можно рассматривать как процесс ламинарно-турбулентного перехода, случайным образом повторяемый во времени и пространстве. Это позволяет предположить, что роль объемной вязкости μ_b на нелинейной стадии развития возмущений можно оценить, моделируя взаимодействие уединенной организованной вихревой структуры с основным (средним) течением. В данной работе рассмотрена простая модель эволюции поперечной вихревой структуры в сдвиговом слое неравновесного молекулярного газа.

1. Выбор и параметризация модели. 1.1. *Объемная вязкость.* Как следует из кинетической теории многоатомных газов [10], способ описания неравновесности по внутренним степеням свободы в гидродинамическом приближении зависит от величины отклонения от равновесия. Кроме того, необходимо учитывать отношения времен релаксации различных мод внутренней динамики молекул к характерному времени течения.

При относительно невысоких уровнях термического возбуждения распределение энергий по степеням свободы молекул характеризуется единой температурой, а обмен энергией между поступательными и внутренними степенями свободы учитывается с помощью коэффициента объемной вязкости μ_b в тензоре напряжений P_{ij} в уравнениях Навье — Стокса, который в общепринятых тензорных обозначениях имеет вид

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \mu_b \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad p = \rho RT. \quad (1)$$

В (1) x_i — декартовы координаты; u_i — соответствующие компоненты вектора скорости; p , ρ , T — статическое давление, плотность и температура газа; R — газовая постоянная. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование.

В общем случае многоатомных газов внутренняя энергия распределяется по вращательным и колебательным модам. При этом коэффициент объемной вязкости записывается в виде [10]

$$\mu_b = (pR/c_v)(\gamma_r \tau_{r,r} + \gamma_v \tau_{r,v}), \quad (2)$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; γ_r , γ_v — доли внутренней энергии, содержащейся во вращательных и колебательных степенях свободы; $\tau_{r,r}$, $\tau_{r,v}$ — времена релаксации соответствующих степеней свободы.

Будем рассматривать течения при умеренных сверхзвуковых скоростях с температурой торможения $T_0 \simeq 1000$ К. В этом случае колебательные уровни возбуждены очень

Газ	$\mu \cdot 10^{-5}$, Па·с	$\mu_b^{(s)} \cdot 10^{-5}$, Па·с	$\alpha = \mu_b^{(s)}/\mu$	$\mu_b^{(r)} \cdot 10^{-5}$, Па·с	$\alpha = \mu_b^{(r)}/\mu$
N ₂	1,750	0,348	0,199	0,966	0,552
СО	1,750	12,274	7,014	1,231	0,703
Воздух	1,820	1,178	0,647	—	—
СО ₂	1,460	54,015	39,997	—	—
Н ₂	0,880	34,570	39,280	—	—

слабо, и можно положить $\gamma_v \approx 0$. Тогда $\gamma_r = 2/5$, а время релаксации вращательных степеней выражается следующим образом:

$$\tau_{r,r} = Z_r \tau_t, \quad (3)$$

где τ_t — среднее время свободного пробега молекул в газе; Z_r — коэффициент обмена энергией между вращательными и поступательными степенями свободы [10]. Коэффициент Z_r равен среднему числу межмолекулярных столкновений, необходимых для релаксации к равновесию вращательной моды.

Имеющиеся в литературе данные по объемной вязкости молекулярных газов разрознены и в ряде случаев противоречивы. Более ранние из этих результатов основаны на измерениях поглощения ультразвука. В линейном акустическом приближении коэффициент поглощения определяется по формуле [9] (см. также [1])

$$\varkappa = \frac{2\pi\omega^2}{\rho c_s^2} \left[\frac{4}{3} \mu + \mu_b + \frac{\lambda(\gamma - 1)}{c_p} \right]. \quad (4)$$

Здесь λ — теплопроводность; γ — показатель адиабаты; c_s — скорость звука; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; ω — частота ультразвуковой волны.

Расчитанные по формуле (4) при $T = 273$ К, $p = 10^5$ Па значения объемной вязкости $\mu_b^{(s)}$ приведены в таблице. Данные для коэффициента поглощения \varkappa взяты из [9]. Отметим, что значения \varkappa для N₂ и СО совпадают с использованными в [4].

В настоящее время значения μ_b определяются на основе электронно-оптических измерений времен релаксации $\tau_{r,r}$ или коэффициентов обмена Z_r в ударных волнах и недорасширенных струях. Некоторые значения $\mu_b^{(r)}$, вычисленные по формулам (2), (3) с использованием экспериментальных данных, найденных по ссылкам в [9], также представлены в таблице. Эти результаты хорошо согласуются с расчетами μ_b по различным кинетическим моделям и с более поздними экспериментальными данными других авторов (см. библиографию в [9, 10]).

Различие примерно на порядок значений $\mu_b^{(s)}$ и $\mu_b^{(r)}$ для СО, возможно, связано с особой чувствительностью акустических измерений к наличию в газе даже малых долей примесей [9]. Вместе с тем из сравнения приведенных значений $\mu_b^{(r)}$ следует, что при данных величинах p и T объемная вязкость СО лишь на треть превышает соответствующее значение для N₂. Если же использовать в (2), (3) значения коэффициентов Z_r , приведенные в [4], то вычисленная таким образом объемная вязкость азота оказывается в два раза больше значения $\mu_b^{(r)}$ для СО. Такое несоответствие исходных данных авторами работы [4] не комментируется, хотя и противоречит самой идее эксперимента.

Зависимость $Z_r(T)$ рассчитана по соотношениям из работы [11], которые удовлетворительно согласуются с данными эксперимента и результатами прямого численного моделирования (см. библиографию в [10]). Как показывают расчетные данные (см. таблицу), при возрастании T с 273 до 1000 К значение α увеличивается примерно в два раза.

Таким образом, можно сделать вывод, что в течениях молекулярных газов с умеренными параметрами отношение объемной вязкости к сдвиговой $\alpha \leq 2$.

1.2. *Параметры течения.* Для оценки влияния объемной вязкости на ламинарно-турбулентный переход и генерацию турбулентности использовалась простая модель взаимодействия двумерной вихревой структуры с плоским сдвиговым потоком. Подобные структуры образуются в плоских слоях смешения, струях и следах за обтекаемыми телами. Предполагается, что число Маха основного потока $M_0 < 1$. В этом случае можно пренебречь влиянием сжимаемости на кинематические и динамические характеристики структур и при выборе значений параметров моделирования воспользоваться апробированными результатами по слоям смешения [12, 13].

Относительная интенсивность вихревой структуры задается параметром $\beta = u'/\Delta u \approx v'/\Delta u$ (u' , v' — максимальные значения пульсационных скоростей; Δu — абсолютная разность скоростей на границах слоя смешения). Согласно данным [12] (см. также [13]) $\beta \simeq 0,2 \div 0,5$.

Переमेжаемость по направлению потока определяется отношением размера вихря R_0 к половине расстояния между структурами $l/2$. В среднем для слоев смешения и струй значение коэффициента перемежаемости $\chi = l/(2R_0) = 2 \div 6$. Характерное соотношение между толщиной слоя δ и размером структуры оценивается как $\delta/R_0 \simeq 2 \div 4$ [12, 13].

Из экспериментальных данных и расчетов (см. работу [12] и библиографию к ней) следует, что в слоях смешения при числах Рейнольдса $Re = \rho\Delta u\delta/\mu \geq 10^2$ имеет место универсальность динамики любых возмущений, в том числе крупных структур. Это позволяет проводить расчеты при умеренных числах Рейнольдса и избежать определенных вычислительных трудностей.

При выборе профиля скорости несущего потока использовано решение Толлмина [13] для слоя смешения на границе струи. В автомодельных переменных профиль продольной скорости в слое имеет вид

$$\bar{u}_T = u(\varphi)/(2U_0) = F'(\varphi) = 0,0176e^{-\varphi} + 0,6623 \cos(\sqrt{3}\varphi/2) + 0,2280e^{\varphi} \sin(\sqrt{3}\varphi/2), \quad (5)$$

где $\varphi = x_2/(ax_1)$; a — эмпирическая константа, характеризующая структуру слоя. Функция $F'(\varphi)$ затабулирована в [13]. При $\varphi_0 = 0,98$ профиль (5) сопрягается с ядром струи, где $F'(\varphi_0) = 1$, $u(\varphi_0) = 2U_0$. Значение $\varphi_n = -2,04$ соответствует внешней границе струи, на которой $F'(\varphi_n) = 0$. Линейный профиль скорости между этими значениями определяется формулой

$$\bar{u}_l = u/(2U_0) = (\varphi - \varphi_n)/(\varphi_0 - \varphi_n). \quad (6)$$

Сравнение профилей (5) и (6) показывает, что среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{u}_T(\varphi_i) - \bar{u}_l(\varphi_i))^2}$$

не превышает значения $\sigma = 0,075$. Этим обосновывается возможность моделировать несущий поток линейным сдвиговым течением.

Считая, что центр структуры находится на средней линии тока и движется со скоростью U_0 , можно перейти в систему координат, в которой он неподвижен. В качестве начального состояния вихревой структуры использован вихрь Рэнкина радиуса R_0 с постоянной плотностью завихренности Ω_0 . Симметризованное таким образом исходное течение в модельной ячейке показано на рис. 1. Расчеты проведены при следующих значениях параметров: $\alpha = \mu_b/\mu = 0 \div 2$, $\beta = \Omega_0 R_0/(2U_0) = 0,2 \div 0,5$, $\chi = l/(2R_0) = 2 \div 6$, $M_0 = U_0/\sqrt{\gamma RT_0} = 0,2 \div 0,8$, $Re = 2U_0 R_0 \rho_0/\mu = 40 \div 100$, число Прандтля $Pr = \mu c_p/\lambda = 0,74$.

2. Основные уравнения и метод решения. 2.1. *Начально-краевая задача.* Эволюция структуры в модельной ячейке описывается системой полных уравнений Навье —

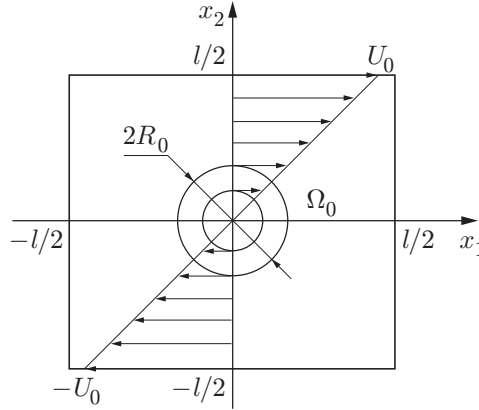


Рис. 1. Схема течения в начальный момент времени

Стокса сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Расчеты позволяют анализировать обмен энергией и импульсом между возмущением и основным течением, который имеет место как при потере устойчивости, так и в процессе генерации турбулентности. В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны начальный диаметр структуры $2R_0$, модуль скорости U_0 , плотность ρ_0 и температура T_0 на верхней и нижней границах модельной ячейки, время $\tau_0 = 2R_0/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$.

В безразмерных переменных система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) &= (\gamma - 1) M_0^2 \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \\ &+ \frac{(\gamma - 1) M_0^2}{2 \text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + (\gamma - 1) \left(\alpha - \frac{2}{3} \right) \frac{M_0^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2, \\ \gamma M_0^2 p &= \rho T, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

На границах ячейки во все моменты времени выполняются следующие условия: при $x_1 = \pm \chi/2$, $x_2 \in [-\chi/2; \chi/2]$

$$\begin{aligned} u_1(t, \chi/2, x_2) &= u_1(t, -\chi/2, x_2), & u_2(t, \chi/2, x_2) &= -u_2(t, -\chi/2, x_2), \\ \rho(t, \chi/2, x_2) &= \rho(t, -\chi/2, x_2), & p(t, \chi/2, x_2) &= p(t, -\chi/2, x_2); \end{aligned} \quad (8)$$

при $x_2 = \pm \chi/2$, $x_1 \in [-\chi/2; \chi/2]$

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, \chi/2) &= -u_1(t, x_1, -\chi/2), & u_2(t, x_1, \chi/2) &= u_2(t, x_1, -\chi/2), \\ \rho(t, x_1, \chi/2) &= \rho(t, x_1, -\chi/2), & p(t, x_1, \chi/2) &= p(t, x_1, -\chi/2). \end{aligned} \quad (9)$$

Несущий поток в расчетной области задается как точное стационарное решение системы (7) с граничными значениями, зависимость которых от x_1 , x_2 аналогична (8), (9). В безразмерных переменных профили скорости, температуры и плотности записываются в виде

$$U_2(x_2) = \frac{2x_2}{\chi}, \quad T(x_2) = 1 + \frac{(\gamma - 1) M_0^2 \text{Pr}}{2} \left(1 - \frac{4x_2^2}{\chi^2} \right), \quad \Theta(x_2) = T^{-1}(x_2). \quad (10)$$

При этом, как следует из (7) и уравнения состояния, давление в таком течении постоянно по пространству: $P = 1/(\gamma M_0^2)$.

Начальные условия для поля скорости задаются в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_1(0, x_1, x_2) &= \begin{cases} 2x_2/\chi + \beta x_2/(2r^2), & r > 1/2, \\ 2x_2/\chi + 2\beta x_2, & r \leq 1/2, \end{cases} \\ u_2(0, x_1, x_2) &= \begin{cases} -\beta x_1/(2r^2), & r > 1/2, \\ -2\beta x_1, & r \leq 1/2, \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Начальные распределения термодинамических величин соответствуют условиям невозмущенного несущего потока (10).

2.2. *Интегральные уравнения баланса.* В расчетах нелинейного взаимодействия возмущения с основным потоком использованы уравнения интегрального баланса билинейных пульсационных характеристик и кинетической энергии возмущения. Для вывода этих уравнений в рамках данной модельной задачи мгновенные значения гидродинамических величин представлены в виде

$$u_i = U_i + u'_i, \quad p = P + p', \quad \rho = \Theta + \rho'. \quad (12)$$

В (12) выделено стационарное решение U_i , P , Θ системы уравнений Навье — Стокса (несущий поток) и наложенное возмущение, удовлетворяющие условиям (8), (9). Несущий поток предполагается одномерным, зависящим только от поперечной координаты x_2 , т. е. $U_1 = U_1(x_2)$. Считается, что в окрестности границы расчетной ячейки возмущение скорости удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} u'_1(t, x_1, x_2) &= u'_1(t, -x_1, x_2), & u'_2(t, x_1, x_2) &= -u'_2(t, -x_1, x_2), \\ u'_1(t, x_1, x_2) &= -u'_1(t, x_1, -x_2), & u'_2(t, x_1, x_2) &= u'_2(t, x_1, -x_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Подстановка (12) в систему уравнений (7) и исключение слагаемых, относящихся к стационарному решению, приводит к следующим уравнениям для возмущений без ограничений на амплитуды:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \rho' U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \\ = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

После умножения уравнения (15) на пульсационную компоненту скорости u'_k и симметризации по индексам имеем уравнение для билинейных пульсаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u'_i u'_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u'_j u'_i u'_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u'_i u'_k U_j) + (\rho u'_j + \rho' U_j) \left(u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) = \\ = -\left(u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + u'_i \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(u'_k \frac{\partial}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (16)$$

В левой части (16) слагаемые в дивергентной форме найдены с использованием уравнения неразрывности (14). Интегрируя уравнение (16) по расчетной области с учетом

условий (8), (9), (13), получаем интегральное уравнение для билинейных пульсационных характеристик

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho u'_i u'_k) d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho u'_j \left(u'_i \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} p' \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) d\Omega - \\ & - \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) d\Omega - \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} d\Omega, \quad i, j, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Сворачивая уравнение (17) по индексам при $i = k$, приходим к интегральному уравнению баланса для кинетической энергии возмущений

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\rho u_i'^2}{2} d\Omega = J_1 + J_2 - \frac{1}{\text{Re}} (J_3 + \alpha J_4). \quad (18)$$

Слагаемое

$$J_1 = - \int_{\Omega} \rho u'_i u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d\Omega$$

описывает обмен энергией между возмущением (структурой) и основным потоком. Интеграл

$$J_2 = \int_{\Omega} p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} d\Omega$$

можно интерпретировать как работу при пульсационном сжатии (расширении) газа. Интегралы

$$J_3 = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2 \right] d\Omega, \quad J_4 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$$

соответствуют процессам диссипации.

Следует отметить, что возникающие при выводе интегральных уравнений интегралы по границам модельной ячейки при выбранных граничных условиях строго зануляются.

Если ввести осреднение по площади ячейки $|\Omega|$

$$\langle G \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G d\Omega,$$

то с точностью до постоянного множителя (18) можно рассматривать как уравнение для осредненных характеристик.

В приведенных выше выражениях знаки интегралов J_1, J_2 не определены, в то время как J_3, J_4 неотрицательны. Из уравнения (18) следует, что при нелинейном взаимодействии структуры с основным потоком объемная и динамическая вязкости способствуют подавлению возмущений.

Можно отметить, что уравнение (18) при определенной модификации профиля основного потока и граничных условий позволяет сформулировать вариационную задачу для оценки критического числа Рейнольдса перехода Re_{cr} , которое при $dE/dt = 0$ вычисляется как минимум функционала

$$\text{Re}_{cr} = \min \left[\frac{J_3 + \alpha J_4}{J_1 + J_2} \right].$$

Как следует из уравнения (18), при всех значениях $\text{Re} < \text{Re}_{cr}$ диссипативные слагаемые J_3 , J_4 превалируют, производная $dE/dt < 0$ и любые возмущения затухают со временем. Следовательно, возрастание объемной вязкости (или параметра α) действительно сдвигает переход в сторону больших значений Re_{cr} , но для получения количественного результата необходимо решить вариационную задачу.

2.3. *Разностная схема.* В численных расчетах система (7) аппроксимировалась весовой конечно-разностной схемой с расщеплением по пространственным координатам и физическим процессам [14]. В операторной форме схема записывается следующим образом:

$$(\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n)/\tau + L_h[\delta \mathbf{x}^{n+1} + (1 - \delta)\mathbf{x}^n] = \mathbf{F}_h^n. \quad (19)$$

Здесь $\mathbf{x}^n = (\rho_{ij}^n, u_{1,ij}^n, u_{2,ij}^n, T_{ij}^n)$ — сеточная вектор-функция решения на n -м временном слое; h — шаг пространственной сетки; τ — шаг по времени; δ — весовой параметр. Оператор L_h включает симметричные аппроксимации со вторым порядком первых и вторых пространственных производных по каждой пространственной координате. Оператор \mathbf{F}_h^n рассматривается как вектор правых частей и составлен из симметричных по каждой координате аппроксимаций со вторым порядком смешанных производных из уравнений импульсов и слагаемых диссипативной функции из уравнения энергии. На регулярной сетке с шагом h по обеим координатам схема (19) аппроксимирует систему (7) с порядком $O(\tau + h^2)$ и является абсолютно устойчивой при весовом параметре $\delta > 1/2$ [14].

В расчетной области сетка содержала $31 \times 31 = 961$ узел с шагом $h = 0,1$. Шаг по времени $\tau = 0,01$. Эволюция возмущения прослеживалась вплоть до его выхода на границу ячейки, для этого требовалось до 600 временных шагов.

2.4. *Тестовые расчеты.* Эффект дополнительного подавления возмущений, связанный с объемной вязкостью, предварительно оценивался величиной порядка нескольких процентов. В связи с этим необходимо, чтобы вычислительные погрешности не превышали величины третьего порядка малости. Для достижения такого результата разностная схема тщательно тестировалась. В частности, проверялось сохранение схемой (19) в итерациях по времени стационарности несущего потока (10) в отсутствие наложенного возмущения. Показано, что на временах $(600 \div 800)\tau$ отклонения от стационарных профилей гидродинамических величин практически не превышали погрешности округления, оставаясь на уровне $\varepsilon_s = 10^{-6}$.

Кроме того, в отсутствие несущего потока рассчитывалась разностная задача (19) с начально-краевыми условиями (8), (9), (11). В силу симметрии задачи расходимость поля скоростей равна нулю. В предположении изохорного процесса при $\rho = \text{const}$ уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно. При этом эволюция начального возмущения в виде вихря Рэнкина описывается известным аналитическим решением для вязкой несжимаемой жидкости [2]. В используемых обозначениях выражение для поля завихренности имеет вид

$$\omega(r, t) = \frac{\beta \chi \text{Re}}{t} \exp\left(-\frac{r^2 \text{Re}}{4t}\right) \int_0^{1/2} \exp\left(-\frac{\xi^2 \text{Re}}{4t}\right) I_0\left(\frac{r \text{Re}}{2t} \xi\right) \xi d\xi, \quad (20)$$

где $I_0(\zeta)$ — функция Бесселя второго рода нулевого порядка мнимого аргумента; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ — расстояние от центра вихря до произвольной точки расчетной ячейки.

В численном решении сеточная функция завихренности вычислялась на основе симметричной конечно-разностной аппроксимации

$$\omega_{ij}^n = \frac{\chi}{2} \left(\frac{u_{1,i,j-1}^n - u_{1,i,j+1}^n}{2h} - \frac{u_{2,i-1,j}^n - u_{2,i+1,j}^n}{2h} \right). \quad (21)$$

В принятом диапазоне исследуемых параметров максимальное различие во всех узлах сетки между расчетными значениями (21) и аналитическим решением (20) не превышало значения $\varepsilon_d = 5 \cdot 10^{-3}$ в интервале времени до 600τ .

Для проверки точности схемы при $\rho \neq \text{const}$ использовалось совпадение временной эволюции завихренности в центре вихря Рэнкина в сжимаемой и несжимаемой вязких жидкостях. Соответствующее аналитическое решение для завихренности выражается формулой [2]

$$\omega(0, t) = 2\beta\chi(1 - \exp(-\text{Re}/(16t))).$$

Как показали расчеты, в этом случае максимальное отличие численного решения в центре модельной ячейки от данного аналитического выражения также не превышало значения $\varepsilon_d = 5 \cdot 10^{-3}$ в интервале времени до 600τ .

Результаты проведенных тестов позволяют утверждать, что разработанная численная модель обеспечивает необходимую точность решения поставленной задачи.

3. Результаты расчетов и их обсуждение. Обмен энергией между несущим потоком и возмущениями различных пространственно-временных масштабов является одним из основных процессов как в ламинарно-турбулентном переходе, так и в развитой турбулентности. Для оценки влияния объемной вязкости на пульсационные характеристики модельного течения исследовалась эволюция во времени абсолютной величины рейнольдсовых напряжений

$$\sigma_{12}(t) = \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \int_{-\chi/2}^{\chi/2} |\rho u'_1 u'_2| dx_1 dx_2 \quad (22)$$

и кинетической энергии возмущений

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \rho(u_1'^2 + u_2'^2) dx_1 dx_2. \quad (23)$$

Подынтегральные выражения в (22), (23) вычислялись по мгновенным характеристикам течения, полученным из численного решения системы (7) с использованием разностной схемы (19). Интегралы рассчитывались по формулам прямоугольников на регулярной сетке с шагом $h = 0,1$.

Пример расчета зависимостей $E(t)$ для $\alpha = 0 \div 2$ приведен на рис. 2,а. Зависимости $\sigma_{12}(t)$ имеют аналогичный характер. На рис. 2,б представлены кривые $\sigma_{12}(\alpha)$ в различные моменты времени θ . При осреднении по тем же интервалам времени в форме

$$\langle F(\alpha) \rangle = \theta^{-1} \int_0^\theta F(t, \alpha) dt$$

зависимости $\langle E(\alpha) \rangle$, $\langle \sigma_{12}(\alpha) \rangle$ становятся более пологими по сравнению с приведенными на рис. 2,б, но их характер не меняется. Интервал времени до $\theta = 5$ по порядку величины соответствует среднему времени существования крупной структуры. В этот момент времени в расчетах уровень возмущения на границе достигал величины погрешности численного решения, после чего счет прекращался.

Как следует из приведенных графиков, с ростом коэффициента объемной вязкости кинетическая энергия возмущений и рейнольдсовы напряжения затухают более интенсивно.

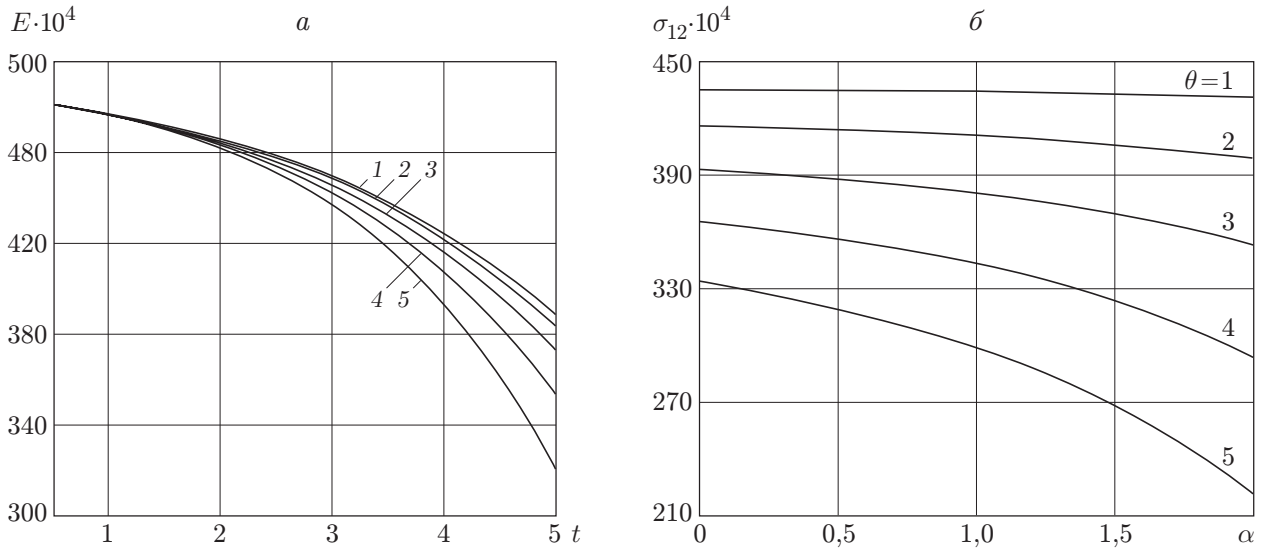


Рис. 2. Влияние объемной вязкости на эволюцию возмущений ($Re = 100$, $Pr = 0,74$, $M_0 = 0,5$, $\beta = 0,2$, $\chi = 3$, $\gamma = 1,4$):

a — зависимости кинетической энергии от времени (1 — $\alpha = 0$; 2 — $\alpha = 0,5$; 3 — $\alpha = 1$; 4 — $\alpha = 1,5$; 5 — $\alpha = 2$); b — зависимости модуля рейнولدсовых напряжений σ_{12} от параметра α (или μ_b) в различные моменты времени θ

При этом максимальное расслоение кривых $E(t)$ и наибольшее изменение $\sigma_{12}(\alpha)$ наблюдаются при $\theta = 4 \div 5$. Для оценки влияния объемной вязкости на средние пульсационные характеристики вычислялись относительные изменения

$$\Delta_F = |\langle F(\alpha) \rangle - \langle F(0) \rangle| / \langle F(0) \rangle \quad (24)$$

для интервала времени $0 \leq \theta \leq 5$. Для условий расчета, соответствующего рис. 2, как для кинетической энергии $\langle E(\alpha) \rangle$, так и для абсолютной величины рейнولدсовых напряжений $\langle \sigma_{12}(\alpha) \rangle$ характеристика Δ_F меняется в диапазоне от 0,012 до 0,096 при $\alpha = 0,5 \div 2,0$. При увеличении числа Маха оба предела пропорционально возрастают, и при $M_0 = 2$ верхний предел достигает значения $\Delta_F \approx 0,2$. Однако при таком значении M_0 выбранная выше параметризация модельного течения, как и собственно модель объемной вязкости, могут оказаться непригодными.

Известно, что в слое смешения вклад организованных вихрей в суммарные рейнولدсовы напряжения и кинетическую энергию пульсаций составляет около 40 % [12]. Вместе с тем очевидно, что молекулярная диссипация подавляет мелкомасштабные возмущения значительно сильнее, чем рассматриваемые здесь возмущения больших масштабов. Исходя из этого полученные пределы изменения величины Δ_F ($\Delta_F \leq 0,1$) могут быть распространены на весь спектр возмущений.

На основе дискретной аппроксимации уравнения (18) рассчитывалась эволюция во времени производства кинетической энергии $dE(t)/dt$. Соответствующие графики приведены на рис. 3. Для проверки точности вычислений параллельно с расчетами по уравнению (18) рассчитывалась конечно-разностная аппроксимация

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{E(t + \tau) - E(t - \tau)}{2\tau}. \quad (25)$$

Разброс данных, полученных двумя способами, не превышает 1 %. Видно, что с увеличением параметра α скорость диссипации кинетической энергии возрастает по абсолютной

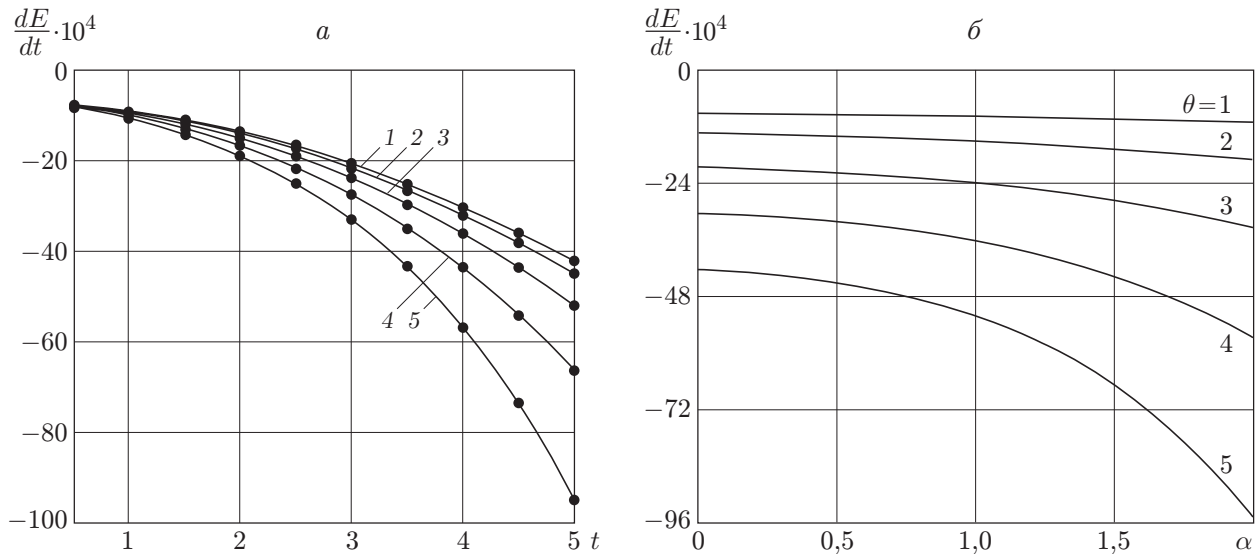


Рис. 3. Зависимости производства кинетической энергии возмущений:
a — от времени (кривые — расчет по уравнению (18), точки — расчет по уравнениям (23), (25)); *б* — от объемной вязкости в различные моменты времени θ (параметры режима и обозначения те же, что на рис. 2)

величине. С течением времени скорость диссипации также увеличивается. Осредненные по времени зависимости $\langle dE/dt \rangle$ (рис. 3, *a*) имеют меньшие градиенты, чем кривые на рис. 3, *б*, при этом характер зависимостей не меняется. С ростом числа Маха влияние объемной вязкости на скорость диссипации усиливается. Можно утверждать, что вычисленные по соотношению (18) относительные приращения для осредненных величин $\langle dE/dt \rangle$ лежат в тех же пределах, что и для кинетической энергии возмущений.

Из анализа результатов расчетов следует, что в данной модельной задаче производство кинетической энергии пульсаций всегда отрицательно. Отсутствие механизма положительной генерации энергии возмущений, например такого, как растяжение квазипродольных вихрей, соединяющих крупные структуры в слое смешения [12], является недостатком упрощенной двумерной модели, что не позволяет использовать ее для непосредственной оценки влияния объемной вязкости μ_b на критическое число Рейнольдса перехода.

Закключение. На основе простой модели численно исследовано влияние объемной вязкости на нелинейное взаимодействие вихревого возмущения конечной амплитуды с несущим сдвиговым потоком. Диапазон параметров модельного течения соответствует реальным значениям для молекулярных газов. Результаты численного моделирования позволяют сделать вывод о стабилизирующем влиянии объемной вязкости на динамику возмущений. Показано, что в слабосжимаемом течении при $M_0 < 1$ с возрастанием объемной вязкости в диапазоне $0 \leq \mu_b \leq 2\mu$ относительное снижение абсолютной величины рейнольдсовых напряжений и кинетической энергии возмущений увеличивается, приближаясь к 10 % при $\mu_b = 2\mu$. Полученные результаты не являются окончательными и требуют дальнейшего исследования на основе более совершенных моделей. Вместе с тем следует отметить, что подобное подавление пульсационной активности достигается известными механическими способами снижения сопротивления, например риблетированием обтекаемых поверхностей [5]. Таким образом, результаты указывают на гипотетическую возможность управления сопротивлением в сжимаемых потоках посредством изменения объемной вязкости газа. В частности, это можно осуществить лазерной накачкой колебательных уровней молекул газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Леонтович М. А.** Замечания к теории поглощения звука в газах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1936. Т. 6, вып. 6. С. 561–576.
2. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.
3. **Макк Л. М.** Boundary layer stability theory. Pasadena, California, 1969. (Rev. A. / Jet propulsion lab.; Doc. 900-277).
4. **Nerushev A., Novopashin S.** Rotational relaxation and transition to turbulence // Phys. Lett. 1997. V. A232. P. 243–245.
5. **Savill A. M.** Drag reduction by passive devices — a review of some recent developments // Structure of turbulence and drag reduction / Ed. by A. Gyr. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990. P. 429–465.
6. **Bertolotti F. B.** The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 93–118.
7. **Гапонов С. А., Маслов А. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
8. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** К вопросу о влиянии вращательной релаксации на ламинарно-турбулентный переход // Тез. докл. Юбилейной науч. конф., посвящ. 40-летию Ин-та механики Моск. гос. ун-та, Москва, 22–26 нояб. 1999 г. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. С. 65, 66.
9. **Физические величины: Справ.** / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
10. **Жданов В. М., Алиевский М. Я.** Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.
11. **Brau C. A., Johnkman R. H.** Classical theory of rotational relaxation in diatomic gases // Phys. Fluids. 1970. V. 52. P. 477–484.
12. **Browand F. K., Chih Ming Ho.** The mixing layer: an example of quasi two-dimensional turbulence // J. Mecanique Teor. Appl. 1983. Spec. nr. P. 99–120.
13. **Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др.** Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984.
14. **Ковеня В. М., Яненко Н. Н.** Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.

*Поступила в редакцию 24/X 2002 г.,
в окончательном варианте — 11/XII 2002 г.*
