Получить простую зависимость для расчета теплообмена при несовпадающей конвекции не удалось. Для приближенного расчета теплоотдачи можно использовать график на фиг. 5 как расчетную номограмму.

*Поступила 1 XI 1982*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А.** Теплообмен смешанной конвекцией. Минск: Наука и техника, 1975.
2. **Брдлик П. М., Ильинский А. И., Семенов Ю. П.** Управление тепломассообменом при смешанной конвекции в пограничном слое.— В кн.: Тепломассообмен-VI. Т. 1, ч. 3. Минск: ИТМО, 1980.
3. **Беляков В. А., Брдлик П. М., Семенов Ю. П.** Экспериментальное исследование смешанной конвекции воздуха около горизонтального цилиндра.— ПМТФ, 1980, № 2.
4. **Чжэнь, Мокоглу.** Влияние подъемной силы на вынужденную конвекцию вдоль вертикального цилиндра.— Теплопередача, 1975, № 2.
5. **Чжэнь, Мокоглу.** Влияние подъемной силы на вынужденную конвекцию вдоль вертикального цилиндра при постоянном тепловом потоке на поверхности.— Теплопередача, 1976, № 3.
6. **Брдлик П. М., Семенов Ю. П. и др.** Экспериментальное исследование смешанной конвекции на вертикальных поверхностях.— Научн. труды МЛТИ, 1981, вып. 138.
7. **Семенов Ю. П.** Численное исследование ламинарной смешанной конвекции около вертикального цилиндра при постоянном тепловом потоке на поверхности.— Науч. труды МЛТИ, 1982, вып. 146.
8. **Патанкар С., Сполдинг Д.** Тепло- и массообмен в пограничных слоях. М.: Энергия, 1971.
9. **Patankar S. V., Spalding D. B.** Heat and mass transfer in boundary layers.— 2nd Ed. London: Intertext books, 1971.
10. **Mason H. B., Seban R. A.** Numerical predictions for turbulent free convection from vertical surfaces.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1974, vol. 17, p. 1329.
11. **Tetsu Fujii, Harvo Uehara.** Laminar natural convective heat transfer from the outer surface of a vertical cylinder.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1970, vol. 13, p. 607.

---

УДК 536.25

# ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРИМЕСЬ

*В. В. Колесов, В. И. Юдович*

*(Ростов-на-Дону)*

**1. Постановка задачи.** Пусть вязкая теплопроводная жидкость, содержащая примесь, заполняет бесконечный плоский горизонтальный слой толщиной $h$. Нижняя граница слоя — твердая поверхность, имеющая постоянную температуру. Свободная верхняя граница слоя не деформируется, и на ней отсутствуют касательные напряжения. Над слоем находится атмосфера — неподвижный газ, имеющий квазистационарное распределение температуры. Поток тепла $Q$ по вертикали в атмосфере вдали от свободной поверхности жидкости считается заданным (подогреву снизу соответствует случай $Q > 0$). Температура и нормальная составляющая потока тепла непрерывны при переходе через свободную поверхность. Поток примеси через границы слоя отсутствует. Жидкость как единое целое не может перемещаться параллельно дну. Количество примеси в жидкости не меняется с течением времени.

Задача для определения вектора скорости $\mathbf{V} = \{v_x, v_y, v_z\}$, давления П, температуры жидкости $T$, температуры атмосферы $\Theta$ и концентрации примеси $S$, приведенная к безразмерной форме и записанная в приближении Буссинеска, имеет вид

$$(1.1)\ \partial\mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V} = -\nabla \Pi + \Delta\mathbf{V} + \mathbf{e}(\mathrm{G}T - \mathrm{G}_S S),\ \partial T/\partial t + (\mathbf{V}, \nabla)T = (1/\mathrm{P})\Delta T,\quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0,\quad \Delta\Theta = 0,\ \partial S/\partial t + (\mathbf{V}, \nabla)S = (1/\mathrm{P}_d)\operatorname{div}(\nabla S + \xi S\nabla T),\ \int\limits_\Omega v_x d\Omega = \int\limits_\Omega v_y d\Omega = \int\limits_\Omega S d\Omega - \int\limits_\Omega d\Omega = 0,\quad \mathbf{V} = \mathbf{0},\quad T = \partial S/\partial z + \xi S\partial T/\partial z = 0\ (z = 0),\ v_z = \partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x = \partial v_y/\partial z + \partial v_z/\partial y = T - \Theta =$$

$$= \partial T/\partial z - m\partial\Theta/\partial z = \partial S/\partial z + \xi S\partial T/\partial z = 0 \ \ (z = 1), \ \ \nabla\Theta \to \{0, \ 0, -1/m\} \ \ (z \to \infty),$$

где $\Omega$ — область, заполненная жидкостью; $t$ — время; $\mathbf{e} = \{0, \ 0, \ 1\}$ — орт оси $z$; $\mathrm{G} = g\beta h^4 Q/\varkappa\nu^2$ и $\mathrm{G}_S = g\beta_S h^3 \bar{S}/\nu^2$ — число Грасгофа и его концентрационный аналог; $\mathrm{P} = \nu/\chi$ и $\mathrm{P}_d = \nu/d$ — число Прандтля и его диффузионный аналог; $\xi = khQ/\varkappa$ — параметр, характеризующий термодиффузию; $m = \varkappa_0/\varkappa$ — отношение коэффициентов теплопроводности атмосферы $\varkappa_0$ и жидкости $\varkappa$; $g$ — ускорение силы тяжести; $\bar{S}$ — средняя концентрация примеси в изотермических условиях; $\nu$, $\chi$, $\beta$, $\beta_S$, $d$ и $k$ — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплового расширения, концентрационного сжатия, диффузии примеси и термодиффузии.

Заметим, что уравнения (1.1) совпадут с обычно используемыми уравнениями свободной конвекции бинарной смеси [1—3], если в уравнении для концентрации примеси в члене $\xi S\nabla T$ заменить $S$ на постоянную величину (например, на среднюю концентрацию примеси $\bar{S}$). Такая замена, однако, делает уравнения (1.1) применимыми лишь в случае весьма малых изменений концентрации примеси и приводит к невозможному эффекту возникновения примеси в результате подогрева.

Задача (1.1) допускает точное решение (механическое равновесие):

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}, \ T_0 = -z, \ S_0 = \xi \exp(\xi z)[\exp(\xi) - 1]^{-1}, \tag{1.2}$$

$$\Theta_0 = \frac{1 - m - z}{m}, \quad \Pi_0 = \int_0^z (\mathrm{G}T_0 - \mathrm{G}_S S_0)\,dz + \mathrm{const}.$$

Дальнейшее посвящено отысканию плоского вторичного стационарного режима, ответвляющегося от равновесия (1.2) при переходе числа Рэлея $\mathrm{R} = \mathrm{GP}$ через критическое значение $\mathrm{R}_0$.

**2. Плоская стационарная конвекция.** Применяя методику [4], убеждаемся, что у задачи (1.1) существует плоское стационарное решение, представимое в виде рядов Ляпунова — Шмидта:

$$\begin{gathered} v_x = \varepsilon A u_1(z)\sin\alpha x + \varepsilon^2 A^2 u_2(z)\sin 2\alpha x + \ldots, \\ v_z = \varepsilon A w_1(z)\cos\alpha x + \varepsilon^2 A^2 w_2(z)\cos 2\alpha x + \ldots, \\ T = T_0 + \varepsilon A\mathrm{P}\tau_1(z)\cos\alpha x + \varepsilon^2 A^2\mathrm{P}[\tau_2(z)\cos 2\alpha x + \tau_0(z)] + \ldots, \\ \Theta = \Theta_0 + \varepsilon A\mathrm{P}\theta_1(z)\cos\alpha x + \varepsilon^2 A^2\mathrm{P}[\theta_2(z)\cos 2\alpha x + \theta_0(z)] + \ldots, \\ S = S_0 + \varepsilon A\xi\mathrm{P}_d s_1(z)\cos\alpha x + \varepsilon^2 A^2\xi\mathrm{P}_d[s_2(z)\cos 2\alpha x + s_0(z)] + \ldots, \\ \Pi = \Pi_0 + \varepsilon A q_1(z)\cos\alpha x + \varepsilon^2 A^2[q_2(z)\cos 2\alpha x + q_0(z)] + \ldots \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $\varepsilon = [(\mathrm{R} - \mathrm{R}_0)\,\mathrm{sign}\,(\mathrm{R}_0)]^{1/2}$ — малый параметр; $\alpha$ — волновое число возмущений; $A = \sqrt{|a|}$ — амплитуда вторичного конвективного режима, постоянная $a$ находится по формулам

$$a = \frac{4I_1}{\mathrm{R}_0 I_2}, \quad I_1 = \int_0^1 [(D^2 w_1)^2 + 2\alpha^2(Dw_1)^2 + \alpha^4 w_1^2]\,dz, \tag{2.2}$$

$$I_2 = \int_0^1 [f_1 w_1 + \alpha^2\mathrm{R}_0\mathrm{P}(1 + \mu\delta) f_2\tau_1 + \alpha^2\mathrm{R}_0\mathrm{P}_d\mu f_3(s_1 + \delta\tau_1)]\,dz,$$

$$\begin{gathered} f_1 = 3\alpha^2(w_1 Dw_2 + 2w_2 Dw_1) - w_1 D^3 w_2 - 2Dw_1 D^2 w_2 + Dw_2 D^2 w_1 + \\ + 2w_2 D^3 w_1, \ f_2 = \tau_1 Dw_2 + 4\tau_2 Dw_1 + 2w_2 D\tau_1 + 2w_1(D\tau_2 + 2D\tau_0), \\ f_3 = s_1 Dw_2 + 4s_2 Dw_1 + 2w_2 Ds_1 + 2w_1(Ds_2 + 2Ds_0), \end{gathered}$$

где $\mu = \beta_S k\chi\bar{S}/\beta d$ — термоконцентрационный параметр; $D = d/dz$; $\delta = \mathrm{P}/\mathrm{P}_d$.

При выводе формул (2.2) предполагалось, что $\xi = khQ/\varkappa \approx 0$. Тем самым мы ограничиваемся рассмотрением случая не слишком толстого слоя и таких жидкостей, у которых коэффициент термодиффузии $k$ мал по сравнению с коэффициентом теплопроводности $\varkappa$. Не составляет, разумеется, труда рассмотреть и случай $\xi \neq 0$, при этом, однако, формулы (2.2) станут существенно более громоздкими.

Для нахождения критического значения $R_0$ и функций $w_1$, $\tau_1$, $s_1$ требуется найти «первое» (наименьшее по модулю) собственное значение и соответствующее ему собственное решение спектральной задачи

$$\begin{gathered}(D^2-\alpha^2)^2 w_1 = \alpha^2 R_0[(1+\mu\delta)\tau_1 - \mu\psi_1],\\ (D^2-\alpha^2)\tau_1 = -w_1,\ (D^2-\alpha^2)\psi_1 = w_1,\ \psi_1 = s_1+\delta\tau_1,\\ w_1 = Dw_1 = \tau_1 = D\psi_1 = 0\ (z=0),\\ w_1 = D^2w_1 = D\tau_1 + m\alpha\tau_1 = D\psi_1 = 0\ (z=1).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Функции $w_2$, $\tau_2$, $s_2$ находятся путем решения неоднородной краевой задачи

$$\begin{gathered}(D^2-4\alpha^2)^2 w_2 = 4\alpha^2 R_0[(1+\mu\delta)\tau_2 - \mu\psi_2] +\\ + w_1D^3w_1 - Dw_1D^2w_1,\ \psi_2 = s_2+\delta\tau_2,\\ (D^2-4\alpha^2)\tau_2 = -w_2 + P(w_1D\tau_1 - \tau_1Dw_1)/2,\\ (D^2-4\alpha^2)\psi_2 = w_2 + P_d(w_1Ds_1 - s_1Dw_1)/2,\\ w_2 = Dw_2 = \tau_2 = D\psi_2 = 0\ (z=0),\\ w_2 = D^2w_2 = D\tau_2 + 2m\alpha\tau_2 = D\psi_2 = 0\ (z=1).\end{gathered} \tag{2.4}$$

Остальные коэффициенты разложений (2.1) могут быть найдены по формулам

$$\begin{gathered}u_1 = -Dw_1/\alpha,\ u_2 = -Dw_2/2\alpha,\ \theta_0 = \tau_0(1),\\ \theta_1 = \tau_1(1)\exp[\alpha(1-z)],\ \theta_2 = \tau_2(1)\exp[2\alpha(1-z)],\\ q_0 = R_0\int_0^z(\tau_0-\mu s_0)\,dy,\quad q_1 = \frac{1}{\alpha^2}D^3w_1 - Dw_1,\\ q_2 = [D^3w_2 - 4\alpha^2Dw_2 - w_1D^2w_1 + (Dw_1)^2]/4\alpha^2,\\ \tau_0 = \frac{P}{2}\int_0^z w_1\tau_1dy,\quad s_0 = \varphi_0 - \int_0^1\varphi_0dy,\quad \varphi_0 = \frac{P_d}{2}\int_0^z w_1(s_1-\delta^2\tau_1)\,dy.\end{gathered}$$

Следуя [5], убеждаемся, что декременты $\sigma$ и $\sigma'$ равновесия (1.2) и вторичного режима (2.1) раскладываются в ряды теории возмущений:

$$\sigma = \sigma_2(R-R_0) + \sigma_4(R-R_0)^2 + \ldots,\ \sigma' = \sigma_2'\varepsilon^2 + \sigma_4'\varepsilon^4 + \ldots \tag{2.5}$$

Старшие коэффициенты рядов (2.5) связаны соотношением

$$\begin{gathered}\sigma_2' = -2\sigma_2\,\mathrm{sign}(R_0),\quad \sigma_2 = I_1/R_0I_3,\\ I_3 = \int_0^1\left[(Dw_1)^2 + \alpha^2w_1^2\right]dz + \alpha^2R_0P_d\int_0^1\left[\mu s_1^2 + \mu\delta s_1\tau_1 + \delta(1+\mu\delta)\tau_1^2\right]dz.\end{gathered}$$

Предположим, что $R_0$ — простое собственное значение задачи (2.3), $aR_0 > 0$ и $\sigma_2R_0 > 0$. Из результатов [4, 5] вытекает тогда, что равновесие (1.2) устойчиво при малых докритичностях ($|R| < |R_0|$) и неустойчиво при малых сверхкритичностях ($|R| > |R_0|$). При переходе $R$ через критическое значение $R_0$ мягко возникает вторичный стационарный режим, представимый в виде сходящихся рядов (2.1) и единственным образом (с точностью до сдвига вдоль оси $x$) определяемый волновым числом $\alpha$ при фиксированных $\mu$, $m$, $P$, $P_d$. Этот вторичный режим устойчив при малых сверхкритичностях относительно бесконечно малых плоских возмущений той же периодичности и четности по $x$, что и функции (2.1).

В общем случае знаки $R_0$, $a$ и $\sigma_2$ устанавливаются путем вычисления этих величин на ЭВМ, однако для некоторых частных случаев это удается сделать, не прибегая к вычислениям. На основе методики [4, 5] убеждаемся в справедливости следующих утверждений. Если $\mu \geqslant 0$, то $R_0 > 0$ и $\sigma_2 > 0$. Если $3\mu\delta + 4 \leqslant 0$, то $R_0 < 0$ и $\sigma_2 < 0$. Если $\mu \geqslant 0$ и $\delta = 0$, то $a > 0$.

| $\mu$ | $\alpha_*$ | $R_*$ | $A$ | $\sigma_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0,567 | 80 | $4{,}31 \cdot 10^{-5}$ | $5{,}13 \cdot 10^{-6}$ |
| 3 | 0,815 | 105 | $4{,}51 \cdot 10^{-5}$ | $8{,}45 \cdot 10^{-6}$ |
| 2 | 1,090 | 150 | $4{,}44 \cdot 10^{-5}$ | $1{,}15 \cdot 10^{-5}$ |
| 1 | 1,455 | 256 | $4{,}06 \cdot 10^{-5}$ | $1{,}54 \cdot 10^{-5}$ |
| 0 | 2,100 | 681 | $2{,}53 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}49 \cdot 10^{-3}$ |

**3. Численные результаты.** Спектральная задача (2.3) и неоднородная задача (2.4) решались численно на ЭВМ БЭСМ-4 методом пристрелки. При вычислениях проводилась численная минимизация критического значения $R_0(\alpha)$ по $\alpha$, т. е. отыскивалось значение $\alpha_*$ волнового числа $\alpha$, соответствующее самым опасным возмущениям. Собственное решение задачи (2.3) нормировалось условием $\tau_1(1) = 1$, придающим амплитуде вторичного конвективного режима $A$ простой физический смысл: безразмерная температура на свободной поверхности слоя меняется по закону

$$T = -1 + \varepsilon A P \cos \alpha x + O(\varepsilon^2).$$

Вычисления проводились для случая $P = 7$, $P_d = 813$, $m = 0{,}0436$, $\mu \geqslant 0$, что соответствует слою морской воды (примесь, содержащаяся в в жидкости,— соль), свободная поверхность которого соприкасается с воздухом. Результаты расчета зависимости критического значения волнового числа $\alpha_*$, минимизированного по $\alpha$ критического значения $R_*$, амплитуды вторичного конвективного режима $A$ и старшего коэффициента $\sigma_2$ разложения декремента $\sigma$ равновесия (1.2) в ряд теории возмущений (2.5) от термоконцентрационного параметра $\mu$ представлены в таблице. Для рассматриваемых значений параметров задачи величины $R_*$, $a$ и $\sigma_2$ оказались положительными при любом $\mu \geqslant 0$. Это указывает на то, что в слое морской воды плоский вторичный стационарный режим возбуждается мягко и устойчив при малых сверхкритичностях.

*Поступила 24 XII 1982*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Шапошников И. Г.** К теории конвективных явлений в бинарной смеси.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
2. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
3. **Тернер Э.** Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
4. **Юдович В. И.** Свободная конвекция и ветвление.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
5. **Юдович В. И.** Устойчивость конвекционных потоков.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.

УДК 532.516.5 : 529.2

# РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ БИНАРНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЗНАЧИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПЛОТНОСТИ

*Д. А. Никулин, М. Х. Стрелец*

(*Ленинград*)

Нестационарные смешанно-конвективные течения газов и газовых смесей чрезвычайно широко распространены в природе и технике. Их исследование необходимо, например, для разработки безопасных методов эксплуатации токсичных и взрывоопасных смесей, для решения ряда экологических проблем и вопросов промсанитарии. Несмотря на существенно дозвуковой характер таких течений, пространственно-временные изменения плотности в потоке, обусловленные неизотермичностью или различием молекулярных весов компонентов смеси, могут в ряде случаев оказаться весьма