

О ЧИСЛЕННОМ И АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОЛНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

С. А. Гапоноз, А. А. Маслоз

(Новосибирск)

Численным методом, предложенным в [1], проведен расчет температур полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине при температурном граничном условии $\theta(0) = 0$, где θ — амплитуда температурного возмущения. Полученные результаты указывают на ошибочность вывода работы [2] о существовании двух областей полной стабилизации.

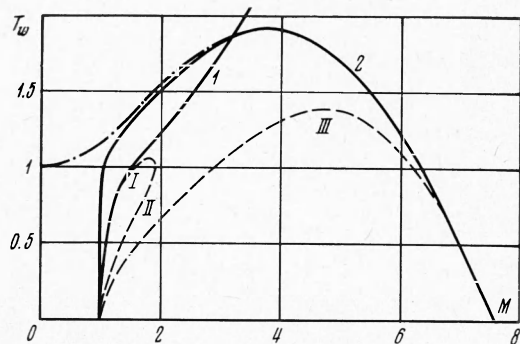
Проведен анализ асимптотического метода, примененного в [2]. Показано, что две области полной стабилизации появляются из-за того, что уравнения, использованные в [2] для построения вязких решений, неприменимы при низких температурах поверхности. Результаты анализа подтверждены прямым численным интегрированием.

1. В работе [1] предложен численный метод решения задачи о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя по отношению к малым двумерным возмущениям.

Расчеты были проведены только при температурном граничном условии

$$\theta'(0) = 0$$

где θ — амплитуда температурного возмущения, штрих означает производную по координате, нормальной к поверхности.



Фиг. 1

Маха $M \sim 2$ (см. [1]). Поэтому результаты [2] нуждаются в уточнении, что сделано в данной работе на основе метода расчета [1]. Коэффициент вязкости принимался пропорциональным температуре ($\mu = T$), число Прандтля $\sigma = 0.75$, а постоянная адиабаты $\gamma = 1.4$. Результаты расчета для разных чисел Маха M приведены на фиг. 1. Цифрой 1 помечены температуры поверхности T_w , при которых наступает полная стабилизация, первой нейтральной кривой, цифрой 2 — второй. (Существование двух нейтральных кривых при значительном охлаждении поверхности было показано в [1].) Для сравнения пунктирной линией нанесены результаты, полученные в работе [2] асимптотическим методом. Из сравнения видно существенное различие результатов, полученных численным методом и результатов, полученных асимптотическим методом.

Практический интерес представляет задача о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя и при граничном условии

$$\theta(0) = 0$$

Такое граничное условие использовалось для расчета температур полной стабилизации в [2]. Результаты в [2] получены асимптотическим методом и могут оказаться ненадежными по крайней мере в области чисел

Численным методом получена одна область полной стабилизации, ограниченная при $M < 3.2$ кривой 1, а при $M > 3.2$ — кривой 2. Асимптотическим методом [2] получено две таких области. Первая ограничена пунктирной кривой, имеющей две ветви, обозначенные на фиг. 1 цифрами I и II. Для $M \leq 1.4$ ветвь I совпадает с кривой I. Вторая область ограничена кривой III. Чтобы понять причины, вызвавшие такое различие, рассмотрим подробнее возможность применения асимптотического метода к решению задачи о полной стабилизации.

2. Для амплитуд возмущений в работе [3] была получена следующая система уравнений:

$$\frac{i(U-c)}{T} f + \frac{U'}{T} \varphi = -\frac{iP}{\gamma M^2} + \frac{\mu}{\alpha R} f'' \quad (2.1)$$

$$\frac{i(U-c)}{T} \alpha^2 \varphi = -\frac{P'}{\gamma M^2} + \frac{\mu}{\alpha R} \alpha^2 \varphi'' \quad (2.2)$$

$$i(U-c)rT - \frac{T'}{T} \varphi + if + \varphi' = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{i(U-c)}{T} \theta + \frac{T'}{T} \varphi = -(\gamma-1)(if + \varphi') + \frac{\gamma^2 \mu}{\alpha R} \theta'' \quad (2.4)$$

$$P = rT + \theta / T \quad (2.5)$$

Здесь U и T — осредненные по времени скорость и температура, f , $\alpha\varphi$, θ , r , P — возмущения продольной и поперечной скоростей, температуры, плотности и давления; γ — постоянная адиабаты, M — число Маха, μ — коэффициент вязкости, R — число Рейнольдса, α — волновое число возмущения, $c = c_r + ic_i$ — фазовая скорость возмущения. При выводе системы уравнений (2.1)–(2.5) предполагалось, что зависимость возмущений от продольной координаты x и времени имеет вид $\exp ia(x - ct)$.

Пусть решение этой системы удовлетворяет следующим трем граничным условиям на поверхности:

$$f_w = \varphi_w = \theta_w = 0 \quad (2.6)$$

Если произведение αR достаточно велико, то фундаментальная система решений может быть составлена из решения невязких уравнений — $\{\Phi, F, \Theta\}$, и двух линейно-независимых вязких решений — $\{\varphi_3, f_3, \theta_3\}$ и $\{\varphi_5, f_5, \theta_5\}$ [4]. Тогда из условия (2.6) можно получить следующее соотношение на поверхности [4]:

$$\frac{\Phi_w}{F_w} = \left\{ \frac{\varphi_{3w}}{f_{3w}} + \frac{\varphi_{5w}}{\theta_{5w}} \left[(\gamma-1) M_c^2 - \frac{\theta_{3w}}{f_{3w}} \right] - (\gamma-1) M^2 c \frac{\varphi_{3w}}{f_{3w}} \frac{f_{5w}}{\theta_{5w}} \right\} \left\{ 1 - i(\gamma-1) M^2 c \left[\frac{U_w'}{c} - \frac{T_w'}{(\gamma-1) M^2 c^2} \right] \left(\frac{\varphi_{5w}}{\theta_{5w}} - \frac{f_{5w}}{\theta_{5w}} \frac{\varphi_{3w}}{f_{3w}} \right) - \frac{f_{5w}}{\theta_{5w}} \frac{\theta_{3w}}{f_{3w}} \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

Левая часть уравнения (2.7) обычно записывается в виде [5]

$$\frac{\Phi_w}{F_w} = \frac{ic}{U_w'} \frac{u + iv - 1}{u + iv} \quad (2.8)$$

В случае полной стабилизации $\alpha = 0$, $c = 1 - M^{-1}$ и для определения критической температуры поверхности в выражении (2.8) достаточно знать только $v(T_w)$ [5], для которой с хорошей точностью выполняется равенство

$$v(T_w) = -\pi \frac{U_w' (1 - M^{-1})}{T_w} \left[\frac{T^2}{U'^3} \frac{d}{dy} \left(\frac{U'}{T} \right) \right]_{U=c=1-M^{-1}} \quad (2.9)$$

Правая часть уравнения (2.7) зависит только от вязких решений. Если $\alpha R \gg 1$ и вблизи поверхности справедливы оценки

$$T, T', U, U' \sim 1, \quad \frac{d}{dy} \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad U - c \sim 1, \quad f \sim 1 \quad (2.10)$$

$$\varphi \sim \varepsilon f, \quad \theta \sim f, \quad P \sim \varepsilon^2 f \quad (\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2})$$

то для главных членов вязких асимптотических решений можно записать следующую систему уравнений [3]:

$$f'' - i\alpha R \frac{U - c}{T^2} f' = 0 \quad (2.11)$$

$$\varphi' + if = \frac{i(U - c)}{T} \theta \quad (2.12)$$

$$\theta'' - i\alpha R \frac{U - c}{T^2} \theta = 0 \quad (2.13)$$

Принимая вне пограничного слоя вязкие решения в виде $\{\varphi_3, f_3, 0\}$ и $\{\varphi_5, 0, \theta_5\}$ [4], из системы (2.11)–(2.13) получим

$$\theta_3 \equiv f_3 \equiv 0$$

и выражение (2.7) примет вид

$$\frac{\Phi_w}{F_w} = \left\{ \frac{\Phi_{3w}}{f_{3w}} + (\gamma - 1) M^2 c \frac{\Phi_{5w}}{\theta_{5w}} \right\} \left\{ 1 - i(\gamma - 1) M^2 c \frac{\Phi_{5w}}{\theta_{5w}} \left[\frac{U_w'}{c} - \frac{T_w'}{(\gamma - 1) M^2 c^2} \right] \right\}^{-1} \quad (2.15)$$

В рассматриваемом случае, т. е. при $\alpha R \gg 1$ и выполнении условий (2.10), решения системы (2.11)–(2.13) можно найти аналитически. Подставляя найденные решения в (2.15), а (2.15) в уравнение (2.8), можно получить соотношение, которое использовалось в работе [2] для вычисления собственных значений.

В области чисел $M \sim 2$, $\alpha R < 10$ и результаты, полученные асимптотическим методом, сомнительны из-за нарушения условия $\alpha R \gg 1$. Этим можно объяснить расхождение результатов численного и асимптотического методов решения задачи о полной стабилизации в этой области чисел M .

При числах M , близких к единице, выполняется неравенство $\alpha R \gg 1$, но становится малой температура поверхности и нарушается условие $T \sim 1$ в (2.10), что может привести к ошибочным результатам при асимптотическом методе решения. Однако для ветви I (фиг. 1) совпадение численных и асимптотических результатов очень хорошее. Для ветвей II и III численным методом решений не было обнаружено.

Чтобы понять причину такого расхождения, рассмотрим например, вывод уравнения (2.12). При выводе этого уравнения из уравнений (2.3) предполагалось, что член $\varphi T' / T$ много меньше единицы. Сохраним для φ оценку ε , примем $T \sim T_w$ и оценим $\varepsilon T_w' / T_w$, исходя из результатов, полученных в [2]. Величину T_w' / T_w определим из формулы (2.9) работы [2]

$$\frac{T_w' c}{T_w U_w'} = \frac{0.4(\gamma - 1) M^2 c - 0.9(T_w - 1)c}{T_w}$$

Так как было принято, что $\mu = T$, то для пограничного слоя на плоской пластине $U_w' = 0.332/T_w$. Результаты оценок приведены в таблице. Видно, что для ветви I пренебрежение членом $\varphi T' / T$ возможно. Для ветвей II и III пренебрежение этим членом в уравнении (2.3) сомнительно.

M	Ветвь I			Ветвь II			Ветвь III		
	T_w	ϵ	$\epsilon T'_w/T_w$	T_w	ϵ	$\epsilon T'_w/T_w$	T_w	ϵ	$\epsilon T'_w/T_w$
1.1	0.586	0.017	0.009	0.22	0.033	0.20	0.166	0.032	0.37
1.25	0.798	0.050	0.011	0.394	0.094	0.16	0.304	0.091	0.29
1.43	0.929	0.097	0.014	0.554	0.18	0.14	0.427	0.17	0.26
1.67	1.031	0.170	0.021	0.742	0.25	0.10	0.552	0.24	0.22
1.8	1.055	0.220	0.030	0.872	0.28	0.08	0.62	0.29	0.21

но¹. Кроме того, для ветви I с уменьшением M уменьшается как ϵ , так и $\phi T'/T$, т. е. точность приближенных расчетов повышается. Для ветвей II и III при уменьшении ϵ увеличивается $\phi T'/T$, что делает ненадежными результаты асимптотического решения.

Так как для ветвей II и III $\phi T'/T$ не мало, система (2.11)–(2.13) неправильно описывает поведение вязких решений. Возмущения температуры влияют друг на друга, что видно из (2.1)–(2.5), поэтому условие (2.14), а значит, и уравнение (2.15), использованное в [2], не должны выполняться.

Таким образом, ошибка работы [2], во-первых, заключается в том, что для построения вязких решений использовалась система (2.11)–(2.13), которая неправильно описывает поведение таких решений, когда $\phi T'/T$ не мало (ветви II и III). Во-вторых ошибка, связанная с неправомерностью использования системы (2.11)–(2.13), могла существенно увеличиться при малых T_w за счет приближенного интегрирования этой системы. Чтобы проверить высказанные здесь утверждения, были проведены дополнительные расчеты.

3. Из (2.8) следует, что

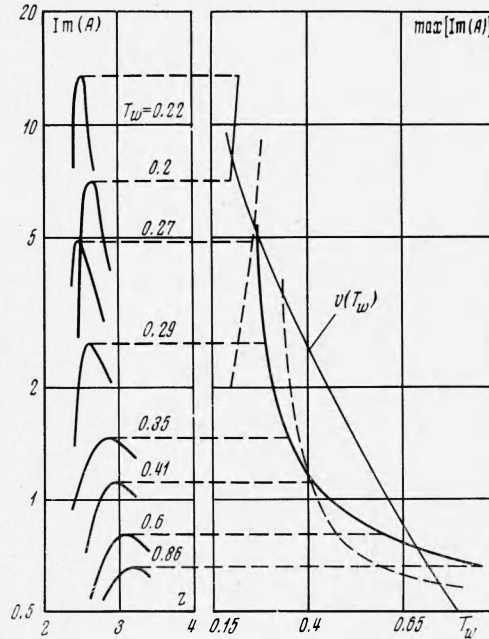
$$u + iv - 1 = \frac{U'_w}{ic} \frac{\Phi_w}{F_w} \left[1 - \frac{U'_w}{ic} \frac{\Phi_w}{F_w} \right]^{-1} \equiv A(z) \quad (3.1)$$

где Φ_w/F_w определяется соотношением (2.7). Правая часть равенства (3.1) зависит только от вязких решений, которые можно найти прямым численным интегрированием.

В первой серии расчетов (расчеты проводились для $M = 1.2$) численно интегрировалась система (2.11)–(2.13). Мнимая часть найденных решений ($\text{Im}(A)$) строилась как функция z

$$z = (cR)^{1/3} \left[\frac{3}{2} \int_0^z \frac{\sqrt{U-c}}{T} dy \right]^{2/3}$$

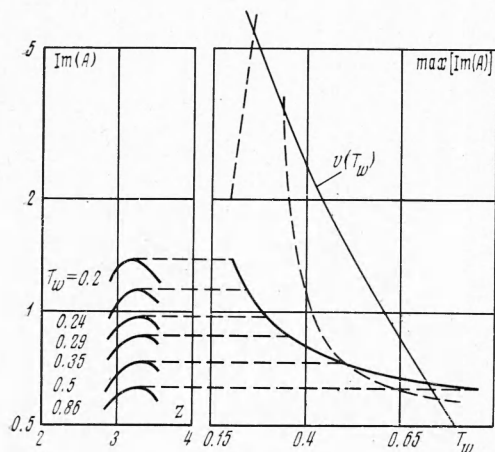
¹ Аналогичные пренебрежения делаются и при выводе уравнений (2.11) и (2.13), но они не так очевидны.



Фиг. 2

где y_c — расстояние по нормали к поверхности до точки $U=c$. Величина $\max [\operatorname{Im}(A)]$ зависит от температуры поверхности. Пересечения кривых $v(T_w)$ и $[\operatorname{Im}(A)]$ дают температуры полной стабилизации (фиг. 2). Такая же схема определения температур полной стабилизации была принята в [2] с той лишь разницей, что вязкие решения искали аналитически. Пунктирной линией на фиг. 2 нанесены результаты, полученные по асимптотическим формулам [2].

Видно, что качественная картина получилась такая же, как и в работе [2]. Линия $\max [\operatorname{Im}(A)]$ три раза пересекает линию $v(T_w)$, что указывает



Фиг. 3

на существование двух областей полной стабилизации. Количественное расхождение тем больше, чем меньше величина T_w . Это расхождение указывает на то, что с уменьшением T_w уменьшается степень приближения аналитических решений системы (2.11) — (2.13), использованных в [2], к точным.

Во второй серии расчетов для получения вязких решений интегрировалась полная система уравнений (2.1) — (2.5). Результаты приведены на фиг. 3. Видно, что линия $\max [\operatorname{Im}(A)]$ пересекает линию $v(T_w)$ только один раз.

На основе проведенных расчетов, можно сделать заключение о том, что при малых значениях T_w для построения вязких решений нельзя пользоваться системой (2.11) — (2.13), а вывод работы [2] о существовании двух областей полной стабилизации является ошибочным.

Авторы благодарят В. Я. Левченко за постоянное внимание к работе и А. С. Дрыжова за полезные обсуждения.

Поступила 4 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов С. А., Маслов А. А. Численное решение задачи о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя. ПМТФ, 1972, № 2.
2. Reshotko E. Transition reversal and Tollmien-Schlichting instability. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.
3. Dunn D. W., Lin C. C. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 7.
4. Lees L., Reshotko E. Stability of the compressible laminar boundary layer. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt 4.
5. Ливень Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.