

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд Б. Е., Калинин В. И., Петрушин А. Б. и др. Докл. АН СССР, 1978, 240, 2, 627.
2. Shapiro I., Keilin B., Williams R. E. et al. J. Amer. Chem. Soc., 1963, 85, 20, 3167.
3. Lipscomb W. N. Boron hydrides.— N. Y.: Amsterdam: W. A. Benjamin Inc., 1963.
4. Жигач А. Ф., Стасинович Д. С. Химия гидридов.— Л.: Химия, 1969.
5. Граймс Р. Карбораны.— М.: Мир, 1974.
6. Гейдон А., Герл И. Ударная труба в химической физике высоких температур.— М.: Мир, 1966.
7. Гальченко Г. Л., Тамм И. Б., Брыкина Е. И. и др. ЖФХ, 1985, 59, 11, 2689.
8. Борисов А. А. Докт. дис.— М.: ИХФ АН СССР, 1970.
9. Похил П. Ф., Беляев А. Ф., Фролов Ю. В. и др. Горение порошкообразных металлов в активных средах.— М.: Наука, 1972.
10. Захаркин Л. И., Калинин В. И., Балькова Т. И. и др. ЖОХ, 1973, 43, 10, 2258.
11. Astheimer R. J., Sneddon L. G. Inorg. chem., 1983, 22, 13, 1928.
12. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.
13. Forst W. Theory of unimolecular reactions.— N. Y.; London: Acad. press, 1973.

*Поступила в редакцию 15/VI 1987*

УДК 536.46

## АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ

*Ю. А. Буевич, Н. А. Королева, С. П. Федотов*

*(Свердловск)*

Теоретическому анализу горения спрессованных порошков металлов в газообразном окислителе, фильтрующемся в зону реакции, посвящено большое число работ (см., например, [1—5]). Наиболее полно в рамках квазигомогенной модели исследованы стационарные режимы горения, дана классификация различных по структуре тепловых волн химической реакции [1—3]. В [4] рассмотрена задача об устойчивости стационарных режимов и найдено, что может иметь место одномерная и морфологическая неустойчивость плоского фронта волны горения. Исследованию нестационарного развития волны горения, включающего этапы кинетического и диффузионного режимов, посвящена работа [5], в которой найдено автомодельное решение нестационарной системы уравнений горения в фильтрационном режиме, а также численно решена задача об автоколебательном режиме на кинетическом этапе.

Цель настоящей работы состоит в аналитическом определении амплитуды и частоты одномерных автоколебаний температуры и скорости движения плоского фронта фильтрационного горения при небольшом удалении от границы устойчивости. Исследование проведено методами теории бифуркации [6, 7], успешно использованной при анализе автоколебательных режимов горения безгазовых и диффузионных систем [8—10].

### Постановка задачи

Занимем в континуальном приближении в системе координат, движущейся справа налево со скоростью движения волны горения  $U(t)$ , систему уравнений фильтрационного горения [1—5]

$$\begin{aligned}
 C \frac{\partial T}{\partial t} + CU(t) \frac{\partial T}{\partial x} + c_{\Gamma} \rho_{\Gamma} v \frac{\partial T}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q_{\Gamma_0} w, \\
 \frac{\partial \rho_{\Gamma}}{\partial t} + U(t) \frac{\partial \rho_{\Gamma}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{\Gamma} v) &= \mu_{\Gamma} \rho_0 w, \quad v = -k \frac{\partial p}{\partial x}, \\
 \frac{\partial \eta}{\partial t} + U(t) \frac{\partial \eta}{\partial x} &= w, \quad p = R \rho_{\Gamma} T / \sigma, \quad \rho_{\kappa} = \rho_0 (1 - \eta), \\
 \rho_{\Pi} &= \mu_{\Pi} \rho_0 \eta, \quad \mu_{\Pi} = 1 - \mu_{\Gamma}, \quad C = c_{\kappa} \rho_{\kappa} + c_{\Gamma} \rho_{\Gamma} + c_{\Pi} \rho_{\Pi}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь  $T$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  — температура, давление, плотность единицы объема, глубина превращения;  $v$  — скорость фильтрации газа;  $C$ ,  $c$  — теплоемкости единицы объема и массы;  $\lambda$  и  $k$  — коэффициенты теплопроводности и проницаемости;  $\sigma$  — пористость;  $\mu$  — стехиометрический коэффициент;  $Q$  и  $w$  — теплота и скорость химической реакции;  $R$  — газовая постоянная. Индексы: г — газ, 0 — исходное конденсированное вещество, к — текущее конденсированное вещество, п — твердый продукт реакции.

Скорость химической реакции  $w$  в системе (1) моделируем в виде  $\delta$ -функции [8]

$$w = A(T)\delta(x), \quad A(T) \sim \exp[-E/2RT], \quad (2)$$

где конкретный вид функции  $A(T)$  определяется из анализа структуры зоны горения. Отметим, что в [4] использована более сложная аппроксимация в виде  $w = A(T)\delta(T - T_\phi)$ , однако, как показали численные расчеты [11], это приближение не обладает преимуществами по сравнению с представленным (2).

Ниже ограничимся анализом кинетического режима горения, когда  $\eta = 1$  при  $x > 0$ , поскольку в фильтрационном режиме плоский фронт в одномерном приближении абсолютно устойчив [4]. Учитывая, что на фронте горения ( $x = 0$ )  $\eta = 1$ , получаем после интегрирования уравнения для  $\eta$  с учетом (2) выражение для нестационарной скорости движения фронта горения

$$U(t) = A[T(0, t)]. \quad (3)$$

В ситуации, когда  $v \gg U(t)$ , время релаксации установления стационарного поля давления (плотности)  $\tau_r \sim L/v$  ( $L$  — характерный пространственный масштаб) много меньше времени релаксации поля температуры  $\tau_r \sim L^2C/\lambda \sim L/U(t)$ , поэтому на временах порядка  $\tau_r$  можно пренебречь первыми двумя слагаемыми во втором уравнении системы (1). Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_r v) = \mu_r \rho_0 A(T)\delta(x).$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем выражение для скачка потока газа на фронте горения

$$\rho_r 2v_2 - \rho_r 1v_1 = \mu_r \rho_0 U(t). \quad (4)$$

Здесь и ниже индексами 1, 2 отмечены величины при  $x < 0$  и  $x > 0$  соответственно.

Учитывая, что  $\rho_r \ll \rho_0 \sim \rho_n$ , запишем выражения для температур перед  $T_1$  и за фронтом  $T_2$  горения

$$c_k \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad c_n \rho_n \frac{\partial T_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}.$$

На основе равенства  $c_k = \mu_r c_r + \mu_n c_n$  ( $Q$  не зависит от  $T$  [2–5]) можно показать, что  $V_1 = V_2 = V$ . При встречном потоке газа ( $\rho_r 1v_1 = G_1$ )  $V = c_k \rho_0 U(t) + c_r G_1$ , при спутном ( $\rho_r 2v_2 = -G_2$ )  $V = c_n \rho_n U(t) - c_r G_2$ .

Представим нестационарную скорость фронта в виде

$$U(t) = U^0 \exp\left[\frac{E}{2RT_\phi^2}(T - T_\phi)\right], \quad (5)$$

где  $U^0$  и  $T_\phi$  — скорость и температура на фронте в стационарном режиме, и перепишем уравнения для температур

$$\begin{aligned} c_k \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + M^0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + LU^0 \left\{ \exp\left[\frac{E}{2RT_\phi^2}(T_1(0, t) - T_\phi)\right] - 1 \right\} \frac{\partial T_1}{\partial x} &= \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \\ c_n \rho_n \frac{\partial T_2}{\partial t} + N^0 \frac{\partial T_2}{\partial x} + LU^0 \left\{ \exp\left[\frac{E}{2RT_\phi^2}(T_1(0, t) - T_\phi)\right] - 1 \right\} \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

При встречном потоке газа  $M^0 = c_{r0}U^0 + c_r G_1$ ,  $L = c_{r0}$ ; при спутном потоке  $M^0 = c_{n0}U^0 - c_r G_2$ ,  $L = c_{n0}$ . Граничные условия на фронте  $x = 0$  и бесконечности:

$$\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) - \lambda \frac{\partial T_2}{\partial x}(0, t) = Q_{\Omega_0} U^0 \exp \left[ \frac{E}{2RT_{\Phi}^2} (T_1(0, t) - T_{\Phi}) \right], \quad (7)$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad T_1(-\infty, t) = T_{01}, \quad T_2(\infty, t) < \infty.$$

Начальная температура  $T_{01}$  связана с температурой на фронте горения следующим образом [2]:  $T_{\Phi} = T_{01} + Q_{\Omega_0} U^0 / M^0$ .

Таким образом, задача об автоколебаниях сведена к анализу двух уравнений для температур (6) и граничных условий для них (7).

Перепишем систему уравнений (6), (7) в безразмерном виде

$$(1 + \delta) \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} + \gamma \delta [e^{\alpha(\Theta_1(0, \tau) - 1)} - 1] \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2}, \quad -\infty < z < 0,$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} + \gamma \delta [e^{\alpha(\Theta_1(0, \tau) - 1)} - 1] \frac{\partial \Theta_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2}, \quad 0 < z < \infty, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial z}(0, \tau) - \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}(0, \tau) = \beta e^{\alpha(\Theta_1(0, \tau) - 1)},$$

$$\Theta_1(0, \tau) = \Theta_2(0, \tau), \quad \Theta_1(-\infty, \tau) = 0, \quad \Theta_2(\infty, \tau) < \infty.$$

Здесь

$$\Theta_i = \frac{T_i - T_{01}}{T_{\Phi} - T_{01}}; \quad \tau = \frac{ic_{n0} U^0}{\lambda}; \quad z = \frac{xc_{n0} U^0}{\lambda}; \quad (9)$$

$$\delta = \mu_r c_r / \mu_n c_n; \quad \alpha = E / 2RT_{\Phi}(1 - T_{01}/T_{\Phi}).$$

При встречном потоке газа  $\beta = (c_{r0}U^0 + c_r G_1) / (c_{n0}U^0)^{-1}$ ,  $\gamma = 1$ ; при спутном  $\beta = (c_{n0}U^0 - c_r G_2) / (c_{n0}U^0)^{-1}$ ,  $\gamma = 1/\delta$ . В частном случае, когда  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 1/\delta$ ,  $\beta = 1$  (безгазовое горение), система (8) подробно исследована в [8]. Стационарное решение системы (8) имеет вид

$$\Theta_1^0(z) = e^{\beta z}, \quad \Theta_2^0(z) = 1. \quad (10)$$

### Линейный анализ устойчивости

Представим решение системы (8) в виде сумм

$$\Theta_1(z, \tau) = \Theta_1^0(z) + u_1(z, \tau), \quad \Theta_2(z, \tau) = \Theta_2^0(z) + u_2(z, \tau). \quad (11)$$

В линейном приближении по  $u_1$  и  $u_2$  решение (8) можно записать в следующем виде:

$$u_1 = A e^{i\omega\tau} \left\{ \left( 1 - \frac{i\alpha\beta\gamma\delta}{\omega(1+\delta)} \right) \exp \left[ (\beta + \sqrt{\beta^2 + i4\omega(1+\delta)}) \frac{z}{2} \right] + \frac{i\alpha\beta\gamma\delta}{\omega(1+\delta)} \exp(\beta z) \right\}, \quad (12)$$

$$u_2 = A e^{i\omega\tau} \left\{ \exp \left[ (\beta - \sqrt{\beta^2 + i4\omega}) \frac{z}{2} \right] \right\}.$$

При этом  $\omega$  удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$(1 + \delta) i\omega (\sqrt{\beta^2 + i4\omega(1 + \delta)} + \sqrt{\beta^2 + i4\omega} - 2\alpha\beta) + \alpha\beta\gamma\delta (\sqrt{\beta^2 + i4\omega(1 + \delta)} - \beta) = 0. \quad (13)$$

Из решения (12) видно, что стационарное решение неустойчиво, если  $\text{Im } \omega < 0$ . Кривые нейтральной устойчивости  $\alpha_* = \alpha_*(\beta)$  ( $\text{Im } \omega = 0$ ) и зависимость безразмерной частоты  $\omega_* = \text{Re } \omega$  ( $\text{Im } \omega = 0$ ) от  $\beta$  для разных  $\delta$  легко определяются из численного анализа (13). В ситуации, когда  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 1/\delta$ , дисперсионное уравнение (13) сводится к квадратному, решение которого при  $\beta < 3/2$  позволяет найти явный вид кривой

нейтральной устойчивости и функции частоты:

$$\begin{aligned}\alpha_* &= 2\beta^{-1} + (1 + 4\beta^{-2})^{1/2}, \\ \omega_* &= \frac{\beta\alpha_*^{1/2}}{2}(\beta + \alpha_* - \alpha_*\beta)^{1/2}.\end{aligned}\quad (14)$$

Не останавливаясь подробно на проблеме устойчивости, которая детально изучена в [4], перейдем к исследованию нелинейной задачи.

#### Автоколебательный режим фильтрационного горения

При  $\alpha > \alpha_*$  стационарный режим горения теряет устойчивость, причем колебательным образом. Задача состоит в том, чтобы при малых превышениях над порогом неустойчивости, когда  $0 < \alpha - \alpha_* \ll 1$ , построить периодическое по времени решение системы (8), ответвляющееся от стационарной волны. Методически данная работа примыкает к [8]. При решении нелинейной задачи будем считать, что параметры  $\alpha_*$  и  $\omega_*$  известны как результат численного решения (13), в частном случае ( $\delta = 0, \gamma = 1/\delta$ )  $\alpha_*$  и  $\omega_*$  могут быть представлены как функции параметра  $\beta$  (см. (14)).

Вблизи порога самовозбуждения автоколебаний их частота  $\omega$  мало отличается от величины  $\omega_*$ . С целью определения зависимости  $\omega$  от степени нелинейности воспользуемся методикой Линдштедта — Пуанкаре [7—9], вводя  $\omega$  в уравнения (8) с помощью преобразования  $t' = \omega t$ . Подставляя выражения (11) в систему (8) и переходя к новой переменной (далее штрих сверху опускаем), получаем нелинейные уравнения для  $u_1$  и  $u_2$  и граничные условия на фронте ( $z = 0$ ) и бесконечности:

$$\begin{aligned}(1 + \delta(2 - m))\omega \frac{\partial u_m}{\partial t} + \beta \frac{\partial u_m}{\partial z} + \gamma\delta(e^{\alpha u_1(0,t)} - 1) \times \\ \times \left( \beta(2 - m)e^{\beta z} + \frac{\partial u_m}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}, \quad m = 1, 2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial z}(0, t) - \frac{\partial u_2}{\partial z}(0, t) = \beta(e^{\alpha u_1(0,t)} - 1), \\ u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_1(-\infty, t) = 0, \quad u_2(\infty, t) < \infty.\end{aligned}\quad (15)$$

Будем искать периодическое по времени решение системы (15) в окрестности точки бифуркации в виде разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$  [7—9]:

$$u_m(z, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(z, t) \varepsilon^n, \quad m = 1, 2. \quad (16)$$

Чтобы связать значение  $\varepsilon$  с физическими параметрами, представим  $\alpha$  и  $\omega$  в виде рядов

$$\alpha = \alpha_* + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varepsilon^n, \quad \omega = \omega_* + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \varepsilon^n. \quad (17)$$

Можно показать, что нечетные коэффициенты  $\alpha_{2n-1}$  и  $\omega_{2n-1}$  равны нулю [7—9].

Подставляя ряды (16), (17) в систему (15) и приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях параметра  $\varepsilon$ , получаем линейные уравнения для неизвестных функций  $\varphi_{1n}$  и  $\varphi_{2n}$ :

$$\begin{aligned}L_m \varphi_{m1} \equiv (1 + \delta(2 - m))\omega_* \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial t} + \beta \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z} + \\ + \beta\alpha_*\gamma\delta e^{\beta z}(2 - m)\varphi_{m1}(0, t) - \frac{\partial^2 \varphi_{m1}}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z}(0, t) - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z}(0, t) - \beta\alpha_*\varphi_{11}(0, t) = 0, \quad m = 1, 2.\end{aligned}\quad (18)$$

Здесь и далее  $\varphi_{1n}(0, t) = \varphi_{2n}(0, t)$ ,  $\varphi_{1n}(-\infty, t) = 0$ ,  $\varphi_{2n}(\infty, t) < \infty$ .

При записи системы (18) определены линейные операторы  $L_1$  и  $L_2$

$$L_m \varphi_{m2} = -\frac{1}{2} \beta \alpha_*^2 \gamma \delta e^{\beta z} (2-m) \varphi_{m1}^2(0, t) - \alpha_* \gamma \delta \varphi_{m1}(0, t) \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z}, \quad m = 1, 2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z}(0, t) - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z}(0, t) - \beta \alpha_* \varphi_{12}(0, t) = \frac{1}{2} \beta \alpha_*^2 \varphi_{11}^2(0, t);$$

$$L_m \varphi_{m3} = -(1 + \delta(2-m)) \omega_2 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial t} - \gamma \delta \beta e^{\beta z} (2-m) \left[ \alpha_2 \varphi_{m1}(0, t) + \alpha_*^2 \varphi_{m1}(0, t) \varphi_{m2}(0, t) + \frac{\alpha_*^3 \varphi_{m1}^3(0, t)}{3} \right] - \alpha_* \gamma \delta \varphi_{m1}(0, t) \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial z} - \gamma \delta \alpha_* \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z} \left[ \varphi_{m2}(0, t) + \frac{\alpha_*}{2} \varphi_{m1}^2(0, t) \right] \equiv l_m, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z}(0, t) - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial z}(0, t) - \beta \alpha_* \varphi_{13}(0, t) = \beta \alpha_2 \varphi_{11}(0, t) + \beta \alpha_*^2 \varphi_{12}(0, t) \varphi_{11}(0, t) + \frac{\beta \alpha_*^3 \varphi_{11}^3(0, t)}{6} \equiv l_3.$$

Аналогично могут быть определены уравнения и граничные условия для  $\varphi_{1n}$  и  $\varphi_{2n}$  при  $n > 3$ . Константы  $\alpha_2$  и  $\omega_2$ , фигурирующие в системе (20), будут определены из условий разрешимости уравнений (20).

Решения систем (18) и (19) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \frac{e^{it}}{2} [(1-M)e^{v_1 z} + Me^{\beta z}] + \text{к. с.}, & \varphi_{21} &= \frac{1}{2} e^{it - v_2 z} + \text{к. с.}, \\ \varphi_{12} &= A_0 e^{\beta z} + A_1 e^{v_1 z} + A_2 z e^{\beta z} + e^{2it} [A_3 e^{\beta z} + A_4 e^{v_1 z} + A_5 e^{\beta v_1 z}] + \text{к. с.}, & (21) \\ \varphi_{22} &= B_0 + B_1 e^{-v_2 z} + e^{2it} [B_2 e^{-v_2 z} + B_3 e^{\beta z}] + \text{к. с.} \end{aligned}$$

Здесь к. с. означает комплексное сопряжение. Константы  $M$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $A_0 - A_5$  и  $B_0 - B_3$  определены в приложении.

После подстановки решений (21) в неоднородные части краевой задачи (20), т. е. в функции  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , можно получить систему неоднородных линейных уравнений и краевых условий для неизвестных функций  $\varphi_{13}$  и  $\varphi_{23}$ . Однако здесь задача будет состоять не в определении  $\varphi_{13}$  и  $\varphi_{23}$ , а в отыскании параметров  $\alpha_2$  и  $\omega_2$ , которые находятся из условий разрешимости системы (20). Чтобы сформулировать последние, необходимо рассмотреть сопряженную задачу [7-9]

$$\begin{aligned} L_1^* v_1 &\equiv - \left( \omega_* (1 + \delta) \frac{\partial v_1}{\partial t} + \beta \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) = 0, & -\infty < z < 0, \\ L_2^* v_2 &\equiv - \left( \omega_* \frac{\partial v_2}{\partial t} + \beta \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right) = 0, & 0 < z < \infty, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z}(0, t) - \frac{\partial v_2}{\partial z}(0, t) - \alpha_* \beta v_1(0, t) + \alpha_* \beta \gamma \delta \int_{-\infty}^0 e^{\beta z} v_1 dz = 0,$$

$$v_1(0, t) = v_2(0, t), \quad v_1(-\infty, t) < \infty, \quad v_2(\infty, t) = 0.$$

Здесь определены линейные операторы  $L_1^*$  и  $L_2^*$ , сопряженные операторам  $L_1$  и  $L_2$  в (18).

Условие разрешимости системы (20):

$$\int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} v_1 l_1 dt dz + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} v_2 l_2 dt dz + \int_0^{2\pi} v_1(0, t) l_3 dt = 0. \quad (23)$$

$\beta$	$\delta=0$		$\delta=1$		$\beta$	$\delta=0$		$\delta=1$	
	$\alpha_*$	$\omega_2$	$\alpha_*$	$\omega_2$		$\alpha_*$	$\omega_2$	$\alpha_*$	$\omega_*$
0,2	279,0	51,9	553,0	48,9	0,7	10,0	5,7	11,3	2,9
0,3	95,8	26,1	165,0	21,8	0,8	6,8	4,2	8,2	1,4
0,4	45,1	16,0	69,1	11,9	0,9	4,7	3,0	4,4	0,9
0,5	25,0	10,9	34,5	7,2	1,0	3,3	1,9	2,8	0,3
0,6	15,3	7,8	19,1	4,6					

Решение сопряженной задачи (22):

$$v_1 = \exp(v_1^* z - \beta z + it), \quad v_2 = \exp(-v_2^* z - \beta z + it). \quad (24)$$

Здесь индекс \* сверху означает комплексное сопряжение. После подстановки (24) и явных выражений для  $l_1 - l_3$  в (23) и последующего интегрирования получаем комплексное неоднородное алгебраическое уравнение для неизвестных  $\omega_2$  и  $\alpha_2$

$$C_1 \omega_2 + C_2 \alpha_2 = C_3 \quad (25)$$

( $C_1 - C_3$  определены в приложении). Разделяя действительную и мнимую части (25), можно найти параметры  $\omega_2$  и  $\alpha_2$ .

Таким образом, с принятой в данной работе точностью распределение температуры можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Theta_1(z, \tau) &= e^{\beta z} + \varepsilon \varphi_{11}(z, \omega \tau) + \varepsilon^2 \varphi_{12}(z, \omega \tau), \\ \Theta_2(z, \tau) &= 1 + \varepsilon \varphi_{21}(z, \omega \tau) + \varepsilon^2 \varphi_{22}(z, \omega \tau), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{21}$ ,  $\varphi_{22}$  определены в (21), а

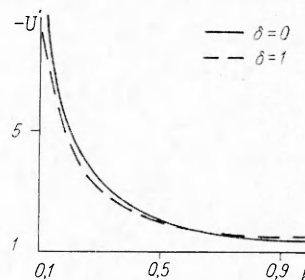
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha - \alpha_*}{\alpha_2}}, \quad \omega = \omega_* + \frac{\omega_2}{\alpha_2} (\alpha - \alpha_*). \quad (27)$$

Значения параметров  $\alpha_2$  и  $\omega_2$ , отражающих влияние нелинейных слагаемых на характеристики автоколебательного режима, приведены в таблице, откуда видно, что  $\alpha_2$  и  $\omega_2$  положительны. Неравенство  $\alpha_2 > 0$  означает мягкое самовозбуждение автоколебаний, а  $\omega_2 > 0$  соответствует тому, что эффекты нелинейности увеличивают частоту автоколебаний. Влияние эффектов фильтрации на автоколебания отражено в зависимости  $\alpha_2$  и  $\omega_2$  от  $\beta$ . Из таблицы видно, что увеличение спутного потока газа (параметр  $\beta$  уменьшается) приводит к уменьшению амплитуды автоколебаний  $\varepsilon \sim \alpha_2^{-1/2}$  и нелинейной поправки к частоте  $\omega_2/\alpha_2$ . Отличие эффективных теплоемкостей по обе стороны фронта горения ( $\delta \neq 0$ ) сильно сказывается на значениях  $\alpha_2$  и мало влияет на  $\omega_2$ . Отметим, что результаты, приведенные в таблице, при  $\beta = 1$  отличаются от данных [8], в частности, знаки у параметра  $\omega_2$  оказываются противоположными.

Нестационарную скорость движения фронта горения находим по следующему выражению:

$$\begin{aligned} U(\tau) &= U^0 \exp[\alpha \varepsilon \varphi_{11}(0, \omega \tau) + \alpha \varepsilon^2 \varphi_{12}(0, \omega \tau) + O(\varepsilon^3)] \approx \\ &\approx U^0 \left( 1 + \alpha_* \varepsilon \varphi_{11}(0, \omega \tau) + \varepsilon^2 \left[ \frac{\alpha_*^2 \varphi_{11}(0, \omega \tau)}{2} + \alpha_* \varphi_{12}(0, \omega \tau) \right] \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (24) видно, что для ответа на вопрос, как изменяется средняя скорость в нестационарном режиме, необходимо вычислить значение  $U' \equiv B_0 + B_0^* + B_1 + B_1^*$ , поскольку  $\langle \varphi_{11}(0, \omega \tau) \rangle = 0$ ,  $\langle \varphi_{12}(0, \omega \tau) \rangle = U'$ . На рисунке приведена зависимость  $-U'(\beta)$ . Видно, что средняя скорость уменьшается, что согласуется с результатами [8]. Нелинейное детектирование  $|U'|$  падает с ростом  $\beta$ .



Таким образом, в данной работе система уравнений фильтрационно-го горения сведена к двум нелинейным уравнениям для температур по обе стороны фронта горения и граничных условий для них, анализ которых методом возмущений позволил определить частоту и амплитуду автоколебаний поля температур и скорости движения фронта фильтрационного горения в кинетическом режиме.

## Приложение

Параметры  $M$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

$$M = \frac{i\alpha_*\beta\gamma\delta}{\omega_*(1+\delta)}, \quad v_1 = \frac{\beta + \alpha_{11}}{2} + \frac{i(1+\delta)\omega_4}{a_{11}}, \quad v_2 = \frac{a_{12} - \beta}{2} + \frac{i\omega_*}{2a_{12}},$$

$$\mu_1 = \frac{\beta + a_{21}}{2} + \frac{i(1+\delta)\omega_*}{a_{21}}, \quad \mu_2 = \frac{a_{22} - \beta}{2} + \frac{i\omega_*}{a_{22}},$$

$$a_{kl} = \left[ \frac{\beta^2 + (\beta^4 + 16 \cdot 4^{k-1} (1+\delta)^{2-l})^{1/2}}{2} \right]^{1/2}.$$

Комплексные константы  $A_0 - A_5$ ,  $B_0 - B_3$ ,  $C_1 - C_3$ :

$$A_0 = \left[ \frac{\beta\alpha_*}{8} - \frac{\gamma\delta}{4} \left( \frac{\alpha_*}{2} + M \right) + \left( \beta - \gamma\delta - \frac{v_1}{\alpha_*} \right) A_1 - \frac{v_2 B_1}{\alpha_*} \right] \left( \gamma\delta - \beta + \frac{\beta}{\alpha_*} \right)^{-1},$$

$$A_1 = \frac{\gamma\delta\alpha_*(1-M)}{4(\beta - v_1)}, \quad A_2 = \frac{\beta\alpha_*^2}{8} + \beta(\alpha_* - 1)A_0 + (\beta\alpha_* - v_1)A_1 - v_2 B_1,$$

$$A_3 = - \left( \frac{\alpha_*}{8} + \frac{M}{4} + A_4 + A_5 \right) \left( 1 - \frac{2}{M} \right)^{-1},$$

$$A_4 = - \frac{\gamma\delta\alpha_* v_1}{4} (1-M) (2i(1+\delta)\omega_* + \beta v_1 - v_1^2)^{-1},$$

$$A_5 = \left\{ (\beta - \beta\alpha_* + \mu_2) \left( \frac{\alpha_*}{8} + \frac{M}{4} + A_4 \right) + \left( 1 - \frac{2}{M} \right) \left[ \frac{\beta\alpha_*^2}{8} - A_4(v_1 + \mu_2 - \beta\alpha_*) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + B_2(\mu_2 - v_2) \right] \right\} \left[ \mu_1 - \beta - \frac{2}{M}(\mu_1 + \mu_2 - \beta\alpha_*) \right]^{-1}, \quad B_0 = A_0 + A_1 - B_1,$$

$$B_1 = -\alpha_*\gamma\delta/4(\beta + v_2), \quad B_2 = \frac{\alpha_*\gamma\delta v_2}{4} (2i\omega_* - \beta v_2 - v_2^2)^{-1},$$

$$B_3 = A_3 + A_4 + A_5 + B_2,$$

$$C_1 = \frac{i}{2} \left[ \frac{(1+\delta)(1+M)}{v_1^* - \beta/2} + \frac{1}{2v_2 + \beta} - \frac{(1+\delta)M}{v_1^*} \right], \quad C_2 = \frac{\beta}{2} \left( 1 - \frac{\gamma\delta}{v_1^*} \right),$$

$$C_3 = \frac{\gamma\delta\alpha_*}{2} \left\{ \frac{\beta}{v_1^*} \left[ \frac{\alpha_*^2}{8} + \alpha_*(M_1 + M_2) + A_0 + A_0^* + A_3^* + \frac{A_2 + A_2^*}{\beta} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + M \left( M_1 - M_2 - \frac{\alpha_*}{8} \right) \right] - \frac{\beta(A_2 + A_2^*)}{(v_1^*)^2} + \frac{v_1^*}{2v_1^* - \beta} \left[ A_1 + A_4^* + (1+M) \left( M_1 + \frac{\alpha_*}{4} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{v_1}{a_{11}} \left[ A_1 + (1-M) \left( M_2 + \frac{\alpha_*}{8} \right) \right] + \frac{\mu_1^* A_5^*}{(v_1^* + \mu_1^* - \beta)} - \frac{v_2^*}{2v_2^* + \beta} \left( B_0 + B_0^* + B_1 + 2B_1^* + \right. \right.$$

$$\left. \left. + B_2^* + \frac{\alpha_*}{4} \right) - \frac{v_2}{a_{12}} \left( B_1 + B_2^* + B_3^* + \frac{\alpha_*}{8} \right) - \frac{\mu_2^* B_3^*}{(v_2^* + \mu_2^* + \beta)} \right\} - \frac{\alpha_*^2 \beta}{2} \left( M_1 + M_2 + \frac{\alpha_*}{8} \right),$$

$$M_1 = A_0 + A_0^* + A_1 + A_1^*, \quad M_2 = A_3^* + A_4^* + A_5^*.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алдушин А. П., Мержанов А. Г., Хайкин Б. И. Докл. АН СССР, 1974, 215, 3.
2. Алдушин А. П., Сеплярский Б. С. Докл. АН СССР, 1978, 241, 1.
3. Алдушин А. П., Сеплярский Б. С. Докл. АН СССР, 1979, 249, 3.
4. Алдушин А. П., Каспарян С. Г. ФГВ, 1981, 17, 6.

5. Алдушин А. П., Сеплярекий Б. С., Шкадинский К. Г. ФГВ, 1980, 16, 1.
6. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
7. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости.— М.: Мир, 1981.
8. Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I. SIAM J. Appl. Math., 1978, 35, 3.
9. Вольперт В. А. Бифуркации нестационарных режимов распространения волн/АН СССР. ОИХФ.— Препр.— Черноголовка, 1982.
10. Вольперт В. А., Вольперт А. И., Мержанов А. Г. ФГВ, 1983, 19, 4.
11. Борисова О. А., Лидский Б. В., Нейгауз М. Г. и др. Хим. физика, 1986, 5, 6.

*Поступила в редакцию 14/V 1987,  
после доработки — 3/XI 1987*

УДК 536.46

## ВЛИЯНИЕ ПОТОКА ВОЗДУХА НА ГОРЕНИЕ ТИТАНОВЫХ ПЛАСТИН

*Б. Г. Ефимов, С. С. Ключин, П. Н. Кузьев,  
Г. Ю. Ложкин  
(Жуковский)*

Высокотемпературному окислению, воспламенению и горению металлов посвящены работы [1, 2]. Установлено, что скорость окисления зависит от температуры, концентрации окислителя и через характеристики окисной пленки — от предыстории процесса. Экспериментально установлены различные законы окисления, которые можно описать линейным уравнением при образовании пористых окисных пленок, параболическим, кубическим и т. д. — при образовании защитных пленок.

На рис. 1 показано характерное изменение массовой скорости окисления  $m$  при нагревании металлов, обладающих при низких температурах компактной окисной пленкой. На начальном этапе нагрева окисление протекает в кинетическом режиме (кривая 4). Через некоторое время процесс начинает ограничиваться диффузией кислорода через нарастающий окисел (кривая 3). При достижении некоторой переходной температуры  $T^*$  [1], обычно связанной с каким-либо фазовым превращением в металле или окисле, слой окисла теряет свои защитные свойства, скорость процесса резко возрастает (см. рис. 1, 2) и достигает величины, определяемой диффузией кислорода в окружающем образце воздухе (см. рис. 1, 1). Поэтому при  $T > T^*$  существенное влияние будет оказывать обдув окисляющейся поверхности потоком воздуха. Он приведет к уменьшению расстояния, на котором происходит диффузия, и следовательно, к увеличению потока кислорода к зоне реакции. Особый эффект, выражающийся в уносе окисла и расплавленного металла, может оказывать чисто силовое воздействие потока, если температура окисляющейся поверхности выше температуры плавления. Природа этих сил связана с трением и градиентом давления, возникающими при обтекании образца потоком газа. В подобных условиях становится возможно самораспространение горения металлического образца.

Механизм горения металлической пластины, находящейся в тангенциальном потоке воздуха, представим схемой на рис. 2. В зоне 3 металл нагревается от начальной температуры  $T_0$  до температуры плавления  $T_{пл}$ . Ширина этой зоны  $l$  определяется скоростью распространения фронта плавления, которая совпадает со скоростью горения  $u$ , и температуропроводностью металла  $\kappa$ . По порядку величины  $l \sim \kappa/u$ . Зона расплава 2 отделена от области 3 поверхностью фазового перехода (зона 1 — пограничный слой газа, через который диффундирует кислород к поверхности расплава и идет конвективный теплоотвод). Образующийся расплав, двигаясь вдоль поверхности фазового перехода и натекая на более холодную боковую поверхность, будет «примерзать» к ней, образуя уступ, с которого капли расплава сносятся потоком воздуха.