ПМТФ, № 3, 1973

УДК 534.222.2

К ТЕОРИИ КОРОТКИХ ВОЛН В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Г. П. Солдатов

(Саратов)

Рассматривается двумерное почти стационарное течение идеального газа с малыми, но резкими изменениями его параметров. Такое движение газа описывается системой двух квазилинейных уравнений смешанного типа для радиальной и тангенциальной составляющих скорости [1, 2].

Известны частные решения [3, 4] этой системы уравнений, характеризующие изменение параметров газа в окрестности фронта ударной волны (в области коротких волн).

В работе изучается движение начального разрыва производных от компонент скорости по полярному углу и затухание коротких волн. Для одного частного случая класса точных решений двухпараметрического типа [4] приведено решение уравнений, характеризующих распространение начального скачка производных от скоростей. Получены зависимости, выражающие характер изменения скорости фронта затухающей волны и его кривизны.

1. Постановка задачи. Уравнение коротких волн для двумерных почти стационарных течений идеального газа [1] запишем в матричном виде

$$U_\delta + AU_y + B = 0 \tag{1.1}$$

$$U = \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & {}^1/_2\,(\mu - \delta) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k\mu\,/\,(\mu - \delta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Здесь $k = 1$ для движений с осевой симметрией в сферической системе координат r, θ; $k = {}^1/_2$ для плоскопараллельных движений в полярной системе координат r, θ; безразмерные функции μ, ν, δ, y связаны с радиальной u и тангенциальной v компонентами скорости и независимыми переменными равенствами

$$u = a_0 M_0 \mu, \quad v = a_0 M_0\,[{}^1/_2\,(\gamma + 1)\,M_0]^{1/2}\nu$$

$$r = a_0 t\,[1 + {}^1/_2\,(\gamma + 1)\,M_0\delta], \quad \theta = [{}^1/_2\,(\gamma + 1)\,M_0]^{1/2} y$$

Рассмотрим область, в которой собственные значения $\lambda^{1,2} = \pm 1\,/\,\sqrt{2\,(\delta - \mu)}$ матрицы A действительны, а соответствующие левые собственные векторы $l^{1,2} = [1\ \lambda^{1,2}]$ линейно-независимы. Пусть при $y = y_0$ из указанной выше области гиперболичности системы (1.1) при некотором начальном значении $\delta = \delta_0$ вектор-столбец $U\,(\delta,\ y)$ имеет разрыв производных первого порядка по переменной y. Начальные разрывы производных движутся вдоль характеристик

$$dy\,/\,d\delta = \pm\,[2\,(\delta - \mu)]^{-1/2}$$

системы (1.1). Необходимо установить закон движения начального слабого разрыва, т. е. определить характер зависимости от переменной δ.

2. Уравнения для разрывов. Задача о распространении начального разрыва производных для квазилинейных гиперболических систем общего вида (1.1) исследовалась Джеффри и Таниути [5].

Следуя работе [5], введем новые независимые переменные

$$\varphi\,(\delta,\ y) = \mathrm{const}, \quad \delta^1 = \mathrm{const}$$

полагая

$$\delta^1 = \delta, \ \varphi_\delta + \lambda^1 \varphi_y = 0$$

Тогда фронт волны описывается уравнением $\varphi(\delta, y) = 0$, а матричное уравнение (1.1) представляется в виде

$$l^{1,2}\{y_\varphi U_{\delta^1} + (\lambda^{1,2} - \lambda^1) U_\varphi + y_\varphi B\} = 0 \tag{2.1}$$

Пусть $[E]$ обозначает скачок $E_{\varphi=0^-} - E_{\varphi=0^+}$ величины E. Тогда

$$[U] = 0, \ [U_{\delta^1}] = 0$$

$$[U_\varphi] = \Pi(\delta^1) \neq 0, \ [y_\varphi] = Y(\delta^1) \neq 0$$

Рассматривая уравнение (2.1) справа и слева от фронта волны, получим равенства, связывающие неизвестные вектор-столбец

$$\Pi(\delta^1) = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \text{ и скаляр } Y(\delta^1)$$

$$l_0{}^2 y_\varphi \Pi - l_0{}^2 U_{\varphi 0} Y = 0 \tag{2.2}$$

$$l_0{}^1 \Pi' + [(\nabla_U l^1)_0 \Pi]^* U_{0\delta^1} + [\nabla_U (l^1 B)]_0 \Pi = 0$$

$$Y' = (\nabla_U \lambda^1)_0 \Pi$$

Здесь штрих означает производную по δ^1, звездочка — операцию транспонирования, индекс нуль — значение перед фронтом волны, ∇_U — градиентный оператор в пространстве U.

Подставим в уравнения (2.2) собственные значения и собственные векторы матрицы A и выражения векторов-столбцов U, Π, B и получим уравнения движения разрывов M, N, Y

$$M = [2(\delta - \mu)]^{3/2} Y' \tag{2.3}$$

$$N = [\nu_y + \sqrt{2(\delta - \mu)}\, \mu_y] Y - [2(\delta - \mu)]^2 Y' \tag{2.4}$$

$$2[2(\delta - \mu)]^2 Y'' - \{\nu_y + \sqrt{2(\delta - \mu)}\, \mu_y -$$
$$- {}^7/_2 [2(\delta - \mu)][2(\delta - \mu)]' + \sqrt{2(\delta - \mu)}\, \nu_\delta + 4k\delta\} Y' -$$
$$-[\nu_y + \sqrt{2(\delta - \mu)} \times \mu_y]' Y = 0 \tag{2.5}$$

В уравнениях (2.3) — (2.5) опущены индексы нуль и единица у переменной δ.

3. Решение уравнений для разрывов. Для приложений важны решения уравнений коротких волн симметричного вида. Воспользуемся одним из случаев двухпараметрического класса точных решений [4] системы (1.1)

$$\mu = \xi, \ \nu = c_1 y, \ \delta = \chi(\xi) \tag{3.1}$$

$$\chi(\xi) = \begin{cases} c(\xi + c_1)^2 + 2(\xi + c_1) - c_1 & \text{при } k = {}^1/_2 \\ -c_1/2 - (\xi + c_1/2) \ln c(\xi + c_1/2) & \text{при } k = 1 \end{cases}$$

В этом случае уравнение (2.5) сводится к уравнению первого порядка для функции $Z = Y'$

$$\ln Z c_2^{-1} + \frac{7 - 2k}{4} \ln[2(\delta - \xi)] + \frac{c_1 + 4k\xi}{8(\delta - \xi)} = \int \left[\frac{c_1 + 4k\xi}{8(\delta - \xi)^2} + \frac{k}{\delta - \xi}\right] d\xi \tag{3.2}$$

с решением при $k = 1/2$

$$Z = c_2 [1 + C\eta]^{-(9+cc_1)/4} \quad \eta^{(cc_1-3)/4} \exp (c_1 / 4\eta) \tag{3.3}$$

и при $k = 1$ (3.4)

$$Z = [cc_2 2^{5/4}]^{-1} [\delta - \xi]^{-5/4} \eta \exp \{- cc_1 / 8\eta \, \Psi (1, 1, 1 + \ln \eta)\}$$

Здесь и в дальнейшем $\Psi (a, b, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, связанная с неполной гамма-функцией [6]

$$\Gamma (\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} \, dt$$

$$\Gamma (\alpha, x) = x^\alpha e^{-x} \Psi (1, 1 + \alpha, x) = e^{-x} \Psi (1 - \alpha, 1 - \alpha, x)$$

где c_2 — постоянная интегрирования

$$\eta = \begin{cases} \xi + c_1 & \text{при } k = 1/2 \\ c (\xi + c_1 / 2) & \text{при } k = 1 \end{cases}$$

Решения уравнений (3.2), (3.3) и (3.2), (3.4)

$$Y = 2c_2 \left[\frac{\delta - \xi}{\eta^2}\right]^{-(c_2 c_1 + 1)/4} e^{c_1 / 4\eta} \Psi \left(1, \frac{3 - cc_1}{4}, \frac{c_1 (\xi - \delta)}{4\eta}\right) + c_3$$

$$Y = [c_2 2^{5/4}]^{-1} \int (\delta - \xi)^{-5/4} \exp \left\{- \frac{cc_2}{8\eta} \Psi (1, 1, 1 + \ln \eta)\right\} d\xi + c_3$$

представляют собой законы движения скачка Y при $k = 1/2$ и 1.

В последнем случае для одномерных движений газа $c_1 = 0$ и решение принимает вид

$$Y = [c_2 2^{5/4} \xi (\delta - \xi)^{1/4}]^{-1} \{(\delta - \xi) \Psi (1, 7/4, (\delta - \xi) / 4\xi) - 4\xi\} + c_3$$

Законы движения разрывов производных от скоростей получаются из равенств (2.3), (2.4)

$$M = [2 (\delta - \xi)]^{3/2} Z, \quad N = c_1 Y - [2 (\delta - \xi)]^2 Z$$

в которые необходимо подставить соответствующие значения δ, Y, Z для $k = 1/2$ и 1.

4. Затухание коротких волн. В уравнениях (1.1) перейдем к переменным δ^1, τ по формулам

$$\delta^1 = \delta, \quad \tau = y - \sqrt{2\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta^1} - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и неизвестные скорости μ, ν в окрестности $\tau = 0$ представим в виде разложений по степеням τ

$$\begin{aligned} \mu &= \tau \mu_1 (\delta) + \tau^2 \mu_2 (\delta) + \ldots \\ \nu &= \nu_0 + \tau \nu_1 (\delta) + \tau^2 \nu_2 (\delta) + \ldots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Подставив (4.1) в преобразованные уравнения и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ, получим уравнение первого приближения

$$\nu_1 + \sqrt{2\delta} \, \mu_1 = 0 \tag{4.2}$$

уравнения второго приближения

$$2\mu_2 + \frac{2}{\sqrt{2\delta}}\nu_2 - \nu_1' = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\delta}} = \frac{1}{\nu_1'}\left[\mu_1' - \frac{\mu_1\nu_1}{2\delta^2} - \frac{k}{\delta}\mu_1\right] \tag{4.4}$$

уравнения третьего приближения

$$3\mu_3 + 3/\sqrt{2\delta}\,\nu_3 - \nu_2' = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\delta}} = \frac{1}{\nu_2'}\left\{\mu_2' - \frac{1}{2\delta}\left[\frac{2\mu_1\nu_2}{\delta} + \nu_1\left(\frac{\mu_2}{\delta} + \frac{\mu^2_1}{\delta^2}\right)\right] - \frac{k}{\delta}\left(\mu_2 + \frac{\mu_1^2}{\delta}\right)\right\} \tag{4.5}$$

Решение уравнений (4.2), (4.4)

$$\mu_1 = \delta^{1/2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2k-3} - c_1\delta^{(3-2k)/4}\right]^{-1}$$

$$\nu_1 = -\sqrt{2\delta}\,\mu_1$$

характеризует затухание скорости изменения фронта волны. Решение уравнений (4.3), (4.5)

$$\mu_2 = \frac{A}{(4\sqrt{2}\,\omega)^3}\,t^{(2-k)/\omega}\left(\frac{\nu_1}{\delta}\right)^3$$

$$\nu_2 = {}^1/_2\sqrt{2\delta}\,(\nu_1' - 2\,\mu_2)$$

характеризует затухание кривизны фронта волны.

Здесь

$$A = \omega\left[\frac{a}{k-2+2\omega}t^2 + \frac{b}{k-2+\omega}t + \frac{c_2}{k-2}\right]t^{(k-2)/\omega} + c_3$$

$$t = \delta^\omega,\quad \omega = (3-2\,k)\,/\,4$$

$$a = (4\,\omega c_1)^2\,(1-3\,\omega + 2\,\omega^2)\,2^{-1/2}$$

$$b = 4\,\omega c_1\,[2 + (8\,k - 11)\,\omega + 6\,\omega^2]$$

$$c_2 = \sqrt{2}\,[1-8\,(1-k)\,\omega + 16\,\omega^2]$$

c_1, c_3 — постоянные интегрирования.

Поступила 29 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких волн». ПМТФ, 1962, № 1.
4. Клейнер Б. Г., Шиндяпин Г. П. Об одном классе точных частных решений уравнений коротких волн. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
5. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation. With applications to physics and magnetohydrodynamics. New York — London, Acad. Press., 1964.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.