

УДК 533.6

АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АЭРОДИНАМИКИ

В. М. Ковеня

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: kovenya@ict.nsc.ru

Для численного решения записанных в интегральной форме уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа предложены неявные конечно-объемные алгоритмы предиктор-корректор, основанные на методе расщепления, и исследованы их свойства. Рассмотрен экономичный алгоритм расщепления уравнений по физическим процессам и пространственным переменным. Найдены численные решения двумерных и пространственных задач аэродинамики, проведено сравнение с известными результатами расчетов. Выполненные оценки и расчеты позволяют сделать вывод об эффективности предлагаемых алгоритмов.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, конечно-объемные схемы, алгоритмы расщепления, сверхзвуковые течения.

DOI: 10.15372/PMTF20210305

Введение. Уравнения Навье — Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа являются одной из наиболее общих моделей для описания решений различных классов задач в аэромеханике. Поэтому, несмотря на то что существует большое количество численных методов решения этих уравнений (см., например, [1–11]), построение эффективных численных алгоритмов остается актуальной задачей. Явные разностные схемы решения уравнений более просты в реализации, но не экономичны вследствие жестких ограничений, налагаемых на соотношение временного и пространственных шагов сетки [3–5, 8]. Для построения экономичных по числу операций для одного узла сетки алгоритмов целесообразно применять неявные схемы, особенно при решении стационарных задач методом установления. Такие схемы могут быть построены на основе метода расщепления, предложенного Н. Н. Яненко [8]. С использованием этого метода решение исходной многомерной задачи можно свести к решению ее одномерных аналогов или к решению более простых задач. В работах [10, 11] предложены алгоритмы расщепления для решения записанных в интегральной форме уравнений Эйлера и Навье — Стокса для вязкого сжимаемого газа. Такая форма представления уравнений является более предпочтительной, поскольку

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00168).

© Ковеня В. М., 2021

позволяет описывать как гладкие, так и разрывные решения. Аппроксимация уравнений, записанных в такой форме, строится для каждой расчетной ячейки, что обеспечивает консервативность алгоритмов, при этом форму ячеек проще адаптировать к форме границ области. При решении уравнений в сложных криволинейных областях обычно вводится преобразование координат. Для уравнений в дифференциальной форме оно вводится для всей расчетной области, а для уравнений в интегральной форме — лишь для отдельной ячейки.

В данной работе, являющейся продолжением работ [10, 11], рассмотрены два класса конечно-объемных схем типа предиктор-корректор с расщеплением уравнений по физическим процессам и с расщеплением уравнений по физическим процессам и пространственным переменным. Предложенные формы расщепления позволяют обеспечить максимальную устойчивость схем при минимальном влиянии расщепления на их свойства. Полученные схемы консервативны, имеют второй порядок аппроксимации по всем переменным, что позволяет использовать их при решении как стационарных, так и нестационарных задач. Исследована точность вычислений по этим алгоритмам и определено необходимое число арифметических операций для одного узла сетки. Приведены решения задачи о взаимодействии ударных волн большой интенсивности при расчете сверхзвуковых течений газа в сужающемся канале и при обтекании затупленного по форме сферы конуса при различных углах атаки, выполнено их сравнение с результатами расчетов по другим алгоритмам.

1. Исходные уравнения. Численные алгоритмы. Рассмотрим систему уравнений Навье — Стокса в интегральной форме в декартовых координатах при отсутствии внешних сил (см. [10]):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV + \oint_S W d\mathbf{S} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{U} , W — вектор искомых функций и матрица потоков на границе поверхности:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 \\ \rho v_1^2 + p - \sigma_1^1 & \rho v_1 v_2 - \sigma_2^1 & \rho v_1 v_3 - \sigma_3^1 \\ \rho v_2 v_1 - \sigma_1^2 & \rho v_2^2 + p - \sigma_2^2 & \rho v_2 v_3 - \sigma_3^2 \\ \rho v_3 v_1 - \sigma_1^3 & \rho v_3 v_2 - \sigma_2^3 & \rho v_3^2 + p - \sigma_3^3 \\ (E + p)v_1 - Q_1 & (E + p)v_2 - Q_2 & (E + p)v_3 - Q_3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_j^i = \delta_j^i \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad Q_j = \sum_{l=1}^3 v_l \sigma_j^l + \varkappa_0 \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

$$E = \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right), \quad v^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2, \quad \varkappa = \frac{\varkappa_0}{c_p}, \quad \lambda = \mu' - \frac{2\mu}{3}.$$

Здесь V — замкнутая область; $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS$; dS — элемент поверхности S , умноженный на единичную нормаль \mathbf{n} к ней; \varkappa_0 , μ , μ' — теплопроводность, первая и вторая вязкости. Для замыкания системы уравнений (1) заданы уравнения состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho e$, $e = c_v T$. При отсутствии членов, содержащих вязкость и теплопроводность, уравнения (1) переходят в уравнения Эйлера.

Решение уравнения (1) будем искать в расчетной области $V \times [0, T]$. Область V разобьем на ячейки-параллелепипеды $\omega = V_{i,j,k}$ и введем шаг по времени $\tau = T/N$ (N — число шагов по времени). Значения функций \mathbf{U} будем задавать в центре ячеек (i, j, k) , а потоки W — на их границах в узлах $m \pm 1/2$ ($i \pm 1/2, j, k$; $i, j \pm 1/2, k$; $i, j, k \pm 1/2$). Члены σ^i , Q

в уравнениях движения и энергии содержат производные от скоростей и температуры. Так как грани ячейки могут не совпадать с осями декартовых координат, введем локальное преобразование координат

$$q_l = q_l(x_m) \quad (l, m = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = z_i^m \frac{\partial}{\partial q_m}, \quad z_i^m = \frac{\partial q_m}{\partial x_i}, \quad (2)$$

переводящее ее в единичный куб. Тогда уравнения Навье — Стокса записываются в той же форме (1) с заменой σ^i , Q на $\bar{\sigma}^i$, \bar{Q} в новых координатах q_l . Уравнения (1), (2) справедливы как для всей расчетной области V , так и для ее отдельной ячейки. Осредняя искомые функции по элементарному объему ячейки ω , аппроксимируем интегральные операторы в них для каждой ячейки сеточными операторами:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} d\omega \approx \omega \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau}, \quad \oint_S W d\mathbf{S} \approx \Omega = \sum_{m=1}^3 \Delta_m(W_m \mathbf{S}). \quad (3)$$

Здесь

$$\Delta_m(W \mathbf{S}) = [(W_{m+1} + W_m) \mathbf{S}_{m+1/2} - (W_{m-1} + W_m) \mathbf{S}_{m-1/2}]/2 \quad (4)$$

потоки газодинамических величин через противоположные грани ячейки; значения $m = 1, 2, 3$ соответствуют индексам i, j, k . Наряду с симметричной аппроксимацией (4) рассмотрим несимметричную аппроксимацию потоков с первым порядком точности:

$$\Delta_m^1(W \mathbf{S})_m = \begin{cases} \Delta_m^-(W \mathbf{S})_m = W_m \mathbf{S}_{m+1/2} - W_{m-1} \mathbf{S}_{m-1/2}, & v_m \geq 0, \\ \Delta_m^+(W \mathbf{S})_m = W_{m+1} \mathbf{S}_{m+1/2} - W_m \mathbf{S}_{m-1/2}, & v_m < 0. \end{cases} \quad (5)$$

При аппроксимации диссипативных членов $\bar{\sigma}^i$, \bar{Q} градиенты компонент скоростей и температуры аппроксимируем симметричными операторами по формулам

$$\sigma_j^i = \mu \sum_{m=1}^3 z_j^m \Delta_m v_i, \quad \frac{\partial T}{\partial q_m} = \Delta_{m\pm 1/2} T, \quad \Delta_{m\pm 1/2} r = \pm(r_{m\pm 1} - r_m).$$

Для устранения осцилляций, возникающих при симметричных аппроксимациях конвективных членов в (4), следуя [11], введем оператор сглаживания второго порядка малости в виде

$$\Delta_m g = g_{m+1/2} - g_{m-1/2} - \text{sign}(V_m)(\varepsilon_{m+1/2} \Delta_{m+1/2} - \varepsilon_{m-1/2} \Delta_{m-1/2}) g_m,$$

где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} |\Delta_{m+1/2} g_m - \Delta_{m-1/2} g_m|/t, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad t = |\Delta_{m+1/2} g_m| + |\Delta_{m-1/2} g_m|,$$

V_m — проекция вектора скорости в направлении нормали к грани \mathbf{S}_m . С учетом преобразования координат и введенных аппроксимаций вектор $W \mathbf{S}$ для каждой ячейки в (3) может быть записан в виде

$$W_h \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho v_1 V - \bar{\sigma}^1 + p S_1 \\ \rho v_2 V - \bar{\sigma}^2 + p S_2 \\ \rho v_3 V - \bar{\sigma}^3 + p S_3 \\ (E + p)V - Q \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^i = \sum_{m=1}^3 \bar{\sigma}_m^i S_m, \quad Q = \sum_{m=1}^3 (v_m \bar{\sigma}_m^i + \bar{q}_m) S_m,$$

где $S_m = Sn_m$ — площадь проекции грани ячейки S в направлении нормали n_m (для каждой ячейки выбраны внешние нормали); $V = \sum_{m=1}^3 v_m S_m$ — произведение проекции вектора скорости \mathbf{v} и внешней нормали к площади грани. Конечно-объемная схема с весами

$$\omega \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m [\alpha (W_h^{n+1} \mathbf{S}_m) + \beta (W_h^n \mathbf{S}_m)] = 0 \quad (6)$$

аппроксимирует исходные уравнения (1), (2) с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$, $h = \omega^{1/3}$. Эта схема является консервативной и нелинейной при $\alpha \neq 0$. Линеаризуем ее относительно вектора искомых функций \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + A^n (\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n) + O(\tau^2) = A^n \mathbf{f}^n + O(\tau^2), & A &= \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{f}, \\ W_h^{n+1} &= W_h^n + \bar{B}^n (\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n) + O(\tau^2) = \bar{B}^n \mathbf{f}^n + O(\tau^2), & \bar{B} &= \partial W_h / \partial \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Здесь вид оператора \bar{B} зависит от вида вектора \mathbf{f} . Так как значения коэффициентов в операторах A^n , \bar{B}^n постоянны вследствие осреднения по ячейке ω , то $(A^n)^{-1} S \bar{B}^n = S \tilde{B}^n + O(h^2)$. Тогда с учетом линеаризации вместо (6) может быть рассмотрена линейная конечно-объемная схема предиктор-корректор

$$\begin{aligned} \omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} (S \tilde{B}_h^n \mathbf{f}^{n+1/2}) &= 0, \\ \omega \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_2} (W_h^{n+1/2} \mathbf{S}) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

аппроксимирующая исходные уравнения с порядком $O(\tau^2 + \tau h^{k_1} + h^{k_2})$ при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ (k_1, k_2 — порядок аппроксимации схемы на этапах предиктор и корректор соответственно). Порядки аппроксимации операторов Δ_m^k на этапах предиктор и корректор могут задаваться различными. При реализации схемы (7) на этапе предиктор необходимо проводить громоздкие вычисления (матричные прогонки), поскольку диссипативные члены в уравнениях движения и энергии в операторах $\Delta_m S \tilde{B}$ для каждой ячейки содержат производные по нормальным и касательным направлениям к грани ячейки. Следуя [8, 9] при расщеплении операторов $\Delta_m S \tilde{B}$, представим их в виде

$$\sum_{m=1}^3 \Delta_m S \tilde{B}_h^n \mathbf{f} = \sum_{m=1}^3 \Delta_m S B_h^n \mathbf{f} + \mathbf{F}^n. \quad (8)$$

Оператор $\Delta_m S B_h^n$ выбирается таким образом, чтобы он содержал все газодинамические члены уравнений и производные от диссипативных членов только по нормали к грани \mathbf{S}_m , входящие в уравнения движения и энергии, т. е. был одномерным. Остальные члены уравнений перенесены в вектор \mathbf{F}^n . Форма записи (8) удобна при использовании метода расщепления (см. [2, 9]) для построения алгоритмов.

Выполним расщепление оператора B по физическим процессам $B_h^n = B_1^n + B_2^n$ в следующем виде: оператор B_1^n включает члены, содержащие давление и входящие в уравнения движения, а также все члены, входящие в уравнение энергии, оператор B_2^n включает остальные члены, конкретный вид которых определяется при выборе вектора \mathbf{f} . Тогда конечно-объемная схема предиктор-корректор

$$\omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} (S B_1^n \mathbf{f}^{n+1/4}) = 0,$$

$$\omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau\alpha} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} (SB_2^n \mathbf{f}^{n+1/2}) = 0, \quad (9)$$

$$\omega \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_2} (W_h^{n+1/2} \mathbf{S}) = 0$$

аппроксимирует уравнения Навье — Стокса с тем же порядком, что и схема (7). Выбор искомого функций при построении численных алгоритмов является определяющим, так как от него существенно зависит вид операторов \tilde{B} , B_l ($l = 1, 2$) и как следствие реализация схемы и экономичность алгоритмов. Аналогично тому, как это сделано в [9, 10], выберем вектор искомого функций в виде $\mathbf{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, p)^T$. Тогда матрицы B_l принимают вид

$$SB_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 \\ 0 & bS_1 & bS_2 & bS_3 & V - \eta_4 \end{pmatrix},$$

$$SB_2 = \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V - \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V - \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V - \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$b = \gamma p, \quad \eta_l = \xi_l^m z_m^l (\mu' + (4/3)\mu) S_m \Delta_m \rho^{-1} \quad (l = 1, 2, 3), \quad \eta_4 = \varkappa_0 S_m z_m^m \Delta_m \rho^{-1}.$$

Такой выбор вектора искомого функций \mathbf{f} позволил упростить вид операторов B_l на этапе предиктор: на каждом шаге схемы (9) решаются лишь четыре уравнения вместо пяти, что следует из структуры матриц B_l . При другом выборе вектора \mathbf{f} и уравнения состояния конечно-объемные алгоритмы строятся аналогично. Задание различных порядков аппроксимации на этапах предиктор и корректор позволяет повысить устойчивость схемы при $k_1 < k_2$ и упростить ее реализацию. Например, при выборе на дробных шагах схемы (9) несимметричной аппроксимации операторов $\Delta_m^1 = \Delta_m^\pm$ конвективные члены в уравнениях движения аппроксимируются с учетом знака скорости: при $v_m \geq 0$ выбирается оператор Δ_m^- , а для давления в уравнениях движения — оператор Δ_m^+ , при $v_m < 0$ знак операторов меняется на противоположный (подробнее об этом см. [9–11]). Тогда при задании $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ конечно-объемная схема (9) имеет второй порядок аппроксимации. Как правило, проведение расщепления в конечно-разностных или конечно-объемных схемах приводит к появлению дополнительных членов. Такая ситуация имеет место также при использовании алгоритма (9). Проведем исследование его свойств для уравнений Навье — Стокса с постоянными, “замороженными” коэффициентами. Исключив в схеме (9) на этапе предиктор дробные шаги, получаем

$$\left[I + \tau\alpha \frac{1}{\omega} \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} (SB_1^n) \right] \left[I + \tau\alpha \frac{1}{\omega} \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} (SB_2^n) \right] =$$

$$= I + \frac{\tau\alpha}{\omega} \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} S (B_1^n + B_2^n) + \tau^2 \alpha^2 D,$$

где

$$D = \frac{1}{\omega^2} \left(\sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} S B_1^n \right) \left(\sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} S B_2^n \right) = \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 & r_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r_l = \gamma \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} \left[S_m p \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} S_m (V - \eta_l) \right],$$

$\tau^2 \alpha^2 D$ — дополнительный член второго порядка малости.

Таким образом, проведение расщепления по физическим процессам в форме (10) привело к появлению дополнительных членов второго порядка малости лишь в уравнении энергии. Данный алгоритм подобен разностной схеме с расщеплением по физическим процессам для уравнений Навье — Стокса в дифференциальной форме [9]. Схема (9) безусловно устойчива при $\alpha = 0,5 + O(\tau)$ в двумерном случае и условно устойчива в трехмерном, как и все схемы приближенной факторизации (см. [8]). Отметим, что для заданного вектора \mathbf{f} в схеме (9) уравнения неразрывности и движения аппроксимируются в консервативной форме и на этапе предиктор, что приводит к повышению точности расчетов. Выбор другого вектора или другой формы расщепления может приводить к усложнению вида диссипативной матрицы (и как следствие к усложнению реализации схем) или к потере безусловной устойчивости. Реализация схемы (9) на этапе предиктор сводится к независимому решению отдельных уравнений. Действительно, на первом дробном шаге решается система уравнений

$$\rho^{n+1/4} - \rho^n = 0, \quad v_l^{n+1/4} = v_l^n - \frac{r}{\rho} \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{\pm} S_l p^{n+1/4} \quad (l = 1, 2, 3), \quad (11)$$

$$\left\{ 1 + r \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{\pm} \left[V - S_l \varkappa_0 z_m^m \Delta_m^{\mp} \frac{1}{\rho} \right] \right\} p^{n+1/4} = p^n - \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{\mp} \sum_{l=1}^3 b S_l v_l^{n+1/4}, \quad r = \frac{\tau \alpha}{\omega}.$$

Исключая компоненты скорости $v_l^{n+1/4}$ из последнего уравнения в (11), получаем девятиточечное уравнение для давления

$$\left\{ 1 + r \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{\pm} \left[V - S_l \varkappa_0 z_m^m \Delta_m^{\mp} \frac{1}{\rho} - \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{br}{\rho} S_l \Delta_m^{\mp} \right] \right\} p^{n+1/4} = d = p^n - \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{\mp} \sum_{l=1}^3 b S_l v_l^n,$$

которое может быть решено с использованием различных итерационных алгоритмов (см. [4, 12]). После решения этого уравнения явно вычисляются новые значения скорости $v_l^{n+1/4}$, а плотность переносится с предыдущего временного слоя. На втором дробном шаге схемы (9) также независимо решаются уравнения движения и неразрывности (так как $S B_2^n$ — диагональная матрица), а значение энергии переносится с предыдущего шага. Заметим, что решение этих уравнений также может быть получено с помощью итерационных алгоритмов.

Для построения более экономичного алгоритма, не требующего выполнения внутренних итераций, проведем расщепление операторов $\sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_1} (S B_l^n)$ ($l = 1, 2$) в (9) по пространственным переменным. В этом случае конечно-объемная схема

$$\omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/12} - \mathbf{f}^n}{\tau \alpha} + \Delta_1^{k_1} (S B_1^n \mathbf{f}^{n+1/12}) = 0, \quad \dots,$$

$$\begin{aligned}
\omega \frac{\mathbf{f}^{n+3/12} - \mathbf{f}^{n+2/12}}{\tau\alpha} + \Delta_3^{k_1}(SB_1^n \mathbf{f}^{n+3/12}) &= 0, \\
\omega \frac{\mathbf{f}^{n+4/12} - \mathbf{f}^{n+3/12}}{\tau\alpha} + \Delta_1^{k_1}(SB_2^n \mathbf{f}^{n+4/12}) &= 0, \quad \dots, \\
\omega \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+5/12}}{\tau\alpha} + \Delta_3^{k_1}(SB_2^n \mathbf{f}^{n+1/2}) &= 0, \\
\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \sum_{m=1}^3 \Delta_m^{k_2}(\bar{W}_h^{n+1/2} \mathbf{S}) &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

аппроксимирует исходные уравнения с тем же порядком, что и схема (9), но в отличие от нее реализуется на всех дробных шагах методом скалярной прогонки. На первых трех дробных шагах схемы при $k = 1$ решаются уравнения

$$\begin{aligned}
\rho^{n+m/12} - \rho^{n-(m-1)/12} = 0, \quad v_l^{n+m/12} = v_l^{n-(m-1)/12} - \frac{r}{\rho} \Delta_1^\pm S_l p^{n+m/12} \quad (m, l = 1, 2, 3), \\
\left\{ 1 + r \Delta_1^\pm \left[V - S_l \varkappa_0 z_m^m \Delta_1^\mp \frac{1}{\rho} \right] \right\} p^{n+m/12} = p^n - \Delta_1^\mp \sum_{l=1}^3 b S_l v_l^{n+m/12}, \quad r = \frac{\tau\alpha}{\omega}.
\end{aligned}$$

Исключая скорость из уравнения для давления, получаем трехточечное уравнение

$$\begin{aligned}
\left\{ 1 + r \Delta_1^\pm \left[V - S_l \varkappa_0 z_1^1 \Delta_1^\mp \frac{1}{\rho} - \sum_{l=1}^3 \frac{br}{\rho} S_l \Delta_1^\mp \right] \right\} p^{n+m/12} = \\
= p^{n-(m-1)/12} - \Delta_1^\mp \sum_{l=1}^3 b S_l v_l^{n-(m-1)/12},
\end{aligned}$$

решение которого может быть получено методом трехточечной скалярной прогонки, после чего явно определяются новые значения скоростей. На 4–6-м дробных шагах схемы (9) система уравнений

$$\begin{aligned}
[1 + r \Delta_m t_0] \rho^{n+(3+m)/12} = \rho^{n+(2+m)/12}, \quad p^{n+(3+m)/12} = p^{n+1/4} \quad (m = 1, 2, 3), \\
\left[1 + r \Delta_m \left(V - \xi_l^l S_m \Delta_m \frac{1}{\rho^n} \right) \right] \rho v_l^{n+(2+m)/12} = \rho v_l^{n+(2+m)/12} \quad (l = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

также решается методом скалярной прогонки по каждому направлению. На этапе корректор новые значения функций вычисляются явно. Таким образом, реализация схемы (12) свелась к $N \times m$ (N — число уравнений, m — размерность задачи по пространству) скалярным прогонкам на этапе предиктор и явному вычислению на этапе корректор. Рассмотренный алгоритм является экономичным по числу операций для одного узла сетки, обладает свойством консервативности для каждой расчетной ячейки и устойчив в широком диапазоне параметров сетки. Наиболее эффективным представляется использование этого алгоритма при решении стационарных задач методом установления, когда параметр τ может выбираться лишь из условия наиболее быстрой сходимости. Алгоритм легко может быть распараллелен: на этапе предиктор решение каждого уравнения находится независимо в силу структуры расщепленных операторов SB_l ($l = 1, 2$), а на этапе корректор его распараллеливание проводится стандартным методом, используемым для явных схем. Применение алгоритмов предиктор-корректор позволяет строить различные классы схем на основе выбора размерности задач и заданной точности решения. На этапе предиктор

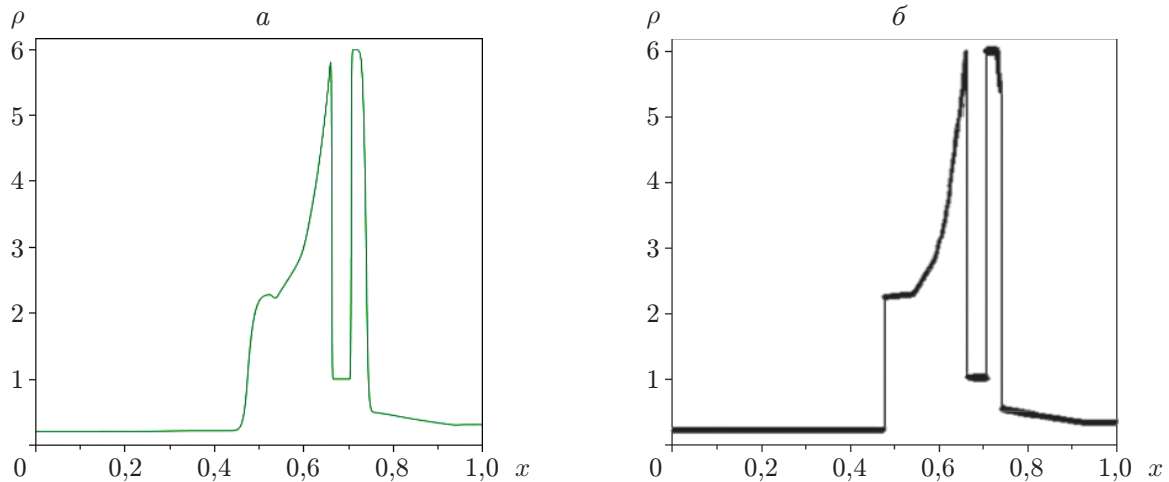


Рис. 1. Распределение плотности при столкновении ударных волн ($T = 0,026$):
 а — расчет с использованием алгоритма (12), б — расчет, выполненный в [13]

можно выбирать одну из форм расщепления, а на этапе корректор использовать схемы с различным порядком аппроксимации, например схемы повышенного порядка типа TVD-схем и т. д. Устойчивость таких алгоритмов должна исследоваться дополнительно.

2. Численные расчеты. Анализ свойств алгоритма. Предложенный конечно-объемный алгоритм (11) апробирован при решении ряда задач. Расчеты проводились по схемам с первым порядком аппроксимации на этапе предиктор и вторым на этапе корректор. Для получения стационарного решения использовался метод установления, критерий установления задавался в виде $\varepsilon = \max_{i,j} |(f^{n+T} - f^n)/(T\tau f^n)| < 10^{-(3-5)}$, где $T = 10 \div 20$, что позволяет избежать влияния осцилляций решения. Ранее с использованием решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Саха), имеющей точное решение, была проведена оценка точности алгоритма и показано, что в решении, полученном с помощью предложенного алгоритма со вторым порядком аппроксимации, ударный фронт “размазан” не более чем на 3–5 ячеек (см. [9, 10]). Ниже приведены результаты решения задачи о столкновении двух ударных волн в приближении модели Эйлера. В единичной области в начальный момент газ покоился, на левой и правой границах задавалось давление $p = 10^3$ и $p = 10^2$ соответственно, а внутри области — $p = 10^{-2}$ (такие же параметры использовались в работе [13]). На рис. 1 приведены распределения плотности в момент времени $T = 0,026$. Сравнение результатов расчетов позволяет сделать вывод, что алгоритм является достаточно точным.

В последующих расчетах оценка точности алгоритма проводилась с использованием решения двумерных задач. В работе [10] при решении задачи об обтекании клина исследовалось течение при различных значениях числа Маха M и угла клина β . На входе задавался равномерный поток, внутри области — постоянные плотность и давление, а также нулевая скорость. На поверхности клина ставились условия непротекания для невязкого газа или условия прилипания для вязкого, на оси симметрии задавались условия симметрии. Результаты расчетов, выполненных в [10], и сравнение с точным решением [14] и экспериментальными данными [15] свидетельствуют о том, что параметры потока и углы наклона скачков в падающих и отраженных волнах и волнах разрежения при регулярном и маховском отражении ударной волны практически совпадают. Ниже рассмотрена задача об обтекании клина в приближении уравнений Навье — Стокса.

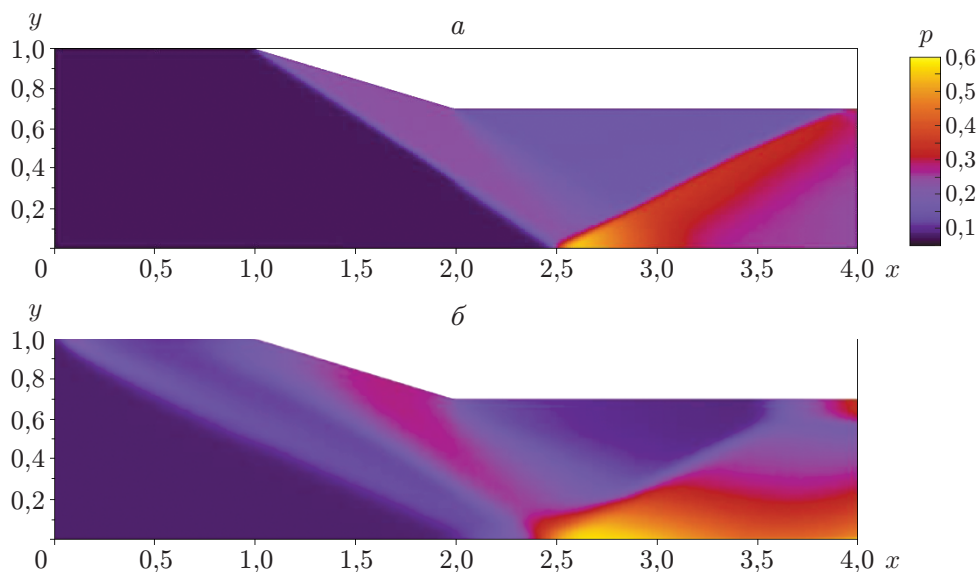


Рис. 2. Распределение давления при обтекании клина ($M = 3$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$):
a — в отсутствие вязкости, *б* — при наличии вязкости ($\operatorname{Re} = 10^3$)

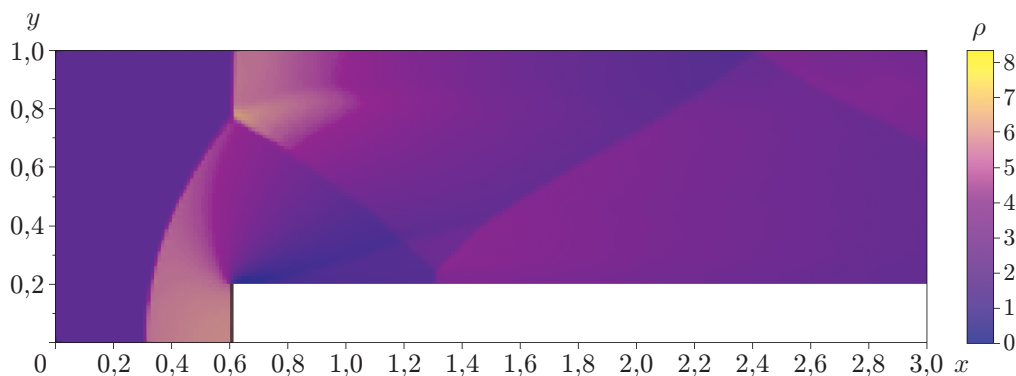


Рис. 3. Распределение плотности в расчетной области при $t = 4$ с

Как и следовало ожидать, наличие вязкости приводит к появлению слабого головного скачка в начале расчетной области, “размазыванию” падающей и отраженной волн и незначительному уменьшению их амплитуды. На рис. 2 приведены поля давления в сужающемся канале при $M = 3$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,3$ в отсутствие и при наличии вязкости при $\operatorname{Re} = 10^3$.

Дальнейшее тестирование алгоритма проводилось с использованием задачи о течении в канале с уступом, решение которой находилось в приближении уравнений Эйлера. Аналогично тому, как это сделано в [13], на входе в канал задавался сверхзвуковой поток ($M = 3$), на нижней, верхней гранях и на уступе задавалось условие непротекания, внутри области задавались значения набегающего потока в начальный момент. Расчетная сетка содержала 360×120 прямоугольных ячеек. Решения, полученные в [13] и с использованием предлагаемого алгоритма, совпадают. На рис. 3 приведено распределение плотности в расчетной области в момент $t = 4$ с (см. [13]). Алгоритм апробирован также на решении пространственной задачи. Проведены расчеты параметров процесса обтекания затупленного по форме сферы конуса в приближении уравнений газовой динамики при различных углах атаки. Эта задача исследовалась в различных работах (см., например, [16, 17]).

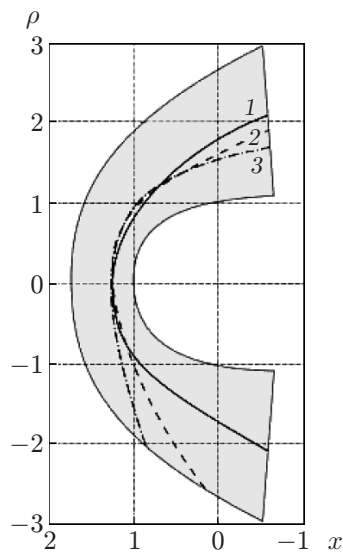


Рис. 4. Положение головных скачков плотности при различных значениях угла атаки:

1 — $\alpha = 0^\circ$, 2 — $\alpha = 10^\circ$, 3 — $\alpha = 30^\circ$; заштрихованная область — расчетная область

На рис. 4 показаны положения головных скачков плотности вблизи тела при различных значениях угла атаки α . Результаты сравнения положений головного скачка, определенных в данной работе и работах [16, 17] при различных значениях угла атаки и параметров течения, показывают, что они хорошо согласуются.

Исследуем некоторые свойства алгоритма (12). Одной из характеристик алгоритмов является минимизация времени расчета за счет выбора оптимальных шагов сетки и шага по времени τ (для задач на установление — за счет минимизации числа итераций для получения стационарного решения с заданной точностью). Предложенный алгоритм (12) позволяет проводить расчеты с различными значениями параметров задачи, в том числе с числами Куранта $C > 1,0$. Известно, что выбор оптимального шага τ зависит от начальных данных. Из результатов расчетов следует, что сначала шаг по времени τ задается с учетом условия $C < 0,5$. Через некоторое количество итераций, когда сформируется начальное поле и градиенты искомых функций уменьшатся, число Куранта можно увеличить до значений $C > 1,0$. Универсальный подход для определения параметров “разгона” в проведенных расчетах независимо от конкретной задачи и начальных данных отсутствует. Для приведенных выше двумерных задач оптимальными значениями параметра C для схемы со вторым порядком точности оказались значения $1 < C < 2$.

На рис. 5 приведена кривая сходимости к стационарному решению при обтекании клина (на оси абсцисс указано количество итераций N , на оси ординат — значения невязки $\delta = (\rho_{N+1} - \rho_N)/\rho_N$), полученная по неявной схеме (12) на сетке, содержащей 300×150 ячеек. При расчете по явной схеме количество итераций, необходимых для сходимости нестационарного решения к стационарному, увеличивается на порядок, что обусловлено различными ограничениями на шаг τ , а время расчета — в четыре раза. Количество итераций и время расчета, необходимые для сходимости нестационарного решения к стационарному, зависят от конкретной задачи, реализации алгоритма и конфигурации ЭВМ. Например, максимальная скорость сходимости по схеме (12) наблюдалась при значении весового параметра $0,52 \leq \alpha \leq 0,57$, а не при $\alpha \approx 1,0$, как можно было ожидать. При решении сильно нестационарных задач шаг по времени выбирается в зависимости от требуемой точности решения, в этом случае решение целесообразно находить по явной схеме, исключив из алгоритма этап предиктор, т. е. положив $\alpha = 0$.

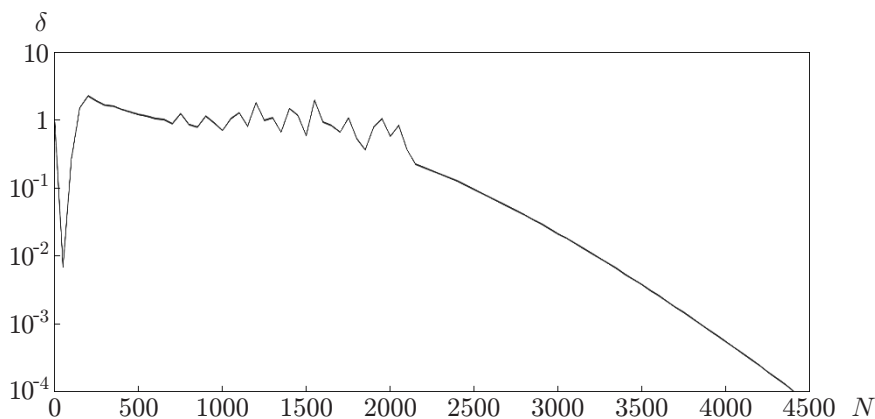


Рис. 5. Кривая сходимости нестационарного решения к стационарному

Исследовано влияние способов задания начальных данных на скорость сходимости при получении стационарного решения методом установления. Проведена серия расчетов процесса обтекания под нулевым углом атаки затупленного по форме сферы конуса при $10^2 \leq \text{Re} \leq 10^4$, $M = 3$ для двух вариантов начальных данных. В первом варианте значения параметров во всей расчетной области задавались равными их значениям в набегающем потоке, а на теле ставились условия прилипания; во втором варианте значения параметров задавались равными значениям параметров в сглаженном поле скоростей, изменяющимся от значения для невозмущенного потока (от середины расчетной области до тела) до нуля. Во втором варианте выход на стационарный режим происходил почти в два раза быстрее, чем в первом. Заметим, что режим установления наиболее быстро достигается в окрестности оси симметрии, а наиболее медленная сходимость имеет место на выходе из расчетной области. Подобные оценки получены в расчетах при других значениях числа Маха.

Заключение. Для численного решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса, записанных в интегральной форме, предложены конечно-объемные алгоритмы предиктор-корректор с различными формами расщепления. Возможность выбора на этом этапе форм расщепления и способов реализации алгоритма позволяет в рамках единого подхода рассматривать различные классы схем для численного решения многомерных задач. Предложен экономичный алгоритм на регулярных структурированных сетках с расщеплением по физическим процессам и пространственным переменным на этапе предиктор, позволяющий свести решение системы многомерных уравнений Навье — Стокса к скалярным прогонкам по каждому направлению и к явным вычислениям на этапе корректор. Исследованы свойства алгоритма с расщеплением по физическим процессам и пространственным переменным, получены оценки его точности и скорости сходимости при нахождении стационарного решения методом установления. Приведенные результаты расчетов позволяют сделать вывод об эффективности и экономичности предложенного алгоритма.

Автор выражает благодарность П. В. Бабинцеву и М. А. Солдаткину за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
2. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.

3. **Годунов С. К.** Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.
4. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
5. **Roache P. J.** Computational fluid dynamics. Albuquerque: Hermosa Publ., 1976.
6. **Le Veque R. J.** Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
7. **Vos J. B., Rizzi A., Darrac D., Hirschel E. H.** Navier — Stokes solvers in European aircraft design // Progr. Aerospace Sci. 2002. V. 38. P. 601–697.
8. **Ковеня В. М.** Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.
9. **Ковеня В. М.** Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
10. **Ковеня В. М., Бабинцев П. В.** Моделирование сверхзвуковых течений на основе алгоритмов расщепления // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 51–59.
11. **Ковеня В. М., Бабинцев П. В.** Применение алгоритмов расщепления в методе конечных объемов для численного решения уравнений Навье — Стокса // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3. С. 60–73.
12. **Самарский А. А.** Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. М.: Наука, 1978.
13. **Woodward P., Colella P.** The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys. 1984. V. 54. P. 115–173.
14. **Von Neumann J.** Oblique reflection of shock waves // Collected works of J. von Neumann. Oxford: Pergamon Press, 1963. V. 6. P. 238–299.
15. **Ivanov M. S., Vandromme D., Fomin V. M., et al.** Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results // Shock Waves. 2001. V. 11, N 3. P. 197–207.
16. **Любимов А. Н.** Течение газа около тупых тел / А. Н. Любимов, В. В. Русанов. М.: Наука, 1970. Т. 1.
17. **Ковеня В. М.** Применение метода расщепления в задачах аэродинамики / В. М. Ковеня, Г. А. Тарнавский, С. Г. Черный. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

*Поступила в редакцию 20/II 2021 г.,
после доработки — 20/II 2021 г.
Принята к публикации 1/III 2021 г.*
