

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СЖИМАЕМЫХ ГАЗОВ *

В. Е. Неуважеев

(Челябинск)

Известно, что поверхность раздела жидкостей или газов, находящаяся в поле тяжести, разрушится, если тяжелое вещество находится над легким. Аналогичная картина возникнет в отсутствие поля тяжести, если легкое вещество ускоряет тяжелое. Теория турбулентного перемешивания и соответствующее автомодельное решение для несжимаемых жидкостей построены в работе [1].

Для некоторых автомодельных задач газовой динамики возникают условия, приводящие к турбулентному перемешиванию. В данной работе построены решения с учетом турбулентного перемешивания. Рассмотрена задача о движении двух первоначально холодных газов, в одном из которых задано нарастающее энерговыделение, меняющееся по степенному или экспоненциальному закону. В автомодельном решении на границе раздела, движущейся с ускорением, появляется разрыв плотности: в холодный газ пойдет ударная волна, оставляющая за собой высокую (у границы бесконечную) плотность, в энерговыделяющий газ распространится волна разрежения. Граница раздела, очевидно, неустойчива — легкое вещество ускоряет тяжелое. Для этой задачи построено решение с учетом турбулентного перемешивания.

Рассмотрена задача о движении газа под действием приложенного к нему давления, нарастающего либо степенным образом, либо по экспоненте. Поверхность газа, к которой приложено давление, свободная. Такой поршень может быть получен, когда в вакууме задано давление (например, света). Свободная поверхность неустойчива к малым возмущениям. В отличие от известных автомодельных решений [2, 3] получающееся решение с турбулентным перемешиванием имеет заметно другое распределение плотности и энтропии. Максимальное значение плотности в ударной волне достигается либо на фронте, либо за фронтом, но не на поршне, как в решении без перемешивания. Минимальное, нулевое, значение плотности достигается на неподвижном поршне.

Ударная волна с учетом перемешивания движется с большей скоростью, чем в случае без перемешивания. Построенные автомодельные решения с турбулентным перемешиванием зависят от постоянной, определяемой из эксперимента. В приводимых ниже примерах эта постоянная заимствована из работы [4]. Ее окончательный выбор для данного типа задач может быть сделан путем постановки соответствующего эксперимента.

1. Постановка задачи с энерговыделением. Пусть координатная плоскость $x = 0$ является границей раздела холодных покоящихся газов с разными начальными плотностями и разными уравнениями состояния:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1^0; p = A_1 \rho T, \varepsilon = B_1 T \text{ при } x < 0, \\ \rho &= \rho_2^0; p = A_2 \rho T, \varepsilon = B_2 T \text{ при } x > 0; \\ u(o, x) &= 0, T(o, x) = 0, \end{aligned}$$

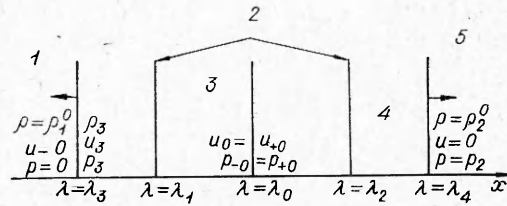
где ρ — плотность; T — температура; p — давление; ε — внутренняя энергия; u — скорость; A_1, A_2, B_1, B_2 — постоянные, индекс 1 отнесем к левой области, индекс 2 — к правой.

* Доложено на V Всесоюзном семинаре по аналитическим методам в газодинамике. Махачкала, июль 1974 г.

В области $x > x_0(t)$ ($x_0(t)$ — траектория границы) в единице массы задано энерговыделение

$$\varepsilon_0 = \mu F_0 t^n, \mu = \begin{cases} 1 & x \geq x_0(t) \\ 0 & x < x_0(t), \end{cases}$$

F_0 и n — положительные постоянные.



Фиг. 1

Уравнения газодинамики в переменных Эйлера имеют вид

$$(1.1) \quad \rho(\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x) + \partial p / \partial x = 0;$$

$$(1.2) \quad \partial \rho / \partial t + \partial(\rho u) / \partial x = 0;$$

$$(1.3) \quad \partial(\varepsilon + u^2/2) / \partial t + u \partial(\varepsilon + u^2/2) / \partial x + (1/\rho) \partial(\rho u) / \partial x = \\ = \partial \varepsilon_0 / \partial t + u \partial \varepsilon_0 / \partial x.$$

Граничные условия должны быть следующими: слева от энерговыделяющей области возникнет сильная ударная волна (фиг. 1, где 1 — фронт ударной волны, 2 — границы области перемешивания, 3 — контактная граница, 4 — энерговыделяющая область, 5 — фронт волны разрежения)

$$\rho_3 = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} \rho_1^0, p_3 = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \rho_1^0 U^2, u_3 = \frac{2}{\gamma_1 + 1} U,$$

где $\gamma_1 = 1 + A_1/B_1$; U — скорость распространения ударной волны. Вправо по энерговыделяющему газу со звуковой скоростью $\sqrt{\gamma_2 p_2 / \rho_2^0}$ пойдет волна разрежения, на фронте которой

$$u = 0; \rho = \rho_2^0, p = (\gamma_2 - 1) \rho_2^0 \varepsilon_0.$$

На контактной границе $x = x_0(t)$ выполняются условия непрерывности давления и скорости:

$$p_{-0} = p_{+0}, u_{-0} = u_{+0}.$$

Поставленная задача является автомодельной. Если ввести безразмерные переменные по формулам

$$(1.4) \quad \lambda = [(n + 2)/2](B_2/A_2 F_0)^{1/2} x / t^{1+n/2}, u = (A_2 F_0 / B_2)^{1/2} t^{n/2} \zeta(\lambda), \\ \rho = \rho_1^0 \delta(\lambda), T = (F_0 / B_2) t^n \theta(\lambda), p = A_2 (F_0 / B_2) t^n \pi(\lambda),$$

то уравнения (1.1) — (1.3) после подстановки в них (1.4) сведутся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.5) \quad N = n/(n + 2), \delta[N\zeta + (\zeta - \lambda)\zeta'] + \pi' = 0;$$

$$(1.6) \quad (\lambda - \zeta)\delta' = \delta\zeta';$$

$$(1.7) \quad 2N\mu/(\gamma - 1) = 2N(\zeta^2/2 + \theta/(\gamma - 1)) + (\zeta - \lambda) \times \\ \times (\zeta^2/2 + \theta/(\gamma - 1))' + \theta\zeta.$$

В последнем уравнении показатель адиабаты γ принимает в каждой области свое значение: при $\mu = 0$ $\gamma = \gamma_1$, при $\mu = 1$ $\gamma = \gamma_2$.

Соответственно граничные условия в автомодельных переменных имеют вид

на фронте ударной волны ($\lambda = \lambda_3$)

$$(1.8) \quad \delta_3 = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}; \quad \pi_3 = [2/(\gamma_1 + 1)] \lambda_3^2, \quad \zeta_3 = [2/(\gamma_1 + 1)] \lambda_3;$$

на фронте волны разрежения ($\lambda = \lambda_4 = \sqrt{\gamma_2}$)

$$(1.9) \quad \delta_2 = \rho_2^0 / \rho_1^0; \quad \zeta_2 = 0; \quad \pi_2 = \delta_2;$$

на контактной границе ($\lambda = \lambda_0$)

$$(1.10) \quad \zeta_{-0} = \zeta_{+0} = \lambda_0; \quad \pi_{-0} = \pi_{+0}.$$

Если положить энерговыделение зависящим от времени экспоненциально

$$\varepsilon = \mu F_0 e^{\beta t},$$

то, вводя соответствующие безразмерные переменные

$$\lambda = \left(\frac{B_2}{A_2 F_0} \right)^{1/2} x e^{-(\beta/2)t}, \quad u = \left(\frac{A_2 F_0}{B_2} \right)^{1/2} e^{(\beta/2)t} \zeta(\lambda),$$

$$\rho = \rho_1^0 \delta(\lambda), \quad T = \frac{F_0}{B_2} e^{\beta t} \theta(\lambda), \quad p = \frac{A_2 F_0}{B_2} \rho_1^0 e^{\beta t} \pi(\lambda),$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, совпадающую с (1.3), если в этих уравнениях положить $N = 1$. Граничные условия (1.8) — (1.10) сохраняются неизменными.

2. Структура автомодельного решения. Неустойчивость контактной границы. Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5) — (1.7) можно осуществить численно. Известный фронт волны разрежения $\lambda = \lambda_4$ (1.9) для рассматриваемой системы является особой точкой. Эта особенность исследована в работе [4]. Через точку проходит однопараметрическое семейство интегральных кривых. Интегрирование можно вести пристрелкой: начинать с фронта разрежения $\lambda = \lambda_4$ (с использованием разложения при некотором значении постоянной c_0) и доводить до контактной границы $\zeta_{+0} = \lambda_0$, затем вести от фронта ударной волны λ_3 до контактной границы. Значение λ_3 подбирать таким, чтобы при $\lambda = \lambda_0$ получилось $\zeta_{-0} = \zeta_{+0}$. При этом $\pi_{-0} \neq \pi_{+0}$. Непрерывность безразмерного давления обеспечивается выбором постоянной в разложении c_0 .

Построенное таким образом решение будет состоять из двух областей: ударной волны (тяжелый газ) и волны разрежения (легкий газ), разделенных контактной границей. Последняя выполняет роль поршня. Известно [2], что плотность слева от границы принимает бесконечное значение. Температура при этом обратится в нуль. Так как показатель автомодельности положителен ($n > 0$), то контактная граница движется ускоренно. Возникает случай, когда легкий газ ускоряет тяжелый. Ситуация аналогична рэлей-тейлоровской неустойчивости.

3. Турбулентное перемешивание. Теория и уравнения. Неустойчивость контактной границы неминуемо приводит к турбулентному перемешиванию: образуется сложное движение, при котором один газ проникает в другой. Количественное описание таких движений в ряде случаев удается получить, применяя известные полуэмпирические теории.

Теория турбулентного перемешивания в предположении изотермичности построена в работе [1]. Ее дальнейшее развитие и обобщение на случай адиабатических движений содержится в работе [5].

Вводится коэффициент турбулентной диффузии и теплопроводности

$$(3.1) \quad D = l v,$$

где l — характерная турбулентная длина, связанная с шириной области перемешивания эмпирической постоянной α

$$(3.2) \quad l = \alpha L,$$

v — некоторая характерная турбулентная скорость, выражаемая приближенно через профиль искомого решения формулой из [5]:

$$(3.3) \quad v = l\omega, \quad \omega = \sqrt{g(\partial \ln \rho / \partial x + g/a_0^2)},$$

где g — ускорение; a_0 — скорость звука; $v = 0$, если подкоренное выражение отрицательно, в этом случае движение устойчиво. При более точном рассмотрении для турбулентной скорости v может быть выписано уравнение баланса

$$(3.4) \quad (1/2)\partial \rho v^2 / \partial t + \nu \rho v^3 / l = \rho l v \omega^2.$$

Ниже изучается более простой случай, когда в левой части (3.4) пренебрежено временной производной. Тогда вместо (3.4) получится (3.3).

Обозначим концентрацию активной компоненты в смеси

$$c = \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2)$$

($\rho_1 + \rho_2$ — плотность смеси), запишем уравнение, описывающее изменение концентрации,

$$(3.5) \quad \partial c / \partial t + u \partial c / \partial x = (1/\rho) \partial (\rho D \partial c / \partial x) / \partial x.$$

В области смеси, как и в [5], уравнения состояния определим по формулам

$$(3.6) \quad \begin{aligned} p &= [A_1(1 - c) + A_2 c] \rho T; \\ \varepsilon &= [B_1(1 - c) + B_2 c] T, \end{aligned}$$

где ρ и T — плотность и температура смеси.

Наконец, в энергетическое уравнение (1.3) нужно добавить турбулентную теплопроводность — основной диссипативный механизм, приводящий к диффузии энтропии и плотности. Кроме того, следует учесть факт перемешивания в энерговыделяющем члене. С учетом перечисленного имеем

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \rho u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \rho D \times \\ &\times \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + p \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varepsilon, \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon_0 c}{\partial x}. \end{aligned}$$

К уравнениям (3.5) — (3.7) присоединим без изменений уравнение сохранения движения (1.1) и уравнение неразрывности (1.2). Таким образом, получим систему уравнений, описывающую движение газа, охваченного турбулентным перемешиванием.

4. Автомодельный характер задачи с перемешиванием. Примеры. Введенные новые уравнения (3.5), (3.7) сохраняют автомодельность, рассмотренную в п. 2. Действительно, ширину зоны перемешивания можно определить, например, как расстояние между соответствующими λ -линиями (см. фиг. 1, λ_1 и λ_2), на которых концентрация $c(\lambda_1) = 0$ и $c(\lambda_2) = 1$. Тогда

$$(4.1) \quad L = x_2 - x_1 = [2/(n + 2)] (A_2 F_0 / B_2)^{1/2} t^{(2+n)/2} (\lambda_2 - \lambda_1),$$

λ_1 и λ_2 пока неизвестны. Подставив (1.4) в (3.5), (3.7) и приняв во внимание (3.1)–(3.3) и выражение для ширины L (4.1), получим окончательно два обыкновенных дифференциальных уравнения

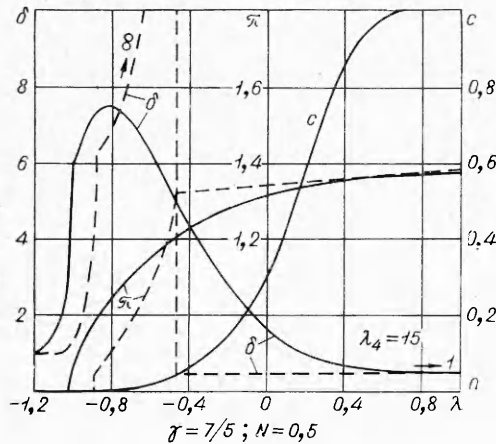
$$(4.2) \quad \begin{aligned} 2Nc/(\gamma_2 - 1) &= 2N(\bar{\theta} + \zeta^2/2) + (\zeta - \lambda)(\zeta^2/2 + \bar{\theta})' + \\ &+ (1/\delta)(\bar{\pi}\zeta - q)', \\ q &= \delta d \left[\bar{\theta}' - \frac{\bar{\pi}}{\delta} (\ln \delta)' - c' \right]; \quad \bar{\pi} = \left[\frac{A_1}{A_2} (1 - c) + c \right] \pi; \\ \bar{\gamma} &= \frac{(A_1 + B_1)(1 - c) + (A_2 - B_2)c}{B_1(1 + c) + B_2c}; \quad \bar{\theta} = \left[\frac{B_1}{A_2} (1 - c) + \frac{B_2}{A_2} c \right] \theta; \\ d &= \alpha^2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \sqrt{-\frac{\bar{\pi}'}{\delta} \left[(\ln \delta)' - \frac{1}{\bar{\gamma}} (\ln \bar{\pi})' \right]}, \\ \delta c'(\zeta - \lambda) &= (\delta dc)'. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют место только в зоне перемешивания от λ_1 до λ_2 , где коэффициент d отличен от нуля. Они переходят в первоначальные в тех областях, где $d = 0$.

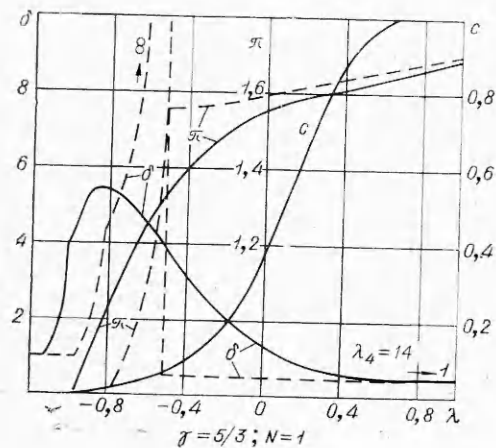
На фиг. 2, 3 построены автомодельные профили для $\gamma_1 = \gamma_2 = 7/5$; $N = 0,5$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$; $N = 1$. Начальная плотность в обеих областях положительна одинаковой. Выполнить численное интегрирование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений оказалось сложно. Трудности, возникающие при интегрировании, можно проследить на частном случае, разобранным в п. 5. Поэтому задача решалась в частных производных по методике [5]. При этом разностная сетка по пространственной переменной была подобрана таким образом, чтобы получаемые величины от увеличения числа точек слабо изменялись (графически совпадали). Для сравнения там же штриховой линией обозначено решение без перемешивания. Из графиков видно, что перемешивание существенно изменило плотность газа и привело к некоторому опережению в положении фронта ударной волны.

5. Задача о поршне. Приближенное решение без перемешивания. Задачу о поршне с заданным граничным давлением

$$(5.1) \quad p = p_0 e^{t^n}$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3

можно рассматривать как частный случай задачи п. 1, когда плотность энерговывделяющего слоя $\rho_2^0 \rightarrow 0$, при этом температура энерговывделяющего слоя должна стремиться к ∞ так, чтобы имело место соотношение (5.4). Решение этой автомодельной задачи без перемешивания известно и построено в работах [2, 3]. Структура его будет совпадать со структурой решения исходной задачи в той части, где отсутствует энерговывделение. Граница с вакуумом, движущаяся ускоренно в сторону вещества, очевидно, должна быть неустойчива. Поэтому необходимо учитывать турбулентное перемешивание.

Турбулентное перемешивание не возникает, если поршень реализуется с помощью жесткой стенки. Численное интегрирование получающихся обыкновенных дифференциальных уравнений в значительной степени можно упростить, если в энергетическом уравнении производную от энтропийной функции приближенно заменить

$$\partial \ln(p/\rho^\gamma)/\partial r \approx \partial \ln(1/\rho^\gamma)/\partial r.$$

Это можно сделать на том основании, что изменение давления в сравнении с плотностью происходит более медленно.

Решение задачи о поршне без перемешивания в предлагаемом приближении получается в аналитическом виде, причем с сохранением особенностей точного решения (бесконечная плотность и нулевая температура на поршне). Проблема интегрирования уравнений в случае турбулентного перемешивания сводится к численному решению одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Безразмерные переменные связаны с исходными следующими соотношениями:

$$\lambda = \frac{n+2}{2} \left(\frac{\rho_1^0}{p_0} \right)^{1/2} \frac{x}{t^{(n+2)/2}}, \quad u = \left(\frac{p_0}{\rho_1^0} \right)^{1/2} \zeta(\lambda),$$

$$\rho = \rho_1^0 \delta(\lambda), \quad p = p_0 t^n \pi(\lambda), \quad T = \frac{p_0}{\rho_1^0 A_1} t^n \theta(\lambda).$$

Первые два уравнения совпадут с (1.5), (1.6). В уравнении (1.7) следует положить $\mu = 0$ и после преобразований с использованием (1.5) его можно представить в виде

$$(5.2) \quad a'(\zeta - \lambda) + 2N/(\gamma - 1) = 0,$$

где $a = [1/(\gamma - 1)] \ln(\pi/\delta^\gamma)$. Далее положим

$$(5.3) \quad a' = [1/(\gamma - 1)] [(\ln \pi)' - \gamma (\ln \delta)'] \approx [-\gamma/(\gamma - 1)] (\ln \delta)'$$

Подставив (5.3) в (5.2), с помощью (1.6) получим уравнение для безразмерной скорости ζ

$$(5.4) \quad \zeta' = 2N/\gamma.$$

Так как давление на поршне известно, то граничное условие (1.10) примет вид

$$(5.5) \quad \lambda_0 = \zeta_0; \quad \pi_0 = 1.$$

Уравнения (5.4), (1.5) и (1.6) можно проинтегрировать и удовлетворить граничным условиям (1.8), (5.5). Решение представляется в аналитическом виде

$$K_1 = \frac{2N(\gamma+1)+2\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2N)}; \quad K_2 = \frac{\gamma+N(2-\gamma)}{\gamma(N+\gamma)};$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{\pi_0}{\frac{2}{\gamma+1} + N[K_1 + K_2(1-K_1)]}}$$

$$(5.6) \quad \lambda_0 = K_1 \lambda_3, \quad \delta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_3 - \lambda_0} \right)^{-2N/(2N+\gamma)},$$

$$\zeta = \lambda_0 - \frac{2N}{\gamma} (\lambda - \lambda_0),$$

$$\pi = \frac{2}{\gamma + 1} \lambda_3^2 + N \lambda_3 [\lambda_0 + K_2 (\lambda_2 - \lambda_0)] - N \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_3 - \lambda_0} \right)^{\gamma/(2N+\gamma)} \times$$

$$\times [K_2 (\lambda - \lambda_0) + \lambda_0] \lambda_3.$$

Для оценки правомерности приближения (5.3) вычислим отношение $(\ln \pi)' / (\gamma \ln \delta)'$, используя при этом решение (5.6). На интервале $[\lambda_0, \lambda_3]$ справедливо неравенство

$$(5.7) \quad 0 \leq (\ln \pi)' / \gamma (\ln \delta)' \leq (2\gamma - 1) / 2\gamma,$$

т. е. допущение о малости числителя в (5.7) по сравнению со знаменателем всегда верно и тем лучше, чем меньше показатель адиабаты γ .

В приближенном решении плотность на поршне, как и в точном решении, обращается в бесконечность. Полученное решение (5.6) можно применить на основании (5.7) и для $N < 0$. Тогда интересно сравнить его с точным решением Л. И. Седова задачи о плоском взрыве. Для этого нужно положить $N = -0,5$. При этом получим для $\gamma = 1,4$ $\pi_0 = 0,383$; в точном решении из [6] имеем $\pi_0 = 0,325$. Решение для цилиндрического и сферического поршней в указанном приближении может быть получено в аналитическом виде.

6. Решение задачи о поршне с перемешиванием. Уравнение энергии (4.2) имеет вид

$$(6.1) \quad \pi [a'(\zeta - \lambda) + 2N/(\gamma - 1)] = q';$$

$$q = \alpha^2 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 \left(-\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\pi'}{\delta} \right)^{1/2} \pi (-a')^{3/2}.$$

Сделаем два предположения. Во-первых, применим приближенное равенство (5.3), во-вторых, в правой части уравнения (6.1) вынесем из-под знака дифференциала давление π . Получим

$$\frac{2N}{\gamma} - (\zeta - \lambda) \delta' / \delta = -\alpha^2 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 \left[\left(-\frac{\pi'}{\delta} \right)^{1/2} \left(\frac{\delta'}{\delta} \right)^{3/2} \right]^{-1}.$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать, если левую часть преобразовать с помощью уравнения (1.6)

$$(6.2) \quad \frac{2N}{\gamma} (1 - \lambda) + \frac{2}{\gamma - 1} - \zeta = \alpha^2 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 \left(-\frac{\pi'}{\delta} \right)^{1/2} \left(\frac{\delta'}{\delta} \right)^{3/2}.$$

Постоянная интегрирования определена из условия на границе области перемешивания

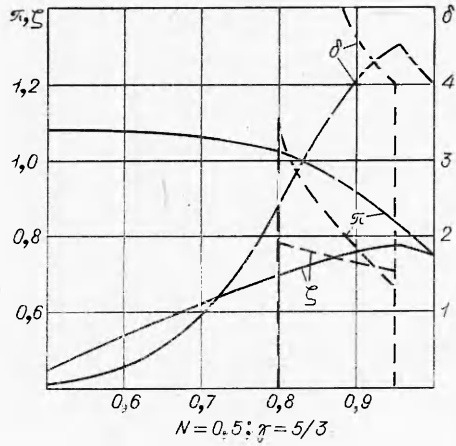
$$(6.3) \quad \lambda = \lambda_1, \quad q = 0.$$

Воспользовавшись (1.5), (1.6), уравнение (6.2) можно свести к уравнению первого порядка для одной функции ζ

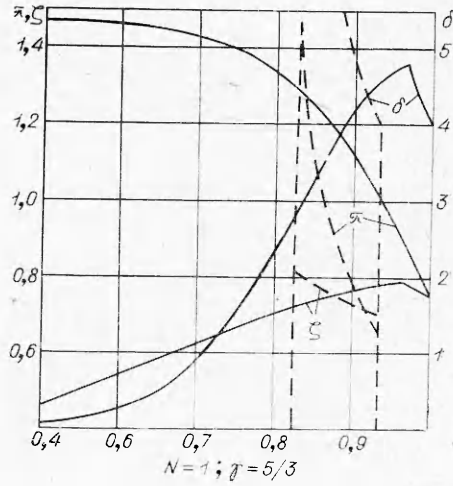
$$(6.4) \quad (2N/\gamma)(1 - \lambda) + 2/(\gamma - 1) - \zeta =$$

$$= \alpha^2 (\lambda_1 - \lambda_0)^2 [N\zeta + (\zeta - \lambda)\zeta']^{1/2} (\zeta'/(\lambda - \zeta))^{3/2}.$$

Это уравнение нужно интегрировать в области перемешивания $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$.



Ф и г. 4



Ф и г. 5

Из (6.3) вытекает одно граничное условие
 (6.5) $\lambda = \lambda_1, \zeta' = 0.$

Другим граничным условием является сам поршень
 $\lambda_0 = \zeta_0.$

К этому условию нужно добавить естественное условие вакуума
 $\delta = 0$ при $\lambda_0 = \zeta_0.$

Анализ поведения интегральных кривых уравнения (6.2) приводит к тому, что при $\lambda_0 = \zeta_0 \neq 0 \delta(\lambda_0) \neq 0.$

Положив $\lambda_0 = 0$, получим единственную интегральную кривую с разложением

$$\zeta = (1 - N)\lambda + \frac{\left(\frac{2N}{\gamma} + \frac{2}{\gamma + 1}\right)^2 N^3}{(1 - 3N)(1 - N)^3 \alpha^4 \lambda_1^4} \lambda^3 + \dots,$$

которая является искомым решением. Действительно, в этом случае разложение для безразмерной плотности δ есть

$$\delta = c_0 \lambda^{(1-N)/N}.$$

Следовательно, $\delta(0) = 0.$

Интегрирование нужно вести до некоторой точки $\lambda = \lambda_1$, в которой выполнится условие (6.5). Так как значение λ_1 входит в коэффициенты уравнения, то его окончательное определение может быть сделано итерациями.

После нахождения безразмерной скорости ζ остальные функции вычисляются по формулам

$$\delta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \delta_1 e^{\int_{\lambda_1}^{\lambda} [\zeta/(\lambda - \zeta)] d\lambda};$$

$$\pi = \pi_1 - \int_{\lambda_1}^{\lambda} \delta [N\zeta + (\zeta - \lambda)\zeta'] d\lambda,$$

где δ_1, π_1 — значения функций при $\lambda = \lambda_1.$

Решение между фронтом ударной волны $\lambda_3 = 1$ и фронтом перемешивания λ_1 описывается формулами (5.6).

На фиг. 4, 5 изображено приближенное решение задачи для поршня с учетом турбулентного перемешивания. Там же для сравнения приведено решение без перемешивания. Рассмотрен случай $N = 0,5$ и 1 , $\gamma = 5/3$. Постоянная $\alpha = 0,133$ взята из работы [1]. Как и для задачи п. 4, влияние перемешивания приводит к другому распределению плотности и к опережению в положении фронта ударной волны.

Автор выражает благодарность В. Г. Яковлеву, построившему примеры п. 4, Р. А. Жилиной и Р. Г. Исламовой, выполнившим численное интегрирование уравнения (6.4).

Поступила 27 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания.— «Труды ФИАН им. Лебедева», 1965, т. 29, с. 207.
2. Крашенинникова Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем.— «Изв. АН СССР. ОНТ», 1955, № 8.
3. Адамский В. В., Попов Н. А. Движение газа под действием давления на поршне, изменяющегося по степенному закону.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 3, с. 564.
4. Неуважаев В. Е. Неадиабатические движения в идеальном газе (автомодельные решения).— «Труды МИ АН СССР», 1973, т. 22, с. 24.
5. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. Турбулентное перемешивание границы раздела в численном газодинамическом расчете.— ЖВМ и МФ, 1976, № 2.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.

УДК 532.529.

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

В. В. Гончаров, К. А. Наугольных, С. А. Рыбак

(Москва)

Задача о распространении волн в жидкости с пузырьками газа, являющейся примером нелинейной диспергирующей среды, обычно рассматривается в приближении слабой нелинейности и дисперсии [1, 2], и только в некоторых частных случаях удается получить решение, соответствующее сильному изменению радиуса пузырька [3]. В отличие от этого в данной работе показано, что для стационарных волн удается найти более широкий класс решений, соответствующих сильно нелинейным пульсациям пузырьков. При этом наряду с решениями солитонного типа, соответствующими ситуации, когда нелинейные и дисперсионные эффекты как бы компенсируют друг друга, появляются и периодические решения.

Одномерные акустические волны в пузырьковой среде можно описать системой линейных акустических уравнений, учитывающих наличие пузырьков газа,

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \rho_0 \partial v / \partial x &= 0; \quad \partial v / \partial t + (1/\rho_0) \partial p / \partial x = 0; \\ \rho / \rho_0 &= [(1 - z)/\rho_0 c_0^2] p - nV \end{aligned}$$