

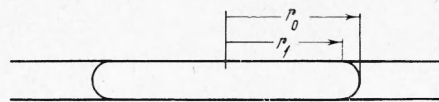
СОПРОТИВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ ДВИЖЕНИЮ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ, СДАВЛЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Ю. И. Петухов, Н. Г. Скоробогатов, В. И. Сосунов

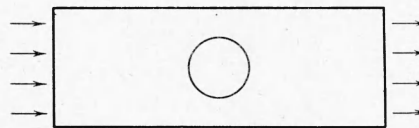
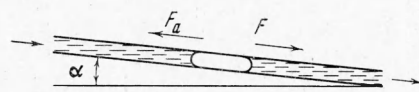
(Новосибирск)

Известно [1], что при значениях числа Рейнольдса $N_{Re} < 1$ уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости, в которых сделаны приближения Стокса, дают хорошую сходимость с экспериментальными значениями коэффициентов сопротивления для цилиндра, сферы и других тел.

В данной работе указанное приближение применено к случаю движения газового пузыря, сильно сдавленного параллельными плоскими стенками (фиг. 1). При этом форма пузыря принимается близкой к цилиндрической из соображения, что при сильном раздавливании газового пузыря разность расстояний ($r_0 - r_1$) от оси пузыря до точки смачивания r_1 и до конца мениска r_0 мала по сравнению с самими этими размерами. Это позволяет приближенно считать пузырь цилиндром с радиусом, равным r_0 .



Фиг. 1



Фиг. 2

Если в уравнениях Навье — Стокса отбросить инерционные члены, то уравнения для стационарного случая примут вид

$$1 / \rho \operatorname{grad} p = \nu \Delta V \quad (1)$$

Кроме того, выполняется уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} V = 0$$

Применяя к обеим частям (1) операцию div , получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = 0 \quad (2)$$

Система уравнений (1) и (2) определяет поля течений в приближении Стокса.

Введем прямоугольную систему координат с осью x вдоль потока, осью z , перпендикулярной плоскости пластины, и осью y , параллельной пластинам.

Из бесконечности слева на цилиндр набегают поток вязкой жидкости в направлении оси x . Будем считать, что пузырь не движется, т. е. сила сопротивления скомпенсирована какой-либо внешней силой.

Необходимо решить систему уравнений (1) и (2) со следующими условиями. При удалении от пузыря в бесконечность поток вырождается в известное течение Пуазейля; на поверхности пузыря нормальная к его поверхности компонента скорости равна нулю. Предполагается, что сила поверхностного натяжения достаточно велика, так что форма сечений пузыря плоскостями, параллельными стенкам, мало отличается от окружностей.

Примем за линейный масштаб радиус пузыря r_0 , а за масштаб скорости — максимальное значение скорости V_0 на бесконечности. При $\xi = x / r_0 \rightarrow \infty$ или $\eta = y / r_0 \rightarrow \infty$ отличной от нуля будет только одна компонента скорости

$$\omega = V / V_0 (u, v, 0) \\ u = 1 - \frac{r_0^3}{h^2} \zeta^2 \quad \left(\zeta = \frac{z}{r_0} \right) \quad (3)$$

Здесь $2h$ — расстояние между пластинами. Введем полярные координаты R и φ

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi \quad (r = R / r_0)$$

Уравнение (2) в этих координатах примет вид

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \left(\pi = \frac{p}{\rho V_0^2} \right) \quad (4)$$

Здесь π — безразмерное давление. Будем решать уравнение (4) методом разделения переменных и ограничимся первым членом получающегося ряда

$$\pi = a (r + b/r) \cos \varphi \quad (5)$$

где a и b — константы интегрирования, подлежащие определению. Из геометрии течения и формулы (5) ясно, что $\partial \pi / \partial \xi = a$ при $r \rightarrow \infty$. Везде выше предполагается, что давление не зависит от ζ и компонента скорости в направлении ζ равна 0. Компоненты u и v зависят от ζ , поэтому из (1) для них имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = a N_{\text{Re}} \left(1 - \frac{b}{r^2} \cos 2\varphi \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} = -a N_{\text{Re}} \frac{b}{r^2} \sin 2\varphi \quad (7)$$

Величины u и v должны обращаться в нуль при $\zeta = \pm h/r_0$. Кроме того, радиальная скорость $u_r = u \cos \varphi + v \sin \varphi$ при $r = 1$ также должна обращаться в нуль. Из (3) и (6) при $r \rightarrow \infty$ следует соотношение $a N_{\text{Re}} = -2 r_0^2 / h^2$.

Учитывая приведенное соотношение, из (6) и (7) получаем решения

$$u = \left(1 - \frac{r_0^2}{h^2} \zeta^2 \right) \left(1 - \frac{b}{r^2} \right) \cos 2\varphi, \quad v = - \left(1 - \frac{r_0^2}{h^2} \zeta^2 \right) \frac{b}{r^2} \sin 2\varphi$$

Из двух последних выражений имеем для u_r

$$u_r = \left(1 - \frac{r_0^2}{h^2} \zeta^2 \right) \left(1 - \frac{b}{r^2} \right) \cos \varphi$$

Отсюда и из условия на поверхности цилиндра следует, что $b = 1$, и следовательно

$$u_r = \left(1 - \frac{r_0^2}{h^2} \zeta^2 \right) \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \varphi \quad (8)$$

Поверхность цилиндра имеет «жидкую» границу, поэтому касательное напряжение на поверхности цилиндра должно быть равным нулю. Полученное решение удовлетворяет этому условию лишь приближенно. Однако при расчете суммарной силы, действующей в потоке на цилиндр, будем считать касательное напряжение точно равным нулю, а искомой силой будет суммарная сила нормальных к поверхности напряжений. Нормальная сила, действующая на элемент цилиндра, как известно [2], равна

$$F_p = -p + 2\mu \frac{\partial U}{\partial R} \quad (U = uV_0) \quad (9)$$

где U — размерная компонента скорости V . Перейдем в (8) к размерным величинам

$$U_R = u_r V_0 = V_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \cos \varphi \quad (10)$$

Из (10) имеем

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} \Big|_{R=r_0} = V_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{2}{r_0} \cos \varphi$$

Сила, действующая на цилиндр

$$F = \int_S F_R \cos \varphi r_0 dz d\varphi = 8\pi\mu V_0 h \left(\frac{2}{3} + \frac{r_0^2}{h^2} \right) \quad (11)$$

При сделанных предположениях выражение для силы сопротивления примет вид

$$F = 8\pi\mu V_0 r_0^2 / h \quad (r_0^2 / h^2 \gg 1) \quad (12)$$

Формула (12) была подвергнута экспериментальной проверке. Для этого была изготовлена установка, рабочая часть (фиг. 2) которой, представляет собой плоский канал с параллельными стенками, расстояние между которыми $2h = 1$ мм, длина канала $L = 350$ мм, ширина — $D = 80$ мм. Высота канала $2h$ была выбрана из сле-

дующих соображений. Величина перепада гидростатического давления по высоте канала должна быть меньше давления внутри пузыря при его диаметре порядка 10 мм. При $\sigma = 70 \text{ дин/см}$ для высоты канала получается величина порядка 1 мм.

Внешней силой, удерживающей пузырь в потоке жидкости в неподвижном состоянии, являлась сила Архимеда. Для того чтобы пузырь не деформировался под действием сопротивления жидкости и силы Архимеда и чтобы обеспечить $N_{\text{Re}} < 1$, наклон канала (угол α) к плоскости горизонта составлял не более 5° . В наклонном положении канала всплывающий пузырь останавливался подбором величины расхода жидкости, протекающей через поперечное сечение канала.

Пусть радиус пузыря — r_0 , угол наклона плоскости канала к горизонту — α , плотность жидкости — ρ и ускорение свободного падения — g . Тогда архимедова сила выталкивания для пузыря выразится формулой

$$F = 2\pi r_0^2 h \rho g \sin \alpha \quad (13)$$

Так как профиль скорости вдали от пузыря имеет вид $V = V_0 (1 - Z^2/h^2)$, то расход жидкости в единицу времени при ширине канала D определяется выражением

$$Q = DV_0 \int_{-h}^h \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) dz = \frac{4}{3} DV_0 h \quad (14)$$

Используя (12) — (14), получаем

$$K = \frac{3Q\mu}{h^3 D g \rho \sin \alpha} = 1 \quad (15)$$

Выражение (15) является условием равновесия пузыря в канале. Это условие не зависит от r_0 , откуда следует, что если в эксперименте уравновешен пузырь некоторого радиуса, то пузырь любого другого радиуса (с учетом сделанных ранее оговорок) также будет находиться в равновесии.

Приводим экспериментальные значения комплекса K для некоторых значений угла ($\sin \alpha$) наклона и диаметра ($2r_0$) пузыря в мм

$\sin \alpha = 0.19$	0.3	0.35	0.37	0.52	0.63
$2r_0 = 6.0$	6.0	5.5	6.0	6.0	5.8
$K = 1.20$	0.89	0.81	1.14	1.10	1.09
$\sin \alpha = 0.63$	0.75	0.75	0.75	0.77	0.77
$2r_0 = 6.7$	5.0	8.8	10.2	5.5	9.2
$K = 1.29$	1.02	1.16	1.28	0.81	0.92

Отсюда видно, что $K = 1.0 \pm 0.15$; кроме того, при фиксированном значении K несколько зависит от r_0 ; однако эта зависимость не очень значительна ($\approx 20\%$) и едва превышает разброс экспериментальных точек.

Из (12) видно, что F обратно пропорциональна h ; это кажущееся противоречие снимается, если вспомнить, что уравнение (12) получено при условии $r_0^2/h^2 \gg 1$, или рассмотреть формулу (11). При увеличении h с сохранением величин прочих параметров не только изменяется площадь пузыря, что должно вести к увеличению силы сопротивления, но изменяются и градиенты в профиле скорости. При увеличении h градиенты скорости уменьшаются, что снижает сопротивление движению. Результирующий эффект выражен формулами (11) и (12).

Поступила 3 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

- Хант Д. Н. Динамика несжимаемой жидкости. М., «Мир», 1967.
- Мексун Д. New methods in laminar boundary-layer theory. Oxford, Pergamon Press, 1961.