

УДК 532.5:519.6

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОСОГО НАКАТА УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ

В. Б. Барахнин, Г. С. Хакимзянов

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

Приводятся результаты расчетов в рамках нелинейно-дисперсионной модели Железняк — Пелиновского и трехмерной модели потенциальных течений, полученные конечно-разностными методами с использованием динамически адаптивных сеток, и дается сравнение полученных результатов с расчетами других авторов.

**Введение.** В [1] описаны эксперименты работы [2] по исследованию взаимодействия уединенной волны амплитуды  $a_i$  с плоской вертикальной стенкой, к которой волна подходит под некоторым углом  $\psi_i$ . Установлено, что в зависимости от величины  $\psi_i$  отражение волны от стенки может быть регулярным или нерегулярным (маховским). При регулярном отражении пересечение гребней падающей и отраженной волн происходит на стенке, а при маховском образуется третья волна, называемая ножкой Маха, которая располагается между стенкой и точкой пересечения гребней первых двух волн. Схема маховского отражения изображена на рис. 1, где гребни волн показаны жирными линиями.

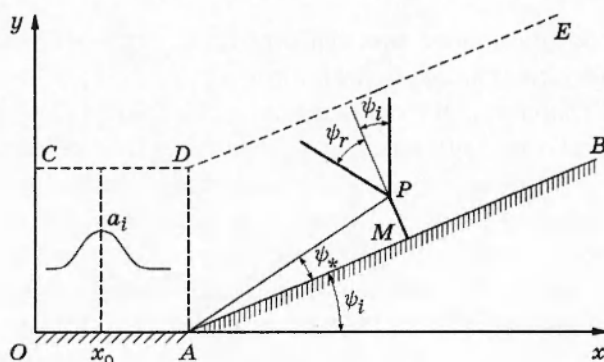


Рис. 1. Схема маховского отражения

Теоретическое исследование косою наката на стенку выполнено в работах Дж. Майлса [3, 4]. В них аналитические формулы для величины максимального заплеска  $R$ , амплитуды  $a_r$  отраженной волны, угла отражения  $\psi_r$  и угла  $\psi_*$ , под которым видна ножка Маха из точки  $A$ , получены путем исследования решений некоторой нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды с использованием следующих предположений: амплитуда набегающей волны  $a_i$  бесконечно мала,  $\psi_i^2 = O(a_i)$ . При этом из множества возможных схем взаимодействия волны со стенкой использованы те волновые конфигурации, которые наблюдались в экспериментах [2], т. е. двойная и тройная конфигурации, причем предполагалось, что вдали от зоны взаимодействия все волны имеют форму солитонов, а в случае маховского

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 43 СО РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00819).

отражения параметры волн связаны дополнительными условиями резонансного взаимодействия. При указанных предположениях получена следующая формула для величины максимального заплеска:

$$\frac{R}{a_i} = \begin{cases} \frac{4}{1 + (1 - 3a_i/\psi_i^2)^{1/2}} & \text{при } \frac{\psi_i^2}{3a_i} \geq 1, \\ \left(1 + \frac{\psi_i}{(3a_i)^{1/2}}\right)^2 & \text{при } \frac{\psi_i^2}{3a_i} \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, если уединенная волна набегаёт на стенку под углом, то величина заплеска может достичь значения  $R_* = 4a_i$ .

Существенным недостатком работы [2] является то, что лабораторные эксперименты проводились в очень мелком лотке со слоем воды 4 см. Как указано в [5], форма волны, распространяющейся по такому тонкому слою, претерпевает значительную деформацию ввиду сильного влияния капиллярных и вязких эффектов, так что со стенкой взаимодействует волна формы, отличной от заданной в начальный момент времени. В экспериментах У. Мелвилла [5] глубина бассейна достигала 30 см, однако для величины  $R$  получались значения, не превышающие  $2a_i$ . Авторы работы [6] доказали, что столь малые значения заплеска объясняются тем, что в [5] фактически изучался лишь начальный этап взаимодействия волны со стенкой, а для достижения установившихся значений  $R$  необходимо, чтобы волна прошла расстояние, по крайней мере на порядок большее, чем в экспериментах У. Мелвилла. Это означает, что горизонтальные размеры бассейна необходимо увеличить в десятки раз (У. Мелвиллом использовался бассейн размером  $18,3 \times 6,2$  м). Так как в настоящее время создание таких экспериментальных установок проблематично, для изучения косоугольного наката уединенной волны большую значимость приобретают вычислительные эксперименты.

Численное моделирование косоугольного наката описано, например, в работе [7] для  $a_i/h_0 = 0,05$ , где  $h_0$  — глубина бассейна (далее будем полагать  $h_0 \equiv 1$ ), при этом в расчетах использовалась математическая модель, на основе которой Дж. Майлс получил теоретические зависимости. Оказалось, что величины  $\psi_*$  и  $\psi_r$  согласуются со значениями, полученными теоретически, но для  $a_r$ , и в особенности для величины максимального заплеска  $R$ , расхождение с теорией достаточно велико. Видимо, теория Майлса применима при  $a_i \ll 0,05$  и малых значениях  $\psi_i$ . Вместе с тем известно [6–9], что с уменьшением значений  $a_i$  и  $\psi_i$  быстро увеличивается время достижения квазистационарной картины взаимодействия. Если учесть также, что с уменьшением  $a_i$  увеличивается длина уединенной волны и, следовательно, количество сеточных узлов, необходимое для ее качественного описания, то становится понятным, что в настоящее время вряд ли возможно на основе вычислительных экспериментов установить верхние границы (по параметрам  $a_i$  и  $\psi_i$ ) применимости теории Майлса. М. Фунакоши указывает [7], что даже при  $a_i = 0,05$  некоторые расчеты не удавалось провести до конца из-за неприемлемо высоких затрат машинных ресурсов.

В то же время практический интерес представляет процесс наката волн конечной, а не бесконечно малой амплитуды. В условиях отсутствия как надежных экспериментальных данных, так и теории косоугольного наката волн конечной амплитуды численное моделирование является единственным инструментом исследования этого явления. М. Фунакоши использовал конечно-разностный метод расчета для волны с амплитудой  $a_i = 0,05$ . М. Танака [9] для  $a_i = 0,3$  применил спектральный метод. Большую серию расчетов в диапазоне амплитуд  $a_i = 0,05 \div 0,30$  выполнили О. А. Серебренникова и А. М. Франк на основе дискретной модели несжимаемой жидкости. Ввиду имеющегося расхождения численных результатов при некоторых значениях параметров следует провести расчеты на основе других математических моделей и алгоритмов.

В настоящей работе приводятся результаты расчетов в рамках нелинейно-дисперсионной модели Железняк — Пелиновского и трехмерной модели потенциальных течений, полученные конечно-разностными методами с использованием динамически адаптивных сеток, и дается сравнение полученных результатов с расчетами других авторов.

**1. Метод решения.** Прежде всего отметим, что все данные приведены в безразмерных переменных. Обезразмеривание пространственных переменных осуществлялось путем деления на  $h_0$ , времени — путем умножения на  $\sqrt{g/h_0}$ , где  $g$  — ускорение свободного падения.

Область течения изображена на рис. 1. При  $t = 0$  линия гребня уединенной волны параллельна оси  $Oy$ , вершина волны имела абсциссу  $x_0$ , причем в расчетах по нелинейно-дисперсионной модели точка  $x_0$  выбиралась правее отрезка  $AD$ , по модели потенциальных течений — левее.

Для нелинейно-дисперсионной модели уединенная волна в начальный момент времени задавалась формулами

$$\begin{aligned} \eta(x, y, 0) &= a_i \operatorname{sech}^2 X, & X &= \sqrt{3a_i/(4(a_i + 1))}(x - x_0); \\ u(x, y, 0) &= U_0 \eta / (1 + \eta), & v(x, y, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U_0 = \sqrt{1 + a_i}$ . Для модели потенциальных течений использовались формулы Л. В. Овсянникова [10], которые после элементарных преобразований имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta(x, y, 0) &= a_i \operatorname{sech}^2 X, \\ u(x, y, z, 0) &= U_0 \frac{\eta}{\eta + 1} - \frac{a_i^2}{U_0} \left[ \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \left( \frac{z + i}{\eta + 1} \right)^2 \right] \left[ 2 \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \operatorname{sech}^2 X + \frac{3 - \eta}{\eta + 1} \operatorname{sech}^4 X \right], \\ v(x, y, z, 0) &= 0, & w(x, y, z, 0) &= \sqrt{3a_i^3} (1 + z) \operatorname{ch} X \operatorname{sh} X / (a_i + \operatorname{ch}^2 X)^2. \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах  $\eta$  — возвышение свободной поверхности;  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости.

Численная реализация нелинейно-дисперсионной модели Железняк — Пелиновского [11] осложняется наличием в уравнениях смешанных производных высокого порядка по времени и пространственным переменным. Порядок этих производных можно понизить, введя новые зависимые переменные таким образом, чтобы исходная система уравнений оказалась расщепленной на эллиптическое уравнение и неоднородную гиперболическую систему [12]. Для численного решения расщепленной системы уравнений используется явная конечно-разностная схема предиктор-корректор с автоматически настраиваемой аппроксимационной вязкостью [13]. На шаге предиктор этой схемы используется аппроксимация недивергентной формы гиперболической части, на шаге корректор — дивергентной. Эллиптическое уравнение решается перед обоими шагами схемы предиктор-корректор с помощью 9-точечной схемы типа «косой крест» [14] с самосопряженным и положительно определенным оператором, полученной на основе интегроинтерполяционного метода [12].

Алгоритм расчета трехмерных потенциальных течений идеальной жидкости со свободной границей изложен в работе [15]. На каждом временном шаге сначала определяются значения потенциала  $\varphi$  в узлах свободной поверхности, затем итерационным методом последовательной верхней релаксации решается уравнение Лапласа, записанное в подвижной криволинейной системе координат, и находятся значения потенциала во внутренних узлах и узлах, лежащих на неподвижных непроницаемых стенках. Из кинематического условия определяется новое положение свободной поверхности  $\eta$ , и строится адаптивная сетка на момент времени  $t_{n+1}$ . Цикл вычислений на данном временном шаге повторяется несколько раз до сходимости величин  $\varphi$  и  $\eta$  с заданной точностью.

При численном решении задачи мы использовали криволинейные сетки, приспособляющиеся к форме области и зависящие от решения. Такие сетки имеют преимущества по сравнению с равномерными ввиду более простой реализации краевых условий на границах. Кроме того, благодаря адаптации сетки к решению достигается высокая точность при небольшом числе узлов ввиду увеличения их концентрации в зонах расположения особенностей исследуемого явления: в окрестностях гребней падающей и отраженных волн, ножки Маха и зоны заплеска.

При использовании криволинейных сеток в каждый момент времени  $t$  подвижная, вообще говоря, область  $\Omega(t)$ , занятая жидкостью, отображается на неподвижную расчетную область  $Q$ , являющуюся в зависимости от размерности задачи единичным квадратом или единичным кубом. Такое отображение осуществляется на основе взаимно однозначного невырожденного преобразования координат. Уравнения, начальные и краевые условия записываются в новой системе координат [12, 15].

В расчетах по двумерной нелинейно-дисперсионной модели сетка строится следующим образом [16]. В направлении распространения волны сетка сгущается с помощью одномерного метода равномерного распределения (эквираспределения), учитывающего положение узлов на предыдущем временном слое, причем управляющая функция выбирается так, что наибольшее сгущение сетки достигается в областях наибольших значений возвышения свободной поверхности  $\eta$ . Вдоль второго направления узлы расставляются по закону геометрической прогрессии, сгущаясь к стенке  $OAB$  (рис. 1).

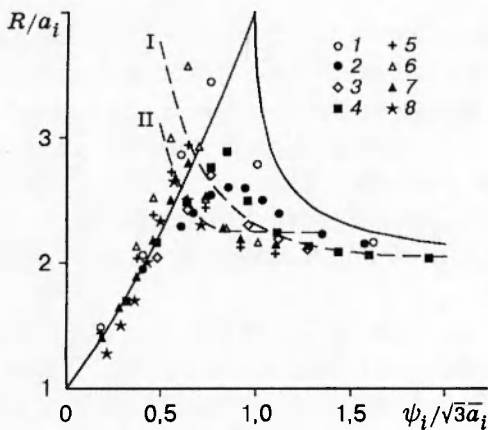
При решении трехмерных задач сетка строится комбинированным методом, суть которого заключается в том, что по каждому координатному направлению используется одномерный метод равномерного распределения. Вдоль первого и второго координатных направлений сгущение сетки зависит от величины  $\eta$ , а вдоль прямолинейных координатных линий, выходящих из узлов дна и пересекающих свободную поверхность, узлы сгущаются в зависимости от величины модуля вектора скорости.

Описанный выше алгоритм построения трехмерных адаптивных сеток позволяет добиться лишь незначительного изменения амплитуды и формы набегающей волны даже при прохождении расстояния порядка 30 ее длин. Заметим, что в работе [8], в которой сетки адаптировались только к границам области, амплитуда волны уменьшалась к соответствующему моменту времени на 10 %.

Граничные условия ставятся следующим образом. Искусственная граница  $CDE$  (рис. 1) устанавливалась достаточно далеко от стенки  $OAB$  (на расстоянии  $40 \div 70$  для нелинейно-дисперсионной модели (НЛД-модели),  $80$  — для модели потенциальных течений (МПТ)), вследствие чего эта граница в течение длительного промежутка времени не оказывала влияния на взаимодействие набегающей волны со стенкой. Поэтому на искусственной границе полагалось, что частные производные по переменной  $y$  от искомых функций равны нулю. На твердой стенке  $OAB$  ставилось условие непротекания.

Вычисления проводились в движущейся расчетной области, связанной с гребнем набегающей волны. Подобная методика применялась, например, в статьях [6, 7]. На правой стороне расчетной области задавались условия невозмущенного потока. На левой обычно ставилось условие непротекания, которое не вносило существенного изменения в картину течения, так как волны, генерируемые условием непротекания, не успевали распространиться внутрь расчетной области. Однако в расчетах по модели потенциальных течений для углов  $\psi_i \geq 40^\circ$  на левой границе целесообразно применять экстраполяцию вдоль гребня отраженной волны.

Размер расчетной области в направлении оси  $Ox$  при расчетах по нелинейно-дисперсионной модели составлял 62,5, число узлов сетки —  $251 \times 21$ . В расчетах по трехмерной модели потенциальных течений указанный размер выбирался в диапазоне от 40

Рис. 2. Зависимость  $R/a_i$  от  $\psi_i/\sqrt{3a_i}$ :

точки — результаты расчетов; сплошная линия — теоретическая зависимость (1); штриховые — теоретическая зависимость (3) (I —  $a_i = 0,1$ ; II —  $a_i = 0,5$ );  $a_i = 0,05$ : 1 — [7], 2 — МПТ;  $a_i = 0,1$ : 3 — НЛД-модель, 4 — МПТ;  $a_i = 0,3$ : 5 — [9], 6 — [6], 7 — МПТ;  $a_i = 0,5$ : 8 — МПТ

до 30 (уменьшение размера происходило с ростом  $a_i$ ), при этом число узлов сетки бралось от  $121 \times 81 \times 8$  до  $121 \times 81 \times 12$ . Для уточнения сходимости некоторые расчеты проводились на сетке  $241 \times 161 \times 16$ .

**2. Результаты численного моделирования.** На рис. 2 показана зависимость величины заплеска  $R_i/a_i$  от величины  $\psi_i/\sqrt{3a_i}$  для различных значений амплитуды набегающей волны. Видно, что для каждого  $a_i$  эта зависимость имеет немонотонный характер. При малых  $\psi_i$  величина  $R/a_i$  близка к единице. Далее с ростом  $\psi_i$  растут и значения относительного заплеска. При некотором критическом  $\psi_{i,*}$  заплеск принимает наибольшее значение, а при дальнейшем увеличении угла  $\psi_i$  заплеск монотонно уменьшается. Такое же качественное поведение зависимости  $R/a_i$  от  $\psi_i/\sqrt{3a_i}$  имело место в расчетах других авторов [6, 7, 9]. Количественное сравнение дает удовлетворительное согласование расчетов по модели потенциальных течений и расчетов [9] при  $a_i = 0,3$ . Наблюдается сильное различие результатов наших расчетов с расчетами [6, 7] в окрестности критических значений угла падения  $\psi_{i,*}$ . При удалении от этой точки различие результатов уменьшается.

На рис. 2 приведены графики теоретической зависимости (1). Видно, что при конечных значениях амплитуды  $a_i$  (даже при  $a_i = 0,5$ ) результаты расчетов лежат вблизи кривой (1) (см. второе уравнение) для маховского отражения, хотя последняя получена для заплеска волн бесконечно малой амплитуды. В то же время и в наших расчетах, и в расчетах [6, 7, 9] значения  $R/a_i$ , сильно отличаются от зависимости (1) (см. первое уравнение) для регулярного отражения. Расчетные данные сдвинуты влево от кривой (1) (см. первое уравнение). Точка максимума величины  $R/a_i$  также сдвинута влево от точки  $\psi_i/\sqrt{3a_i} = 1$ , причем с ростом  $a_i$  сдвиг увеличивается. Напротив, в случае  $a_i = 0,05$  в расчетах по модели потенциальных течений максимум достигается при  $\psi_i/\sqrt{3a_i} \approx 1$ .

Отметим также, что в наших расчетах, в отличие от расчетов [6, 7] и теории [4], при изменении  $\psi_i$  величина  $R/a_i$  изменяется сравнительно гладко. Особенно хорошо это видно при  $a_i = 0,05$ .

В работе Дж. Майлса [3] получена еще одна зависимость заплеска волны бесконечно малой амплитуды при регулярном отражении:

$$\frac{R}{a_i} = 2 + a_i \left( \frac{3}{2 \sin^2 \psi_i} - 3 + 2 \sin^2 \psi_i \right). \quad (3)$$

Эта формула выведена без предположения о малости величины  $\psi_i$ , т. е. при  $\psi_i \gg a_i$ . М. Танака провел сравнение рассчитанных им значений максимального заплеска при регулярном отражении со значениями, получаемыми по формуле (3), и получил качественное соответствие, несмотря на то что в расчетах условие  $\psi_i \gg a_i$  нарушается. На рис. 2 изображены две кривые (3) при  $a_i = 0,1$  и  $a_i = 0,5$ . Видно, что в случае  $a_i = 0,1$  результаты

расчетов заплеска по НЛД-модели соответствуют зависимости (3) при  $\psi_i > \psi_{i,*}$ . Для указанной амплитуды МПТ дает расчетные значения, согласующиеся с (3) при  $\psi_i/\sqrt{3a_i} > 1$ .

В диапазоне  $a_i = 0,1 \div 0,2$  точка пересечения кривой (3) и кривой маховского отражения (1) (см. второе уравнение) незначительно отличается от точки, в которой при расчетах по НЛД-модели наблюдается максимальное значение заплеска. Для амплитуд  $a_i \geq 0,3$  расчеты регулярного отражения с использованием МПТ соответствуют зависимости (3), при этом, как и для НЛД-модели, расчетные данные в области маховского отражения соответствуют зависимости (1) (см. второе уравнение).

Другой важной характеристикой моделируемого процесса является амплитуда отраженной волны  $a_r$ . Для вычисления ее значения использовался следующий подход. Вначале на каждой координатной линии второго семейства, проходящей за фронтом падающей волны, определялся узел сетки, в котором возвышение отраженной волны было максимальным. Найденные узлы использовались затем для проведения прямой методом наименьших квадратов, с которой отождествлялся гребень отраженной волны. Из дальнейшего анализа исключались левая и правая части гребня, примыкающие соответственно к левой границе расчетной области и месту стыковки отраженной и падающей волн (точка  $P$  на рис. 1), причем изменение возвышения вдоль всей оставшейся средней части гребня не превышало 3%. Наконец, в качестве  $a_r$  бралось среднее арифметическое значений  $\eta$  в узлах сетки, попадающих на эту часть гребня.

На рис. 3 представлены зависимости величины  $a_r/a_i$  от  $\psi_i/\sqrt{3a_i}$ . Видно, что и наши результаты, и результаты расчетов других авторов [6, 7, 9] качественно соответствуют теории Майлса, согласно которой

$$\frac{a_r}{a_i} = \begin{cases} 1 & \text{при } \psi_i^2/(3a_i) \geq 1, \\ \psi_i^2/(3a_i) & \text{при } \psi_i^2/(3a_i) \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Как отмечено в [6], в случае маховского отражения результаты расчетов соответствуют квадратичной зависимости (4). При этом расчеты по МПТ для  $a_i = 0,05$  совпадают с теоретическими данными не только качественно, но и количественно. Для больших значений  $a_i$  графики сдвинуты влево относительно теоретической зависимости и имеют большую крутизну.

На рис. 4 приведены графики углов отражения. Угол  $\psi_r$  полагался равным углу между нормалью к стенке и прямолинейным гребнем отраженной волны, определенным описанным выше способом. Видно, что при  $a_i = 0,05$  имеет место хорошее совпадение расчетных данных с результатами расчетов Фунакоши и теорией Майлса. С ростом амплитуды на-

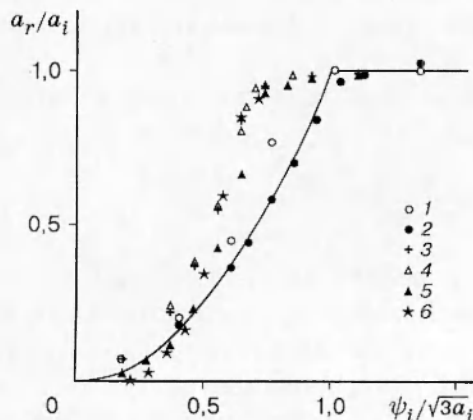


Рис. 3. Зависимость  $a_r/a_i$  от  $\psi_i/\sqrt{3a_i}$ : точки — результаты расчетов, сплошная линия — теоретическая зависимость Майлса [3, 4];  $a_i = 0,05$ : 1 — [7], 2 — МПТ;  $a_i = 0,3$ : 3 — [9], 4 — [6], 5 — МПТ;  $a_i = 0,5$ : 6 — МПТ

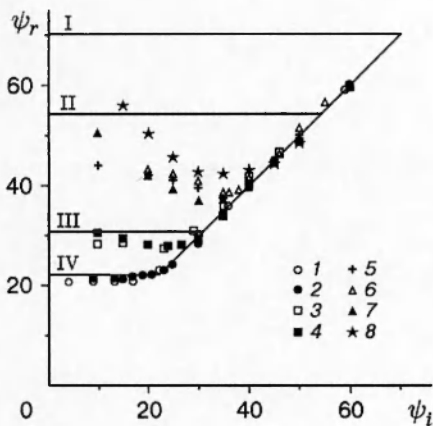


Рис. 4. Зависимость  $\psi_r$  от  $\psi_i$ :

точки — результаты расчетов, сплошные линии — теоретическая зависимость Майлса [3, 4] (I —  $a_i = 0,5$ ; II —  $a_i = 0,3$ ; III —  $a_i = 0,1$ ; IV —  $a_i = 0,05$ );  $a_i = 0,05$ : 1 — [7], 2 — МПТ;  $a_i = 0,1$ : 3 — [6], 4 — МПТ;  $a_i = 0,3$ : 5 — [9], 6 — [6], 7 — МПТ;  $a_i = 0,5$ : 8 — МПТ

бегающей волны расхождение со значениями, вычисляемыми по теоретической формуле

$$\psi_r = \begin{cases} \psi_i & \text{при } \psi_i^2 / (3a_i) \geq 1, \\ (3a_i)^{1/2} & \text{при } \psi_i^2 / (3a_i) \leq 1, \end{cases}$$

увеличивается, однако имеет место соответствие с расчетами [6, 9] (за исключением угла  $\psi_i = 10^\circ$ ). Можно также отметить, что в расчетах по модели потенциальных течений графики имеют больший прогиб, чем в расчетах других авторов. Интересно, что даже при очень большой амплитуде  $a_i = 0,5$  характер зависимости сохраняется таким же, как при  $a_i = 0,2$  и  $a_i = 0,3$ . Кроме того, при уменьшении  $\psi_i$  значения  $\psi_r$  приближаются к теоретическому значению  $\sqrt{3a_i}$ .

На рис. 5 показана зависимость угла  $\psi_*$  (см. рис. 1) от  $\psi_i / \sqrt{3a_i}$ . Для  $a_i = 0,05$  вновь имеет место соответствие численных результатов, полученных нами и М. Фунакоши, с теоретической зависимостью

$$\psi_* = \begin{cases} 0 & \text{при } \psi_i^2 / (3a_i) \geq 1, \\ (a_i/3)^{1/2} (1 - \psi_i / (3a_i)^{1/2}) & \text{при } \psi_i^2 / (3a_i) \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Однако с ростом амплитуды набегающей волны значения  $\psi_*$ , полученные по модели потенциальных течений, все больше отклоняются от зависимости (5). При этом наблюдается не только количественное, но и качественное различие. Если график зависимости (5) для маховского отражения является прямолинейным отрезком, то в расчетах получались более сложные степенные зависимости.

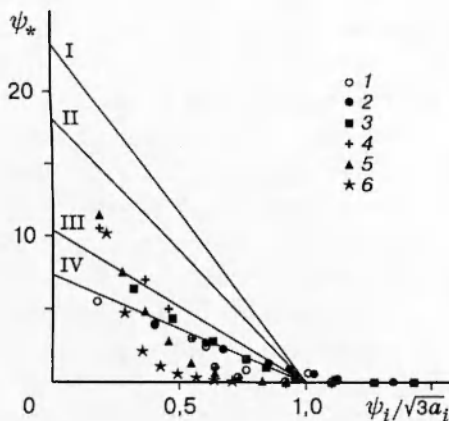


Рис. 5. Зависимость  $\psi_*$  от  $\psi_i / \sqrt{3a_i}$ :

точки — результаты расчетов, сплошные линии — теоретическая зависимость Майлса [3, 4] (I —  $a_i = 0,5$ ; II —  $a_i = 0,3$ ; III —  $a_i = 0,1$ ; IV —  $a_i = 0,05$ );  $a_i = 0,05$ : 1 — [7], 2 — МПТ;  $a_i = 0,1$ : 3 — МПТ;  $a_i = 0,3$ : 4 — [9], 5 — МПТ;  $a_i = 0,5$ : 6 — МПТ

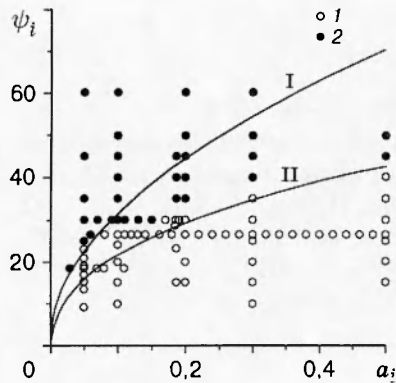


Рис. 6. Тип отражения при разных значениях  $a_i$  и  $\psi_i$ :  
 I —  $\psi_i = \sqrt{3a_i}$ ; II — (6); 1 — маховское отражение,  
 2 — регулярное отражение

Наконец, на основании расчетов по модели потенциальных течений установим зависимость типа отражения от значений величин  $a_i$  и  $\psi_i$ . В настоящей работе тип отражения определялся по углу  $\psi_*$ . Если к моменту времени  $t = 300$  выполнялось условие  $\psi_* < 0,5^\circ$  и величина  $\psi_*$  при дальнейшем увеличении времени не возрастала, то отражение считалось регулярным. На рис. 6 представлена зависимость типа отражения от  $\psi_i$  и  $a_i$ . Видно, что при малых амплитудах набегающей волны ( $a_i < 0,08$ ) значение  $\psi_i^0$ , которое отделяет маховский тип отражения от регулярного, соответствует формуле Майлса  $\psi_i = \sqrt{3a_i}$ . Далее с ростом  $a_i$  величина  $\psi_i^0$  становится меньше, чем  $\sqrt{3a_i}$ . При  $a_i > 0,3$  значение  $\psi_i^0$  достаточно точно находится из условия равенства выражений (1) (см. второе уравнение) и (3), т. е.  $\psi_i^0$  близко к корню  $\psi$  уравнения

$$\left(1 + \frac{\psi}{\sqrt{3a_i}}\right)^2 - 2 - a_i \left(\frac{3}{2 \sin^2 \psi} - 3 + 2 \sin^2 \psi\right) = 0. \quad (6)$$

На основе сравнения полученных разными авторами результатов расчетов можно сделать вывод, что все они близки качественно, сильное количественное различие имеет место лишь для величин заплеска на стенку. При  $a_i = 0,05$  получено удовлетворительное согласование рассчитанных по модели потенциальных течений величин  $\psi_r$ ,  $a_r$ ,  $\psi_*$  с теоретическими зависимостями Дж. Майлса. При  $a_i > 0,1$  наблюдается значительное количественное различие с теорией. Однако вплоть до  $a_i = 0,3$  в расчетах получалась та же конфигурация взаимодействующих волн, что и используемая в теории Майлса. Более того, в наших расчетах, как и в теории, при  $a_i \leq 0,2$  отраженная волна имела поперечное сечение в форме солитона, иначе говоря, описывалась в окрестности гребня выражением (2), если в последнем заменить  $a_i$  на вычисленное значение  $a_r$ , положить  $x_0 = 0$ , а вместо  $x$  брать расстояние от гребня отраженной волны в перпендикулярном ему направлении.

В то же время, если  $a_i > 0,3$ , то в расчетах по модели потенциальных течений наблюдалась иная схема взаимодействия волны со стенкой. Например, для  $a_i = 0,5$  в случае маховского отражения присутствуют две отраженные волны, а гребень ножки Маха не имеет участка с постоянным возвышением (в отличие от случая  $a_i \leq 0,3$ ), начиная понижаться сразу от стенки. Интересно отметить, что и для  $a_i = 0,5$  поперечные сечения ножки Маха имеют форму плоских уединенных волн вида (2). При этом для некоторого диапазона значений  $\psi_i$  амплитуда этих волн превосходит критическую амплитуду уединенной волны, равную примерно 0,83. Например, для  $a_i = 0,5$ ,  $\psi_i = 40^\circ$  профиль свободной поверхности вдоль стенки  $AB$  (см. рис. 1) после установления имеет форму уединенной волны с осцилляциями позади вершины и максимальным возвышением в точке  $M$ , равным 1,32. Подчеркнем, что волна на стенке с таким сверхкритическим значением ампли-



туды распространяется без обрушения. Устойчивость этой волны, по-видимому, можно объяснить тем, что при  $a_i = 0,5$  в ножке Маха устанавливается сложная картина течения со скоростями, имеющими ненулевую компоненту вдоль гребня.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Wiegel R. L.** Oceanographical engineering. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, 1964.
2. **Perroud P. H.** The solitary wave reflection along a straight vertical wall at oblique incidence: PhD thesis. Berkeley: Univ. Calif., 1957.
3. **Miles J. M.** Obliquely interacting solitary waves // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. P. 157–169.
4. **Miles J. M.** Resonantly interacting solitary waves // Ibid. P. 171–179.
5. **Melville W. K.** On the Mach reflexion of a solitary wave // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. P. 285–297.
6. **Серебренникова О. А., Франк А. М.** Численное моделирование отражения Маха для уединенных волн // ПМТФ. 1993. № 5. С. 15–24.
7. **Funakoshi M.** Reflexion of obliquely incident solitary waves // J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 49, N 6. P. 2371–2379.
8. **Хакимянов Г. С.** О численном моделировании на адаптивных сетках трехмерных течений жидкости с поверхностными волнами // Тр. Всесоюз. совещ. по числ. методам в задачах волновой гидродинамики, Ростов-на-Дону, 23–27 сент. 1990 г. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1991. С. 103–108.
9. **Tanaka M.** Mach reflection of a large-amplitude solitary wave // J. Fluid Mech. 1993. V. 248. P. 637–661.
10. **Овсянников Л. В.** Параметры кноидальных волн // Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983. С. 150–166.
11. **Железняк М. И., Пелиновский Е. Н.** Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег. Горький: Ин-т прикл. физики АН СССР, 1985. С. 8–33.
12. **Барахнин В. Б., Хакимянов Г. С.** Об алгоритме численного решения уравнений одной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 3. С. 5–20.
13. **Barakhnin V. B., Khakimzyanov G. S.** Adaptive-grid numerical solution of one-dimensional and two-dimensional problems for the shallow-water equations // Adv. math.: Comput. and appl.: Proc. of the AMCA-95, Novosibirsk, 20–24 June, 1995. Novosibirsk: NCC Publisher, 1995. P. 144–153.
14. **Самарский А. А., Андреев В. Б.** Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
15. **Шокин Ю. И., Хакимянов Г. С.** Конечно-разностный метод расчета трехмерных потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью // Вычисл. технологии. 1992. Т. 1, № 1. С. 154–176.
16. **Барахнин В. Б., Хакимянов Г. С.** Применение динамически адаптивных сеток в плановых задачах теории мелкой воды // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1997. Вып. 2. С. 36–44.

*Поступила в редакцию 27/VI 1997 г.,  
в окончательном варианте — 1/IV 1998 г.*