ПМТФ, № 2, 1975

УДК 536.25+532.546

О КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ

Д. В. Любимов

(*Пермь*)

В работе изучаются конвективные движения в пористой среде, заполняющей горизонтальный цилиндр с произвольной формой поперечного сечения, при подогреве снизу. Методом малого параметра получено бесконечно много стационарных движений, образующих однопараметрическое семейство. При малых значениях параметра все эти движения устойчивы относительно малых возмущений. Рассмотрен также случай не строго вертикального нагрева. Оказывается, что при этом устойчиво лишь одно стационарное движение.

1. Рассмотрим замкнутый объем, заполненный пористой средой, насыщенной жидкостью. Уравнения тепловой конвекции в пористой среде имеют вид [1]

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f}\nabla p + g\beta_f T\gamma - \frac{\nu}{K}\mathbf{v}; \tag{1.1}$$

$$b\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость фильтрации; T — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения; p — давление; ρ — плотность; g — ускорение силы тяжести; β — коэффициент теплового расширения; ν — кинематическая вязкость; K — проницаемость; ε — пористость; $b=(\rho C_p)_m/(\rho C_p)_f$; $\chi=\varkappa_m/(\rho C_p)_f$; γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх. Индексом f снабжены величины, относящиеся к жидкости, индексом m — к пористой среде вместе с жидкостью.

Характерное время выравнивания скорости $\tau_v \sim K/\nu\varepsilon$, а выравнивания температуры $\tau_T \sim h^2/\chi_f$, где h — характерный размер полости; χ_f — температуропроводность жидкости. Для типичных в лабораторных условиях значений величин $\chi_f/\nu \sim 1$, $\varepsilon \sim 0{,}1$, $h \sim 10$ см, $K \sim 10^{-4}$ см$^{-2}$ получаем $\tau_v/\tau_T \sim 10^{-5} \ll 1$, что дает возможность опустить член с производной по времени в уравнении движения, оставляя аналогичный член в уравнении теплопроводности.

На ограничивающей объем поверхности S исчезает нормальная компонента скорости v_n, и задается такое распределение температуры, что при отсутствии движения в области образуется постоянный вертикальный градиент температуры A (при подогреве снизу $A > 0$). В этих условиях уравнения (1.1) допускают равновесное решение с $\mathbf{v}=0$. При достаточно больших A равновесие становится неустойчивым. Запишем уравнения для конечных возмущений равновесия. Введем безразмерные переменные, выбрав следующие единицы: расстояния — характерный размер полости h, скорости χ/h, времени bh^2/χ, давления $\nu\chi/K\rho_f$, температуры $\sqrt{\nu\chi A/g\beta_f K}$.

В результате получим систему уравнений

$$-\nabla p + cT\gamma - \mathbf{v} = 0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \Delta T + c\mathbf{v}\gamma;$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

с граничными условиями

$$T|_S = v_n|_S = 0.$$

Здесь $c = \sqrt{\mathrm{R}}$; $\mathrm{R} = \frac{g\beta A h^2 K}{\nu\chi}$ — аналог числа Рэлея.

Рассмотрим полость в форме горизонтального цилиндра с поперечным сечением D, ограниченным контуром Γ. Введем систему координат x, y, z, у которой ось z направлена параллельно образующей цилиндра, а ось y — вертикально вверх.

Ограничимся рассмотрением плоского движения, для которого $v_z = 0$ и все величины не зависят от z.

Введем функцию тока соотношениями

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

В терминах функции тока уравнения и граничные условия принимают вид

$$\Delta\psi - c\frac{\partial T}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial T}{\partial t} + D(\psi, T) = \Delta T + c\frac{\partial\psi}{\partial x}; \tag{1.2}$$

$$T|_\Gamma = \psi|_\Gamma = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $D(\psi, T)$ — якобиан по переменным x, y.

Уравнения для малых возмущений равновесия получаются из (1.2) отбрасыванием нелинейного члена. Для этих уравнений обычным образом [2] может быть показан принцип монотонности возмущений. Поэтому для критических возмущений будем иметь уравнения

$$\Delta\psi - c_*\frac{\partial T}{\partial x} = 0;\quad \Delta T + c_*\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

с граничными условиями (1.3) (c_* — критическое значение параметра c). Видно, что если ψ_1, T_1 есть решение задачи (1.4) — (1.3), то

$$\psi_2 = T_1;\quad T_2 = -\psi_1 \tag{1.5}$$

тоже есть решение, причем оба решения линейно независимы. Таким образом, все критические числа c_*, по крайней мере, двукратно вырождены. Более высокая кратность вырождения, по-видимому, может быть лишь при специальной симметрии области, поэтому в дальнейшем будем считать, что нижний уровень двукратно вырожден. Во всяком случае это справедливо для области квадратной формы, для которой удается получить точное решение задачи (1.4) — (1.3). Помещая начало координат в центр квадрата и принимая половину стороны квадрата за единицу длины, это решение можно записать в виде

$$\psi = (\cos\gamma_1 x + \cos\gamma_2 x)\cos\frac{\pi y}{2};$$

$$T = (\sin\gamma_1 x + \sin\gamma_2 x)\cos\frac{\pi y}{2}; \quad \gamma_{1,2} = -\pi\frac{\sqrt{2}\pm 1}{2}.$$

Второе решение получается отсюда преобразованием (1.5). Соответствующее критическое число $c_* = \pi\sqrt{2}$.

2. Перейдем к изучению стационарных решений системы (1.2) — (1.3), ответвляющихся от тривиального в точке $c = c_*$. Решения будем искать в форме рядов по дробным степеням $(c - c_*)$. Эти ряды могут быть получены стандартными методами теории ветвления [3], однако вследствие двукратного вырождения линейной задачи не удается показать сходимость получаемых рядов в отличие от случая конвекции в однородной жидкости [4], где первое критическое число не вырождено. Сами ряды удобнее получать методом неопределенных коэффициентов.

Предварительно перепишем задачу в несколько иной форме. Введем функцию $\varphi = \psi + iT$. Из (1.2) — (1.3) следует краевая задача для функции φ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\varphi - \bar\varphi)}{\partial t} - \frac{1}{2}D(\varphi, \bar\varphi) = \Delta\varphi + ic\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \varphi|_\Gamma = 0. \tag{2.1}$$

В дальнейшем граничные условия выписываться не будут. Черта сверху означает комплексное сопряжение.

Как и в теории конвекции в однородной жидкости [2], можно показать, что при $c < c_*$ не существует стационарных решений. Естественно поэтому искать решение при $c > c_*$ в виде рядов по дробным степеням $(c - c_*)$, кратным $1/n$ с четным n. Как известно [2, 4], в случае конвекции однородной жидкости решение можно представить в виде рядов с $n = 2$. Поскольку в нашем случае нелинейность имеет тоже квадратичный характер, будем искать стационарное решение в виде ряда

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x, y)\lambda^n; \quad \lambda = \sqrt{2(c - c_*)}. \tag{2.2}$$

Возможность представления решения в виде ряда по другим степеням λ далее рассматриваться не будет.

Подставляя (2.2) в (2.1) и собирая члены при одинаковых степенях λ, получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений

$$L\varphi_n = i\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} D(\varphi_j, \bar\varphi_{n-j}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $L = -2\left(\Delta + ic_*\frac{\partial}{\partial x}\right)$, и величины с неположительными индексами считаются тождественно равными нулю.

В первом порядке имеем однородную задачу $L\varphi_1 = 0$. Решение запишем в виде $\varphi_1 = \varepsilon\exp(i\eta)f$, где $\eta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а f — решение задачи о критических возмущениях, нормированное условием

$$i\left\langle \bar f\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle = c_*^{-1}\langle|\nabla f|^2\rangle = 1.$$

Угловые скобки обозначают интегрирование по D. Амплитуда ε и фаза η должны быть определены из условий разрешимости уравнений высших порядков. Оператор, сопряженный к L, совпадает с комплексно-сопряженным, поэтому условие разрешимости в n-м порядке имеет вид

$$i\left\langle \bar{f}\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x}\right\rangle + \sum_{j=1}^{n-1}\langle \bar{f}D(\varphi_j, \bar{\varphi}_{n-j})\rangle = 0. \tag{2.3}$$

В уравнение для φ_2

$$L\varphi_2=\varepsilon^2 D(f,\bar{f}) \tag{2.4}$$

не входит фаза η; поэтому φ_2 зависит лишь от амплитуды ε. Условие разрешимости уравнения (2.4) $<\bar{f}D(f,\bar{f})>=0$ выполняется тождественно, т. е. ε и η в этом порядке не определяются. При $n=3$ получаем из (2.3) после простых преобразований

$$<\bar{\varphi}_2 D(f,\bar{f})>=1.$$

Из этого соотношения определяется ε с точностью до знака, что соответствует двум возможным направлениям циркуляции при данном η.

Можно показать, что при любом η условию разрешимости (2.3) можно удовлетворить во всех порядках.

Таким образом, при $c>c_*$ можно построить бесконечно много стационарных решений системы (1.2) в виде рядов по λ. Эти решения различаются параметром η. Вопросы о сходимости разложений и существовании других решений остаются открытыми.

3. Представляет интерес исследование устойчивости построенных в п. 2 решений относительно малых возмущений. Обозначая возмущение штрихом, получим из (2.1) после линеаризации

$$\frac{\partial(\bar{\varphi}'-\varphi')}{\partial t} + D(\varphi,\bar{\varphi}') + D(\varphi',\bar{\varphi}) = L\varphi' - i\lambda^2\frac{\partial\varphi'}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим «нормальные» возмущения:

$$\varphi'(x, y, t)=\chi(x, y)\exp(\sigma t)+\varkappa(x, y)\exp(\bar{\sigma} t). \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим систему уравнений для амплитуд χ и $\varkappa$:

$$\begin{aligned} L\chi &= i\lambda^2\frac{\partial\chi}{\partial x} + D(\varphi,\bar{\varkappa}) + D(\chi,\bar{\varphi}) + \sigma(\bar{\varkappa}-\chi);\\ L\varkappa &= i\lambda^2\frac{\partial\varkappa}{\partial x} + D(\varphi,\bar{\chi}) + D(\varkappa,\bar{\varphi}) + \sigma(\bar{\chi}-\varkappa).\end{aligned} \tag{3.3}$$

В критической точке (при $\lambda=0$) все декременты вещественны и отрицательны, кроме одного, равного нулю. Для суждения об устойчивости вблизи критической точки важно знать поведение при малых λ именно того возмущения, декремент которого обращается в нуль при $\lambda=0$. Амплитуду и декремент этого возмущения представим в виде рядов по λ:

$$\chi=\sum_{k=0}^{\infty}\chi_k\lambda^k;\quad \varkappa=\sum_{k=0}^{\infty}\varkappa_k\lambda^k;\quad \sigma=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\lambda^k. \tag{3.4}$$

Подставляя ряды (3.4) в (3.3), получим в нулевом порядке

$$L\chi_0=0;\ L\varkappa_0=0.$$

Без ограничения общности можно записать $\varkappa_0=\varphi_1$; $\chi_0=a\varphi_1$, где a подлежит определению в следующих порядках. Запишем уравнения первого порядка:

$$L\chi_1=(1+a)D(\varphi_1,\ \bar{\varphi}_1)+\sigma_1(\bar{\varphi}_1-a\varphi_1);$$

$$L\varkappa_1=(1+\bar{a})D(\varphi_1,\ \bar{\varphi}_1)+\bar{\sigma}_1(\bar{a}\bar{\varphi}_1-\varphi_1).$$

Из условий разрешимости этих уравнений следует, что $\sigma_1=0$; поэтому

$$\chi_1=(1+a)\varphi_2;\ \varkappa_1=(1+\bar{a})\varphi_2.$$

Условия разрешимости уравнений второго порядка приводят к алгебраической системе для определения σ_2 и a:

$$\sigma_2(\beta\exp(-2i\eta)-a\alpha)=1+a;\ \sigma_2(a\beta\ \exp(2i\eta)-\alpha)=1+a; \tag{3.5}$$

$$\alpha=\langle|f|^2\rangle;\ \beta=\langle\bar{f}^2\rangle.$$

Система (3.5) допускает два решения:

$$a^{(1)}=\frac{\alpha+\beta\exp(-2i\eta)}{\alpha+\beta\exp(2i\eta)},\quad \sigma_2^{(1)}=-2\frac{\alpha+\beta\cos 2\eta}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$a^{(2)}=-1,\ \sigma_2^{(2)}=0.$$

Можно считать, что β вещественно, так как этого всегда можно добиться соответствующим выбором f. Рассматривая возмущения равновесия и учитывая, что c_* — первое критическое число, можно показать, что $\alpha>|\beta|$. Поэтому $\sigma_2^{(1)}<0$, и соответствующее возмущение затухает. Что касается второго решения, то можно показать, что соответствующий декремент останется равным нулю во всех порядках. Существование нейтральных возмущений является простым следствием того, что имеется непрерывное множество стационарных решений. Действительно, дифференцируя стационарные уравнения по η, получим что, уравнения (3.3) удовлетворяются при $\chi=\varkappa=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$, $\sigma=0$. Так же обстоит дело при конвекции в бесконечном плоском горизонтальном слое однородной жидкости, где возможны стационарные решения с различным периодом, и при конвекции в шаровой полости, где основное движение не обладает симметрией относительно вертикальной оси, вследствие чего поворот на произвольный угол вокруг этой оси приводит к новому решению.

Таким образом, все решения, построенные в п. 2, устойчивы вблизи порога относительно малых возмущений, причем имеется нейтральное возмущение.

4. В реальной ситуации из всей совокупности стационарных решений отбирается какое-то одно. Это может быть следствием небольшого отклонения условий задачи от рассмотренных выше. Остановимся на том влиянии, которое оказывает на движение не строго вертикальный нагрев. Пусть на границах области задано такое распределение температуры, что в режиме чистой теплопроводности в области существовал бы градиент температуры с вертикальной A_v и горизонтальной A_h составляющими. По ним можно составить два числа Рэлея — R_v и R_h. Обозначим через

A_* критическое значение A_v при $A_h=0$. Удобно выбрать следующие единицы измерения: функции тока $2c_*\chi$, температуры $2\sqrt{A_v A_*}h$, времени $bh^2/2c_*\chi$.

Снова выделяя из температуры теплопроводную часть и вводя функцию φ, приведем к задаче

$$\frac{\partial(\bar{\varphi}-\varphi)}{\partial t}+D(\varphi,\bar{\varphi})=L\varphi-i\lambda^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\xi^3-\xi^3\frac{i}{1+\lambda^2}\frac{\partial(\varphi+\bar{\varphi})}{dy}; \tag{4.1}$$

$$L=-c_*^{-1}\left(\Delta+ic_*\frac{\partial}{\partial x}\right);\quad \lambda=\left(\frac{c_v-c_*}{c_*}\right)^{1/2};\quad \xi=\left(\frac{R_h}{2R_*}\right)^{1/3}.$$

Считая λ и ξ малыми, будем искать стационарные решения уравнения (4.1) на различных лучах $\lambda=t\xi$ в виде рядов по степеням ξ. При первой степени получаем однородную задачу, откуда следует

$$\varphi_1=\varepsilon\exp(i\eta)f;\quad \eta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

При третьей степени получим уравнение

$$L\varphi_3=it^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+D(\varphi_1,\bar{\varphi}_2)+D(\varphi_2,\bar{\varphi}_1)-1. \tag{4.2}$$

Обозначим ε_v амплитуду, которая была бы при данном вертикальном нагреве и при $\xi=0$. Положим,

$$\langle\bar{f}\rangle=K\exp(i\vartheta);\ \vartheta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

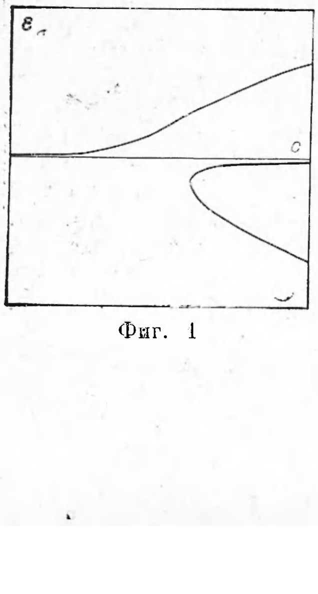
Тогда условие разрешимости уравнения (4.2) можно записать в виде

$$\varepsilon^3-(\varepsilon_v t)^2\varepsilon+K\varepsilon_v^2\exp i(\vartheta-\eta)=0. \tag{4.3}$$

Так как в (4.3) первые два слагаемых вещественны, то отсюда $\eta=\vartheta$. Вырождение, таким образом, снимается и находится выделенное значение фазы. Для определения амплитуды получается кубическое уравнение, которое имеет одно вещественное решение при

$$t^2<t_*^2=3\left(\frac{K}{2\varepsilon_v}\right)^{2/3}$$

и три вещественных решения при $t^2>t_*^2$. Лучи $\lambda=\pm t_*\xi$ являются линиями разветвления на плоскости $\lambda-\xi$, разделяющими области, где существует одно или три решения. Фиксируя ξ и рассматривая решение на различных лучах, можно получить зависимость ε от λ, которая качественно изображена на фигуре.



Фиг. 1

Таким образом, достаточно сколь угодно слабого бокового нагрева, чтобы из всей совокупности решений остались лишь одно или три, которые ведут себя, как в однородной жидкости [5].

Устойчивость полученных решений может быть исследована аналогично тому, как это сделано в п. 3. Не приводя выкладок, которые в этом случае довольно громоздки, укажем лишь окончательный результат:

$$\sigma_0=\sigma_1=0;$$

$$(4.4)\qquad \sigma_2=\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_v}\right)^2\frac{-(\alpha d+\beta\cos 2\vartheta)\pm\sqrt{(\alpha d+\beta\cos 2\vartheta)^2+(1-d^2)(\alpha^2-\beta^2)}}{\alpha^2-\beta^2},$$

где $d=2-t_2\left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon}\right)^2$. Так как $\alpha<|\beta|$, то подкоренное выражение в (4.4) положительно, т. е. σ_2 вещественно. Видно, что оба значения отрицательны только на верхней ветви из трех, изображенных на фигуре. Это означает, что устойчива лишь ветвь, соответствующая «правильному» направлению циркуляции. Нижняя ветвь неустойчива относительно одного возмущения, и ветвь, возникшая из равновесия, неустойчива относительно двух возмущений. Этим ситуация отличается от случая однородной жидкости, где нижняя ветвь устойчива.

В заключение автор выражает благодарность Г. З. Гершуни за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 3 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Katto Y., Masuoka T.** Criterion for the onset of convective flow in a fluid in a porous medium.— «Intern. J. Heat and Mass Transfer», 1967, v. 10, N. 3, p. 297—309.
2. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
3. **Вайнберг М. М., Треногин В. А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
4. **Юдович В. И.** Свободная конвекция и ветвление.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
5. **Чернатынский В. И., Шлиомис М. И.** Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 1.