

**ДВУМЕРНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ
В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КАНАЛАХ СО СТАЛЬНЫМИ
СТЕНКАМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ
РЕЙНОЛЬДСА**

А. И. Бертинов, Д. А. Бут, Л. К. Ковалев, В. И. Юдас

(Москва)

Рассматриваются плоские задачи о распределении двумерного магнитного поля в магнитогидродинамических каналах с ферромагнитными стенками при существенных магнитных числах Рейнольдса и заданной гидродинамике течения. С помощью комплексной функции влияния, описывающей поле от единичного тока, строится интегральное представление для полной магнитной индукции, которое позволяет получать любые приближения к строгим решениям задач на ЭЦВМ. Функция влияния может определяться для различных каналов с помощью зеркальных отражений и конформных отображений. Метод иллюстрируется численными расчетами распределения магнитного поля при течении проводящей жидкости по плоской ферромагнитной стенке и течения жидкости в полосе между ферромагнитными стенками. Проводится учет влияния внешней цепи и неоднородного поперечного профиля скорости на распределение магнитного поля.

В кондукционных магнитогидродинамических (МГД) каналах с конечными размерами и существенными магнитными числами Рейнольдса (R_m) магнитное поле в общем случае трехмерно. Если, однако, внешнее магнитное поле \mathbf{B}_e параллельно электродным стенкам и концевые эффекты подавлены (например, продольными непроводящими перегородками на входе и выходе), то при некоторых ограничениях на геометрию токоотводов, распределение скорости u и проводимости σ уравнение электрического потенциала для $R_m \gtrsim 1$ [1] имеет решение, соответствующее однородному электрическому полю. Такой случай реализуется, например, когда к параллельным электродам по всей их поверхности примыкают высокопроводящие токоотводы достаточной длины, направленные нормально к плоскости электродов вдоль оси z , а u и σ не зависят от z . В подобном канале распределение полного двухкомпонентного магнитного поля будет плоским: $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ (токи направлены по z).

Для нахождения \mathbf{B} может быть использован метод представления B_x и B_y через ряды и сшивания решений на стенках канала [2].

Более общие пути решения плоских МГД задач с однородной магнитной проницаемостью ($\mu = \mu_0 = \text{const}$) связаны с построением интегрального уравнения относительно поперечной компоненты \mathbf{B} с помощью функции Грина для векторного магнитного потенциала [3,4] или непосредственной подстановкой закона Ома в закон Био-Савара [5]. Последний путь позволяет решать некоторые задачи с плоскомеридианными полями, где построение функции Грина для векторного потенциала затруднительно [6].

Если к боковым непроводящим стенкам канала примыкает стальной магнитопровод, двумерная постановка задач о распределении \mathbf{B} становится более строгой. Поэтому ограничения на геометрию электродов в плоских задачах могут быть ослаблены, и влияние внешней цепи на распределение \mathbf{B} в канале будет различным в зависимости от ориентации токоотводов. Ин-

тегральное представление для \mathbf{B} , однако, при наличии стальных стенок усложняется. В некоторых МГД-каналах канонической формы влияние стальных стенок можно учесть методом отражений для токов в канале и использовать закон Био — Савара, учитывающий как реальные, так и отраженные токи. Применение конформных отображений позволяет расширять класс задач, допускающих интегральное представление для \mathbf{B} .

1. Течение проводящей жидкости по плоской ферромагнитной стенке.

Пусть жидкость течет по стенке с магнитной проницаемостью μ_2 , расположенной в области $q \leq 0$ комплексной плоскости $s = p + iq$. Над стенкой $\mu = \mu_1$ всюду. Величины μ_2 и μ_1 могут быть соизмеримы (стенка образована насыщенной или магнитотвердой сталью). При $q > 0$ имеется плоское внешнее магнитное поле $B_e = B_{ep} + iB_{eq}$. Токи текут в области $0 \leq p \leq l^*$, $0 \leq q \leq \delta(p)$, где $\delta(p)$ есть верхняя стенка канала или свободная граница потока, и замыкаются симметрично относительно рабочей зоны при $|s| \rightarrow \infty$. Проводимость жидкости $\sigma(s)$ и скорость $u(s) = u_p + iu_q$ заданы. Требуется найти полное магнитное поле $B(s)$ при $q > 0$. Такая задача может встретиться при течении проводящей жидкости в открытом лотке [7] с ферромагнитным дном, при исследовании пленочных МГД-течений [8], насосов с односторонним индуктором и т. п.

Граничные условия требуют непрерывности B_q и B_p / μ при $q = 0$, $-\infty < p < \infty$, непрерывности B_p и B_q на остальных границах области с токами и затухания B_i при $|s| \rightarrow \infty$. Влияние стальной стенки может быть учтено, если для каждого тока $di = j(s') dp' dq'$ при $q > 0$ построить фиктивный отраженный ток di_0 при $q < 0$ так, чтобы выполнялись граничные условия. Собственное магнитное поле $dB_i(s)$ в точке $s (q > 0)$ от тока $j(s') dp' dq'$ в точке $s' (q > 0)$ равно

$$dB_i = L(s, s') j(s') dp' dq', \quad L(s, s') = L_p + iL_q \quad (1.1)$$

где $L(s, s')$ — некоторая функция влияния, учитывающая реальные и отраженные токи. Используя известное решение задачи Сирла (см., например, [9]), получим

$$L_p = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{q' - q}{(q - q')^2 + (p - p')^2} - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{q + q'}{(q + q')^2 + (p - p')^2} \right] \quad (1.2)$$

$$L_q = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{p - p'}{(q - q')^2 + (p - p')^2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{p - p'}{(q + q')^2 + (p - p')^2} \right] \quad (1.3)$$

Поле $B_i(s)$ от всех токов в жидкости определится как

$$B_i(s) = B(s) - B_e(s) = \int_s L(s, s') j(s') dp' dq' \quad (1.4)$$

Подставляя сюда закон Ома $j = \sigma [E + \text{Im}(\bar{u}B)]$, приходим к комплексному интегральному уравнению

$$B(s) - \int_s L(s, s') \sigma(s') \text{Im}[\bar{u}(s') B(s')] dp' dq' = B_e(s) + \int_s L(s, s') \sigma(s') E dp' dq' \quad (1.5)$$

Если E не зависит от s , то при условии ограниченности $\sigma(s)$, $u(s)$, E и интегрируемости $L(s, s')$ уравнение (1.5) будет фредгольмовским. Оно эквивалентно системе двух действительных интегральных уравнений для

* Токи нормальны к плоскости s .

B_p и B_q , которая может решаться численными методами. Уравнение (1.5) при подстановке в него (1.2) и (1.3) эквивалентно закону Био-Савара, в котором учитываются как реальные токи в жидкости (первые слагаемые в (1.2), (1.3)), так и отраженные токи (вторые слагаемые в (1.2), (1.3)). Характерно, что при $s' \rightarrow s$ вторые слагаемые в (1.2), (1.3) исчезают и функция $L(s, s')$ будет такой же, как для линейного тока в немагнитной среде:

$$L(s, s') = \frac{1}{2\pi} \exp\left(i \arctg \frac{p-p'}{q-q'}\right) [(q-q')^2 + (p-p')^2]^{-1/2}$$

Отсюда следует, что ядро интегрального уравнения (1.5) полярное и, следовательно, теория Фредгольма верна для (1.5). Если $u_p \gg u_q$, то (1.5) приводится к одному действительному интегральному уравнению Фредгольма с улучшенной особенностью ядра

$$\begin{aligned} B_q(s) \left[1 - R_m \int_0^{1-\delta(p)} \int_0^{1-\delta(p)} L_q(s, s') \sigma(s') u_p(s') dp' dq' \right] - \\ - R_m \int_0^{1-\delta(p)} \int_0^{1-\delta(p)} L_q(s, s') \sigma(s') u_p(s') [B_q(s') - B_q(s)] dp' dq' = \\ = B_{eq}(s) + R_m E \int_0^{1-\delta(p)} \int_0^{1-\delta(p)} L_q(s, s') \sigma(s') dp' dq' \end{aligned} \quad (1.6)$$

и определенному интегралу для $B_p(s)$

$$B_p(s) = R_m \int_0^{1-\delta(p)} \int_0^{1-\delta(p)} [L_p(s, s') \sigma(s') u_p(s') B_q(s') + E L_p(s, s') \sigma(s')] dp' dq' \quad (1.7)$$

Здесь все размеры отнесены к l , B к B_0 , σ к σ_0 , u к u_0 , E к $u_0 B_0$, где нулевым индексом отмечены базисные величины; $R_m = \mu_0 \sigma_0 u_0 l$.

Соотношения (1.6), (1.7) позволяют получать любые приближения к строгим решениям задачи с помощью численных методов.

2. Течение в полосе. Жидкость движется в бесконечной полосе $0 \leq y \leq \delta$ ($\delta = \text{const}$) со скоростью $u_x(x, y)$ в поле $B = B_x + iB_y$. Имеем $\mu = \mu_0$ при $0 < y < \delta$, $\mu = \infty$ при $y \geq \delta$, $y \leq 0$. Токи текут в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq \delta$ и замыкаются по внешней цепи, которая размещается либо симметрично, либо слева или справа относительно рабочей зоны.

Такая модель соответствует, например, квазистационарному движению короткого проводящего сгустка между длинными линейными электродами, помещенными в зазор электромагнита со стальными полюсами или движению осесимметричного кольцевого поршня в малом зазоре между коаксиальными стальными стенками. Если рассматривается непрерывное течение в канале, то в областях $x < 0$, $x > l$ предполагается наличие продольных непроводящих перегородок. Распространение стальных стенок за область $0 \leq x \leq l$ в последнем случае будет ограниченным. Однако, как показывают приближенные оценки, влияние края полюса практически не проявляется в зазоре δ на расстояниях больше δ от края при $R_m \leq 10$ [5].

Предположим вначале, что внешняя цепь, подключаемая к электродам, симметрична относительно рабочей зоны по x . Тогда граничные условия задачи следующие: $B_x = 0$ при $y = 0$, $y = \delta$; B_x и B_y непрерывны на границах $x = 0$, $x = l$, $B_{iy}|_{x=\infty} = -B_{iy}|_{x=-\infty}$. Как и в п. 3, задачу можно свести к интегральному уравнению, если найти функцию влияния в соотношении типа (1.1). Построение $L(z, z')$ может проводиться методом отражений [9], однако более прямой путь связан с конформным отображением полосы $0 \leq y \leq \delta$ плоскости $z = x + iy$ на верхнюю полуплоскость

$s = p + iq$ с помощью функции $s = \exp(\pi z / \delta)$, что позволяет непосредственно использовать полученные ранее решения. Так как функции влияния L в плоскостях z и s аналитические всюду вне $s = s', z = z'$, они могут быть выражены через комплексный потенциал Φ

$$L_s(s, s') = \frac{d\Phi(s)}{ds}, \quad L_z(z, z') = \frac{d\Phi(z)}{dz} \quad (2.1)$$

(черта сверху означает комплексно сопряженную величину).

В силу инвариантности оператора Лапласа имеем $\Phi(z) = \Phi[s(z)]$, откуда после дифференцирования и перехода к сопряженным значениям получим

$$L_z(z, z') = L_s(s, s') \frac{\overline{ds}}{dz}, \quad L_z = L_x + iL_y$$

$$L_x = -\frac{1}{4\delta} \left[\frac{\sin \pi (y + y') / \delta}{\operatorname{ch} \pi (x - x') / \delta - \cos \pi (y + y') / \delta} + \frac{\sin \pi (y - y') / \delta}{\operatorname{ch} \pi (x - x') / \delta - \cos \pi (y - y') / \delta} \right] \quad (2.2)$$

$$L_y = \frac{1}{4\delta} \left[\frac{\operatorname{sh} \pi (x - x') / \delta}{\operatorname{ch} \pi (x - x') / \delta - \cos \pi (y + y') / \delta} + \frac{\operatorname{sh} \pi (x - x') / \delta}{\operatorname{ch} \pi (x - x') / \delta - \cos \pi (y - y') / \delta} \right] \quad (2.3)$$

Очевидно, что функция $L(z, z')$ обеспечивает выполнение всех граничных условий задачи.

Асимптотические оценки позволяют выделить в (2.2), (2.3) сингулярные члены, которые имеют особенности того же порядка, что в задачах без стали.

Пусть теперь внешняя цепь несимметрична по отношению к каналу и расположена достаточно далеко от него. В данной задаче нельзя пренебрегать влиянием внешней цепи, так как B_i не затухает при $x \rightarrow \pm \infty$. Из физических соображений следует, что удаленная внешняя цепь повлияет только на распределение B_y в канале, но не на B_x (это, в частности, видно из (2.2) и (2.3), если $x' \rightarrow \pm \infty$).

Каждый элементарный ток в рабочей зоне, протекая во внешней цепи (куда входят также электроды и токоотводы), создает в рабочей зоне некоторое однородное поперечное поле, которое можно учесть, как

$$L_y^{(e)} = L_y + \gamma / 4\delta$$

где L_y определяется по (2.3) и $\gamma = \text{const}$. Если внешняя цепь замыкается справа от канала, то полный ток справа от $x = -\infty$ равен нулю и, следовательно, $L_y^{(e)}|_{x=-\infty} = 0$, откуда $\gamma = 2$. Если внешняя цепь замыкается слева от канала, то $\gamma = -2$.

При построении интегрального уравнения для B_y на основе соотношений типа (1.4), (1.5), следует иметь в виду, что электрическая напряженность E зависит от режима работы канала, параметров внешней цепи и не может задаваться произвольно. Пусть внешняя цепь имеет полную проводимость g_e и источник э.д.с. ε , встречный по отношению к э.д.с. канала. Тогда согласно методу узловых потенциалов теории цепей имеем

$$E = -\frac{\kappa}{hg_i} \int_0^{\delta} \int_0^{\delta} u_x B_y \sigma dx dy - \frac{\varepsilon}{h} (1 - \kappa), \quad g_i = \frac{1}{h} \int_0^{\delta} \int_0^{\delta} \sigma dx dy \quad (2.4)$$

где g_i — есть внутренняя проводимость канала, h — расстояние между электродами, $\kappa = g_i / (g_i + g_e)$. Будем относить ε к $u_0 B_0 h$, g_i к $\sigma_0 l^2 / h$ и

перейдем к безразмерным параметрам (см. п.1). В соответствии с (1.5) и (2.4) распределение B_y в канале описывается следующим фредгольмовским интегральным уравнением с полярным ядром и улучшенной особенностью

$$B_y(z) \left[1 - R_m \int_0^1 \int_0^\delta K(z, z') dx' dy' \right] - R_m \int_0^1 \int_0^\delta K(z, z') [B_y(z') - B_y(z)] dx' dy' = \\ = B_{ey}(z) - R_m \varepsilon (1 - \kappa) \int_0^1 \int_0^\delta \sigma(z') L_y^{(e)}(z, z') dx' dy' \quad (2.5)$$

где ядро

$$K(z, z') = \sigma(z') u_x(z') \left[L_y^{(e)} - \frac{\kappa}{g_i} \int_0^1 \int_0^\delta \sigma(z') L_y^{(e)} dx' dy' \right]$$

При $\varepsilon \cong 1$ канал потребляет мощность из внешней цепи и работает в двигательном (насосном) режиме, при $0 \leq \varepsilon \leq 1$ происходит отбор мощности из канала во внешнюю цепь.

Если $\sigma = \sigma(x)$ и $u_x = u_x(x)$, то задача имеет одномерные решения для B_y , так как $B_x = 0$ всюду. Действительно, известное уравнение индукции в этом случае дает для B_x

$$\nabla^2 B_x - \mu \sigma u \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

Так как $B_x = 0$ на стенках и при $x = \pm \infty$, то из единственности решения задачи Дирихле для (2.6) следует $B_x \equiv 0$.

3. Течение в диффузоре. Жидкость движется в плоском коническом диффузоре с боковыми идеальными ферромагнитными стенками¹ при $\varphi \leq 0$, $\varphi \geq \varphi_0 = \pi / n$ ($n = \text{const}$), $0 \leq \rho < \infty$. Создание проводящего потока в канале осуществляется либо вводом рабочей среды через малые отверстия в стенках, либо с помощью химической реакции в окрестности $\rho = 0$. Скорость среды радиальна: $u_\rho(\rho, \varphi)$; электрические токи текут в области $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_0 + l$ и замыкаются на ∞ в направлении, перпендикулярном плоскости задачи (осесимметричная модель), либо через внешнюю цепь при $\rho \rightarrow \infty$.

Граничные условия аналогичны условиям предыдущей задачи с той разницей, что теперь собственное поле B_i токов в канале затухает на бесконечности. Отобразив сектор канала в плоскости $\omega = \xi + i\eta = \rho e^{i\varphi}$ на полосу $0 \leq y \leq \delta$ в плоскости z с помощью функции $z = (\delta / \pi) n \ln \omega$ и используя выражения (2.2), (2.3), получим

$$L_\rho(\omega, \omega') = - \frac{n}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\sin n(\varphi + \varphi')}{0.5[(\rho/\rho')^n + (\rho'/\rho)^n] - \cos n(\varphi + \varphi')} + \frac{\sin n(\varphi - \varphi')}{0.5[(\rho/\rho')^n + (\rho'/\rho)^n] - \cos n(\varphi - \varphi')} \right\} \\ L_\varphi(\omega, \omega') = \frac{n}{4\pi\rho} \left\{ \frac{(\rho/\rho')^n - (\rho'/\rho)^n}{(\rho/\rho')^n + (\rho'/\rho)^n - 2\cos n(\varphi + \varphi')} + \frac{(\rho/\rho')^n - (\rho'/\rho)^n}{(\rho/\rho')^n + (\rho'/\rho)^n - 2\cos n(\varphi - \varphi')} \right\}$$

Так как скорость среды радиальна, задача сводится к интегральному уравнению для B_φ и определенному интегралу для B_ρ .

¹ Используются полярные координаты.

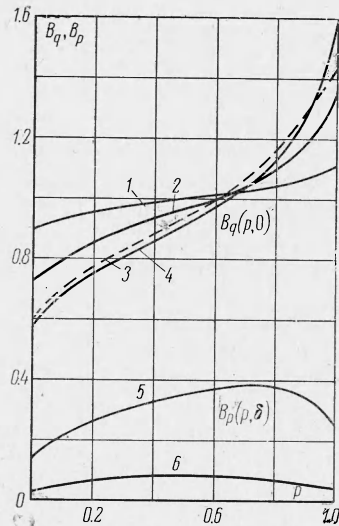
4. Течение в полуполосе. Задача соответствует модели п. 2, но магнитопровод замыкается слева от рабочей зоны: $\mu = \mu_0$ в полуполосе $x > 0$, $0 < y < \delta$ и $\mu = \infty$ вне полуполосы. Токи текут в области $x_0 < x < x_0 + l$, $0 < y < \delta$ и замыкаются на бесконечности. Граничные условия соответствуют задаче п. 2, но для каждого тока $di' = j(z') dx' dy'$ в жидкости его магнитное поле $dB_{iy}(x)$ при больших x равно $\mu_0 di' / \delta$, а $dB_{ix} \rightarrow 0$. Это позволяет построить $L(z, z') = L_x + iL_y$ в виде

$$L_x = -\frac{1}{4\delta} \left[\frac{\sin \pi (y+y')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x+x')/\delta - \cos \pi (y+y')/\delta} + \frac{\sin \pi (y-y')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x+x')/\delta - \cos \pi (y-y')/\delta} + \frac{\sin \pi (y+y')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x-x')/\delta - \cos \pi (y+y')/\delta} + \frac{\sin \pi (y-y')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x-x')/\delta - \cos \pi (y-y')/\delta} \right]$$

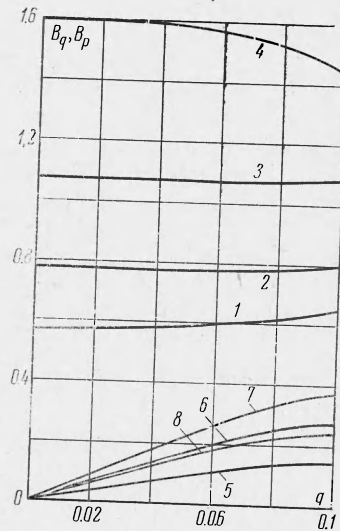
$$L_y = \frac{1}{4\delta} \left[\frac{\operatorname{sh} \pi (x+x')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x+x')/\delta - \cos \pi (y+y')/\delta} + \frac{\operatorname{sh} \pi (x+x')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x+x')/\delta - \cos \pi (y-y')/\delta} + \frac{\operatorname{sh} \pi (x-x')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x-x')/\delta - \cos \pi (y+y')/\delta} + \frac{\operatorname{sh} \pi (x-x')/\delta}{\operatorname{ch} \pi (x-x')/\delta - \cos \pi (y-y')/\delta} \right]$$

Как и в случае п. 2, задача сводится к интегральному уравнению для B_y и определенному интегралу для B_x .

5. Некоторые обобщения и численные расчеты. Развитый выше подход можно применять для любых каналов с идеальными ферромагнитными



Фиг. 1



Фиг. 2

стенками ($\mu_c \rightarrow \infty$), допускающих отображения на канонические области и для каналов с конечной проницаемостью стенок, если удается построить комплексную аналитическую функцию влияния $L(P, M)$, описывающую поле в точке P от единичного тока в M . Методы построения L для различных задач с $\mu_c \rightarrow \infty$ и конечными μ_c хорошо известны в прикладной электротехнике ([9, 10] и др.). Таким образом, речь идет о фредгольмовском интегральном представлении неаналитической функции (поля при $R_m \gg 1$) через аналитические функции, теория которых развита достаточно полно.

В ряде плоских задач с $\mu_c \rightarrow \infty$ интегральное представление для V может получаться с помощью функции Грина G для векторного потенциала, когда компоненты L выражаются через производные G по продольной и поперечной координатам. Однако в задачах со сталью G должна строиться для задачи Неймана (из условия отсутствия тангенциальной составляющей V на стенке), что часто связано с трудностями. При конечных μ_c нахождение G еще более усложняется. Например, построение G в модели п. 1 при соизмеримых μ_1 и μ_2 является трудной задачей.

В любом случае развиваемая выше теория, основанная на физических представлениях, дает более прямой и общий путь решения задач.

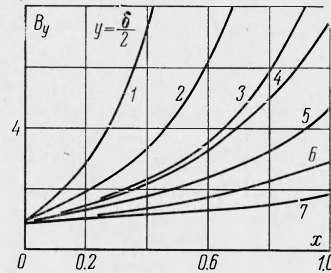
Если аналитическое определение функции L невозможно, она может находиться приближенно следующим образом. В МГД канал без рабочего тела (или в его геометрически подобную модель) вносится рамка с током, соответствующая по форме элементарному току в канале и электродах, и L находится для выбранной сетки точек при различных положениях рамки путем непосредственного измерения поля рамки.

Для иллюстрации полученных результатов были проведены расчеты поля для задач п. 1 и п. 2. Принималось $V_e = V_0 = \text{const}$, в стали $\mu \rightarrow \infty$, скорость жидкости однокомпонента и параллельна стальным стенкам. Полное поле определялось только для области, где $j \neq 0$.

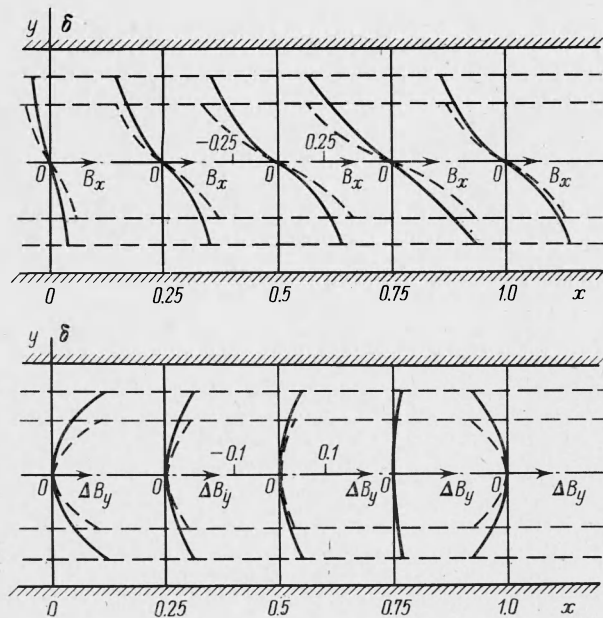
В задаче п. 1 предполагалось, что $E = 0$ (короткое замыкание или осесимметричная модель)

$$\delta = \delta_0 + \text{parc tg} \alpha, \text{tg} \alpha \ll 1, \sigma = \text{const}, u_p = 1 / \delta(p)$$

Результаты расчетов на ЭВМ «НА ИРИ-2» для случая $\delta_0 = 0.1$ приведены на фиг. 1, 2. На фиг. 1 показаны кривые $B_q(p, 0)$ (кривая 1 для $R_m = 1, 2$ для $R_m = 3, 3$ и 4 для $R_m = 5$; сплошные кривые для $\alpha = 0$, пунктирная для $\alpha = 7^\circ$) и кривые $B_p(p, \delta)$ (кривая 5 для $R_m = 5, 6$ для $R_m = 1$). С ростом R_m усиливается размагничивание на входе и намагничивание на выходе, а максимум $B_q(p, \delta)$ смещается к выходу. На фиг. 2 приведены кривые $B_q(q)$ (кривые 1–4) и $B_p(q)$ (кривые 5–8) при $R_m = 5$ и $\alpha = 0$



Фиг. 3



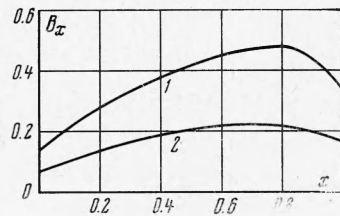
Фиг. 4

(кривые 1 и 5 для $x = 0, 2$ и 6 для $x = 0.25, 3$ и 7 для $x = 0.75, 4$ и 8 для $x = 1$). Характер изменения $B_q(q)$ противоположный на входе и выходе, а $B_p(q)$ нарастает при удалении от стальной стенки.

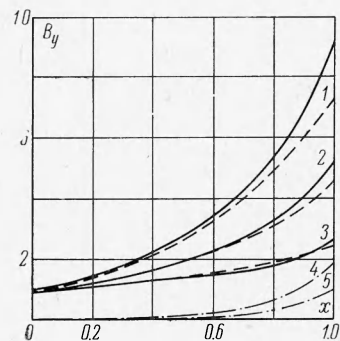
При решении задачи п. 2 рассматривался случай, когда поток (поршень) отделен от стальных стенок немагнитными зазорами толщиной Δ . Такая задача, помимо оговоренных ранее случаев, может представить интерес при движении плоской свободной струи между стальными полюсами. Принималось

$$\sigma = \text{const}, \delta = 1, \varepsilon = 0, u = u_x(y)$$

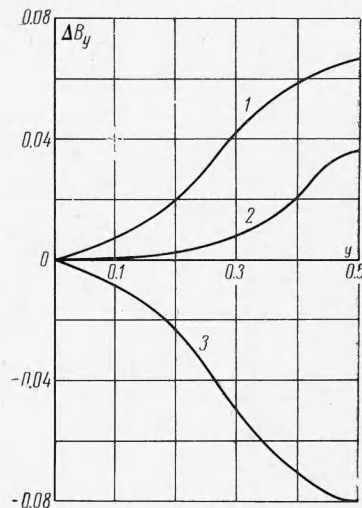
Результаты расчетов иллюстрируются на фиг. 3—7. На фиг. 3 приведены кривые $B_y(x, \delta/2)$ для $\gamma = 2$ (кривая 1 для $R_m = 5$ и $\Delta = 0, 2$ для $R_m = 3$ и $\Delta = 0, 3$ для $R_m = 3$ и $\Delta = 0,125$, 4 для $R_m = 2$ и $\Delta = 0,5$ для $R_m = 3$ и $\Delta = 0,25$, 6 для $R_m = 2$ и $\Delta = 0,25$, 7 для $R_m = 2$ и $\Delta = 0,375$). Нарастание $B_y(x)$ тем сильнее, чем больше R_m и меньше Δ . На фиг. 4 показаны кривые $B_x(y)$ и $\Delta B_y(y) = [B_y(y) - B_y(\delta/2)] / B_y(\delta/2)$ при $R_m = 2$ для различных сечений канала ($x=0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$). Пунктирные линии соответствуют $\Delta = 0,25$, сплошные — $\Delta = 0,125$. Масштабы B_x и ΔB_y приведены в сечении $x=0,5$. На фиг. 5 показаны кривые $B_x(x)$ при $R_m = 2$ для различных $y = \text{const}$ (кривая 1 для $y=0,75\delta$, 2 для $y=0,625\delta$).



Фиг. 5



Фиг. 7



Фиг. 6

В случае неоднородного профиля скорости $u_x(y)$ магнитное поле в канале также будет неоднородным даже при $\Delta = 0$. Этот вывод подтверждается кривыми $\Delta B_y(y)$ для различных x при пуазейлевском профиле $u_x(y)$, приведенными на фиг. 6 (кривая 1 для $x=0$, 2 для $x=0,5$, 3 для $x=1$; плоскость $y=0$ на фиг. 6 условно совмещена с осью канала). Изменение $\Delta B_y(y)$ в этом случае имеет противоположный характер на входе и выходе. На фиг. 7 верхние три сплошные кривые $B_y(x, \delta/2)$ построены для пуазейлевского профиля $u_x(y)$, $R_m = 2$, $\Delta = 0$ и $\gamma = 2$ при различных x (кривая 1 для $x=0$, 2 для $x=0,2$, 3 для $x=0,5$). По мере увеличения x роль индуцированных полей снижается. Для сравнения там же пунктиром показаны аналогичные кривые $B_y(x, \delta/2)$ при однородном профиле той же среднерасходной скорости. Видно, что пуазейлевский профиль скорости приводит к большему искажению поля. Пунктирные кривые рассчитывались по интегральным уравнениям и одномерной теории (см., например, [5]). При $R_m \leq 5$ расхождение не превышало 3%. Кривая 4 на фиг. 7 построена для $\Delta = 0$, $u_x = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, $R_m = 5$, $\gamma = 0$ (симметричная внешняя цепь), а кривая 5 — для тех же условий, но $\gamma = -2$ (внешняя цепь слева).

В заключение авторы благодарят Г. А. Любимова, А. Б. Ватажина, В. В. Гогосова, А. Е. Якубенку за полезное обсуждение постановки задачи и результатов работы.

Поступило 23 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Электрические поля в каналах магнито-гидродинамических устройств. Дополнение к книге Дж. Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода». М., «Мир», 1965.
2. М и х а й л о в Ю. М. Жидкометаллические МГД генераторы при больших магнитных числах Рейнольдса. Магнитная гидродинамика, 1965, № 4.
3. Е л и с е е в Б. В., Л о б а н о в А. Д. К определению средней величины тока с учетом индуцированных полей. Магнитная гидродинамика, 1966, № 4.
4. Е л и с е е в Б. В., Л о б а н о в А. Д. Некоторые двумерные течения при конечных магнитных числах Рейнольдса. ПМТФ, 1967, № 1.
5. Б е р т и н о в А. И., Б у т Д. А., Ч и т е ч я н В. И. Методы определения индуцированных магнитных полей в линейных МГД генераторах постоянного тока. Electr. MHD, Vienna, 1968, vol. 1, pp. 463—485.
6. Б е р т и н о в А. И., Б у т Д. А., Ч и т е ч я н В. И., Ю д а с В. И. Расчет гидромагнита конечных размеров. Магнитная гидродинамика, 1969, № 2.
7. В у л и с Л. А., Г у с и к а П. Л., К у с а и н о в М. К., Ш м е л е в Ю. К., Я г л е н к о В. Г. Течение ртути в лотке в поперечном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1966, № 2.
8. П е т р и к М. Работа МГД генератора с двухфазным потоком жидкого металла. МГД генераторы, т. 3. М., ВИНТИ, 1966.
9. Х э г Б. Электромагнитные расчеты. М.—Л., Энергоиздат, 1934.
10. Ш т а ф л ь М. Электродинамические задачи в электрических машинах и трансформаторах. М.—Л., «Энергия», 1966.