

Оценим теперь из выражения (10) ширину волнового пакета при  $\tau \rightarrow \infty$ . Пусть  $\lambda$  — характерный размер, на котором функция  $v_0(y)$  сильно меняется. Тогда  $v(y, \tau)$  убывает, начиная с тех  $y_*$ , для которых функция  $\Phi$  совершает несколько осцилляций на длине  $\lambda$ . Если  $v_0(y)$  отлично от нуля для  $|y| < y_0$ , то  $y_* \gg y_0$  при больших  $\tau$ . Тогда

$$\Phi\left(\frac{y-y'}{\mu\tau^{1/3}}\right) \approx \left(\frac{y}{\mu\tau^{1/3}}\right)^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\mu\tau^{1/3}}\right)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Характерная «частота» функции Эйри есть  $y^{1/2}\mu^{-3/2}\tau^{-1/2}$ ; отсюда следует оценка

$$y_* \sim \frac{\tau\mu^3}{\lambda^2} \quad (15)$$

Приблизительно на этих расстояниях сравниваются разные члены ряда (12).

Сравнение оценок (14) и (15) показывает, что если хотя бы одно  $A_n$  отлично от нуля, существует область, где необходимо учитывать нелинейные эффекты, хотя ширина этой области уменьшается с ростом  $n$ .

Возможно, что существуют начальные условия специфического вида, такие что все  $A_n = 0$ , для которых линейное распыление пакета имеет место при всех  $\tau$  и  $z$ .

Недавно в работе [3] были найдены автомодельные решения уравнения (5), эволюционирующие по закону, близкому к линейному. Анализ этих решений показывает, что они удовлетворяют условиям (13).

В заключение автор благодарит Р. З. Сагдеева за обсуждение работы.

Поступила 23 I 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания в разреженной плазме. Ядерный синтез, 1961, № 1.
2. Карман В. И. О структуре фронта ударной волны, распространяющейся под углом к магнитному полю в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 8.
3. Березин Ю. А., Карман В. И. К теории нестационарных волн конечной амплитуды в разреженной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ. (в печати).

#### ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ОТСАСЫВАНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ С ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Л. Ф. Козлов (Ленинград)

Под оптимальным отсасыванием жидкости из пограничного слоя через пористую поверхность крылового профиля будем понимать такое распределение нормальной составляющей скорости по поверхности, когда в каждом сечении пограничного слоя местное число Рейнольдса равно его нижнему критическому значению.

Впервые задача об оптимальном отсасывании жидкости из пограничного слоя пористой пластины численным интегрированием уравнения Л. Прандтля была решена в работе [1]. Приближенное решение этой же задачи в квадратурах получено автором [2].

Работы Вигхардта и Вортмана [3, 4] посвящены приближенному решению аналогичной задачи для пограничного слоя с продольным перепадом давлений на внешней границе. Обе работы основаны на одновременном использовании уравнений импульсов и энергии для пограничного слоя. В методе Вигхардта для каждого частного случая предлагается интегрировать основную систему дифференциальных уравнений весьма трудоемким численным способом конечных разностей. При выводе окончательных формул для оптимального отсасывания Вортманом использованы функции, вычисленные с применением профилей Шлихтинга, весьма приближенно аппроксимирующих действительное изменение скоростей в пограничном слое на пористой поверхности, особенно вблизи точки отрыва.

Ниже для расчета оптимального отсасывания жидкости из пограничного слоя крыловых профилей с пористой поверхностью в несжимаемой жидкости использована система уравнений нулевого и второго «моментов» [5]. Предложенный метод достаточно точен и свободен от недостатков, присущих методам Вигхардта и Вортмана. Следует отметить, что для решения задач пограничного слоя систему уравнений «моментов» впервые предложил Л. Г. Лойцянский [6].

## Обозначения

$x$ — координата вдоль поверхности крылового профиля,	$R_x$ — число Рейнольдса,
$x_0$ — координата точки потери устойчивости без отсасывания	$R^{**}$ — местное число Рейнольдса,
$U_0$ — скорость набегающего потока,	$R_0^{**}$ — нижнее значение местного критического числа Рейнольдса без отсасывания жидкости;
$U$ — продольная скорость на внешней границе пограничного слоя,	$R_*^{**}$ — нижнее значение местного критического числа Рейнольдса при отсасывании жидкости,
$v_0$ — местная скорость отсасывания жидкости через пористую поверхность профиля,	$H$ — формпараметр пограничного слоя,
$f$ — параметр пограничного слоя,	$\delta^{**}$ — толщина потери импульса,
$t^{**}$ — параметр отсасывания из пограничного слоя через поверхность,	$\delta^*$ — толщина потока вытеснения,
	$\nu$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости,

$$a = 0.44, b = 5.48, B = 1.12, c = 9.54, H_0 = 2.59, H_4 = 4, A_1 = 26.3, B_1 = 8$$

$$f = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu}, \quad t^{**} = \frac{v_0 \delta^{**}}{\nu}, \quad R_x = \frac{U_0 x}{\nu}, \quad R^{**} = \frac{U \delta^{**}}{\nu}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

Используя приближенные интерполяционные формулы для коэффициента трения и формпараметра  $H$ , уравнение нулевого момента преобразуем к линейному виду.

$$\frac{df}{dx} = \frac{U''}{U'} f + \frac{U'}{U} [a + (B - 2) t^{**} - bf] \quad (1)$$

Дифференцируя параметр

$$f = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu} = \frac{\nu U'}{U^2} R^{**2} \quad \left( R^{**} = \frac{U \delta^{**}}{\nu} \right) \quad (2)$$

найдем, что

$$\frac{df}{dx} = \frac{\nu U''}{U^2} R^{**2} - \frac{2\nu U'^2}{U^3} R^{**2} + \frac{\nu U'}{U^2} \frac{dR^{**2}}{dx} \quad (3)$$

Подставляя формулы (2) — (3) в уравнение (1), получим

$$\frac{\nu}{U} \frac{dR^{**2}}{dx} + \frac{\nu U'}{U^2} (b - 2) R^{**2} - (B - 2) \frac{v_0}{U} R^{**} - a = 0 \quad \left( t^{**} = \frac{v_0}{U} R^{**} \right) \quad (4)$$

Уравнение второго момента используем в следующем виде:

$$\frac{df}{dx} = \frac{U''}{U'} f + \frac{U'}{U} \frac{a}{H_0} (H - H_4 t^{**} - H_0 c f) \quad (5)$$

После подстановки формул (2) — (3) в уравнение (5) и соответствующих алгебраических преобразований будем иметь

$$\frac{\nu}{U} \frac{dR^{**2}}{dx} + \frac{\nu U'}{U^2} (ac - 2) R^{**2} + a \frac{H_4}{H_0} \frac{v_0}{U} R^{**} - a \frac{H}{H_0} = 0 \quad (6)$$

Исключив из уравнений (4) и (6) величину  $v_0/U$ , получим дифференциальное уравнение для вычисления местного числа Рейнольдса

$$\frac{dR^{**2}}{dx} + \frac{U'}{U} k_0 R^{**2} - \left[ \frac{a}{H_0} \left( \frac{aH_4}{B-2} - H \right) \right] \left[ \frac{\nu}{U} \left( 1 + \frac{a}{B-2} \frac{H_4}{H_0} \right) \right]^{-1} = 0 \quad (7)$$

$$k_0 = \left[ (ac - 2) + \frac{a(b-2)H_4}{B-2} \frac{H_4}{H_0} \right] \left( 1 + \frac{a}{B-2} \frac{H_4}{H_0} \right)^{-1}$$

Интегрируя (7) при граничном условии  $R^{**} = R_0^{**}$  при  $x = x_0$ , найдем

$$R^{**2} = \exp \left[ -k_0 \ln \frac{U(x)}{U(x_0)} \right] \left\{ \frac{a}{\nu [H_0 (B-2) + aH_4]} \times \right. \\ \left. \times \int_{x_0}^x [aH_4 + (B-2)H] U \exp \left[ k_0 \ln \frac{U(x)}{U(x_0)} \right] dx \right\} + R_0^{**2} \quad (8)$$

Расчеты оптимального отсасывания жидкости из пограничного слоя начинают от значения числа Рейнольдса  $R_0^{**}$  в точке потери устойчивости слоя, до которой без отсасывания жидкости течение в слое устойчиво к малым возмущениям. Для известного распределения скоростей на внешней границе слоя крылового профиля  $U(x)$  и

заданных значений формпараметра  $H$  по формуле (8) вычислим  $R^{**}$ . Получив семейство кривых  $R^{**}(x, H)$  и зная местные критические числа Рейнольдса, соответствующие каждому значению формпараметра  $H$ , графически определим зависимость  $R^{**}(x)$ .

Нижние значения местного критического числа Рейнольдса  $R_{*}^{**}$  вычисляются путем исследования методом малых возмущений гидродинамической устойчивости течения жидкости в ламинарном пограничном слое. Известно, что гидродинамическая устойчивость течения в основном зависит от степени полноты профиля скоростей поперек слоя, в значительной степени определяемой формпараметром  $H$ . Поэтому естественно, что значение нижнего критического числа Рейнольдса  $R_{*}^{**}$  однозначно зависит от формпараметра  $H$ . Как это предложено в работе [3], в дальнейших вычислениях значения  $R_{*}^{**}(H)$  рекомендуется определять, пользуясь следующей приближенной формулой:

$$R_{*}^{**} = \exp(A_1 - B_1 H) \quad (9)$$

Из уравнения нулевого момента (4) получим формулу для вычисления оптимального распределения скорости отсасывания жидкости

$$\frac{v_0}{U} = \frac{\nu}{U} \frac{1}{B-2} \frac{1}{R^{**}} \frac{dR^{**2}}{dx} + \frac{\nu U' (b-2)}{U^2 (B-2) R^{**}} - \frac{a}{B-2} \frac{1}{R^{**}} \quad (10)$$

Первый член в формуле (10) определим из дифференциального уравнения (7). После преобразований будем иметь

$$\frac{\nu}{U} \frac{1}{B-2} \frac{1}{R^{**}} \frac{dR^{**2}}{dx} = - \frac{\nu U'}{U^2} \frac{k_0}{B-2} R^{**} + \frac{a}{B-2} \frac{[aH_4 + H(B-2)]}{[H_0(B-2) + aH_4]} \frac{1}{R^{**}} \quad (11)$$

Подставляя это выражение в уравнение (10) и произведя необходимые вычисления, в окончательном виде найдем формулу для определения оптимального распределения вдоль хорды крылового профиля скорости отсасывания жидкости из пограничного слоя

$$\frac{v_0}{U} = \frac{\nu U' (b-2-k_0)}{U^2} \frac{1}{B-2} R^{**} + \frac{a(H-H_0)}{[H_0(B-2) + aH_4]} \frac{1}{R^{**}} \quad (12)$$

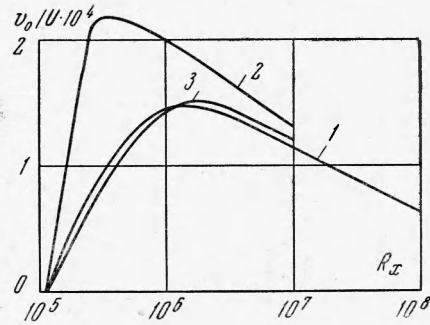
Определив по формуле (12) оптимальное распределение скорости отсасывания, приближенным методом, предложенным в работе [5], можно вычислить все характеристики пограничного слоя и сопротивление трения крылового профиля.

Для частного случая пористой пластины выражения (8) и (12) приводятся к интегральной показательной функции. Сопоставление зависимостей, полученных разными авторами для скорости оптимального отсасывания, на пористой пластине  $v_0/U$  при различных числах Рейнольдса  $R_x$  приведено на фиг. 1. На этом графике нанесены результаты расчетов по предлагаемой формуле (12) (кривая 1), а также по данным работ [3, 4] (соответственно кривые 2 и 3). Сопоставление показывает на удовлетворительное совпадение результатов расчетов по предлагаемой формуле с соответствующими данными из работы [4]. Полученные результаты также позволяют сделать вывод о том, что распределение оптимальной скорости отсасывания жидкости из пограничного слоя в значительной мере зависит от числа Рейнольдса.

Поступила 7 IX 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P r e t s c h J. Die Leistungserparnis durch Grenzschichtbeeinflussung beim Schleppen einer ebenen Platte. Deutsche Luftfahrtforschung, 1943, UM, № 3048.
2. К о з л о в Л. Ф. Об оптимальном отсасывании пограничного слоя на пористой пластине в несжимаемой жидкости. Инж.-физ. ж., 1963, т. VI, № 10.
3. W i e g h a r d t K. Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit Kontinuierlicher Absaugung. Ing.-Archiv, 1954, 22, 368.
4. W o r t m a n n F. Grenzschicht — Absaugung. Gzenzschicht — forschung, Symposium Freiburg, Springer — Verlag, 1958.
5. К о з л о в Л. Ф. Приближенное интегрирование уравнений ламинарного пограничного слоя на пористой поверхности в несжимаемой жидкости. ПМТФ, 1962, № 5.
6. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Приближенный метод интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. ПММ, 1949, т. XIII, вып. 5.



Фиг. 1