

AMS subject classification: 65N12, 65N30, 35K65, 35J65

Численные методы для нелокальной параболической задачи с нелинейностью типа Кирхгофа

М. Мбехоу, Г. Шеджу

Department of Mathematics, University of Yaounde I, P.O. Box 812, Yaounde, Cameroon

E-mails: mbehomoh@gmail.com (Мбехоу М.), gchenjou@uy1.uninet.com (Шеджу Г.)

Мбехоу М., Шеджу Г. Численные методы для нелокальной параболической задачи с нелинейностью типа Кирхгофа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 3. — С. 301–313.

Присутствие нелокального члена в нелокальных задачах нарушает разреженность матриц Якоби при численном решении задачи с использованием метода конечных элементов и метода Ньютона–Рафсона. В результате вычисления занимают больше времени и пространства в противоположность локальным задачам. Чтобы преодолеть эту трудность, в данной статье выполнен анализ линейаризованного метода конечных элементов Тета–Галеркина для зависящей от времени нелокальной задачи с нелинейностью типа Кирхгофа. Тем самым мы рассматриваем временную дискретизацию на основе θ -схемы временных шагов с $\theta \in [1/2, 1)$. Получены оценки ошибки для стандартной схемы Кранка–Николсона ($\theta = 1/2$), смещенной схемы Кранка–Николсона ($\theta = 1/2 + \delta$, где δ — временной шаг) и общего случая ($\theta \neq 1/2 + k\delta$, где $k = 0, 1$). И, наконец, представлены результаты численного моделирования, подтверждающие теорию.

DOI: 10.15372/SJNM20190304

Ключевые слова: θ -схема, уравнение Кирхгофа, нелокальный член диффузии, оптимальная оценка ошибки, метод конечных элементов Галеркина.

Mbehou M., Chendjou G. Numerical methods for a nonlocal parabolic problem with nonlinearity of Kirchhoff type // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 3. — P. 301–313.

The presence of the nonlocal term in the nonlocal problems destroys the sparsity of the Jacobian matrices when solving the problem numerically using finite element method and Newton–Raphson method. As a consequence, computations consume more time and space in contrast to local problems. To overcome this difficulty, this paper is devoted to the analysis of a linearized Theta–Galerkin finite element method for the time-dependent nonlocal problem with nonlinearity of Kirchhoff type. Hereby, we focus on time discretization based on θ -time stepping scheme with $\theta \in [1/2, 1)$. Some a error estimates are derived for the standard Crank–Nicolson ($\theta = 1/2$), the shifted Crank–Nicolson ($\theta = 1/2 + \delta$, δ is the time-step) and the general case ($\theta \neq 1/2 + k\delta$, $k = 0, 1$). Finally, numerical simulations that validate the theoretical findings are exhibited.

Keywords: θ -scheme, Kirchhoff equation, nonlocal diffusion term, optimal error estimate, Galerkin finite element method.

1. Введение

В последние годы интерес математиков к изучению нелокальных задач привлек внимание ученых. Этот интерес вызван их вкладом в моделирование многих физических и биологических явлений. Обоснованием таких моделей служит тот факт, что в реальности измерения не выполняются поточечно, а с использованием некоторого локального

усреднения. Некоторые интересные особенности нелокальных задач и дополнительная мотивация описаны в [1–4] и в ссылках к этим статьям.

Рассмотрим следующее нелокальное параболическое уравнение:

$$\begin{cases} u_t - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f & \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) — ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$; $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — заданные функции.

Краевая задача (1.1) связана с обобщенным уравнением Кирхгофа

$$u_{tt} - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f, \quad (1.2)$$

которое является обобщением классического волнового уравнения Даламбера с учетом эффектов изменений объема тела во время вибраций. Следует отметить, что уравнению (1.2) уделялось много внимания после появления работы Лионса [5], в которой для решения задачи было предложено использовать функциональный анализ. Некоторые интересные результаты можно найти в [6–8]. В настоящее время активно исследуются корректность и поведение решения задачи (1.1). Шривастава с соавторами [9] доказали существование и единственность сильного решения. Алвес с соавторами [10] изучали стационарный случай.

Метод конечных элементов широко изучен и применяется к нелинейным гиперболическим или параболическим задачам, как обсуждалось в [4, 11–15]. Однако примеры анализа и реализации численных методов для задач типа Кирхгофа немногочисленны. Можно обратиться к статье [9], в которой авторы применили линейную аппроксимацию метода конечных элементов для пространственных переменных и обратный метод Эйлера для временных переменных к задаче (1.1). Следует отметить, что в [9] полученная в результате дискретная слабая формулировка приводит к системе нелинейных уравнений. Если применить метод Ньютона прямо к этой дискретной формулировке, то матрица Якоби будет полной. Чтобы избежать этой трудности авторы вынуждены переформулировать дискретную задачу для получения разреженной матрицы Якоби при использовании метода Ньютона.

В данной статье предлагается линеаризованный θ -метод конечных элементов Галеркина для решения задачи (1.1). Основное внимание уделяется дискретизации по времени на основе так называемой θ -схемы с $\theta \in [1/2, 1)$, включая стандартную и смещенную схемы Кранка–Николсона, как обсуждалось в [16, 17]. Следует отметить, что получаемая в результате численная схема является полунестабильной на каждом временном шаге и нужно лишь решить систему линейных алгебраических уравнений. Для сохранения оптимального порядка точности должны быть даны некоторые стартовые аппроксимации.

В пункте 2 обсуждаются гипотезы о данных и слабая вариационная формулировка задачи. Пункт 3 посвящен пространственной дискретизации задачи и ее сходимости; сходимость полностью дискретного решения доказывается в п. 4. Численные результаты представлены в п. 5 для иллюстрации нашего теоретического анализа.

2. Начальная информация и слабая формулировка

В данной статье $H^k(\Omega)$ обозначает обыкновенное пространство Соболева порядка $k \in \mathbb{N}$ с нормой $\|\cdot\|_k$, а $H_0^k(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^k(\Omega)$. Пространство Лебега обозначается $L^r(\Omega)$, $1 < r \leq \infty$ с нормой $\|\cdot\|_{L^r}$, которая упрощается до $\|\cdot\|$ в $L^2(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство распределений на Ω . Мы также используем стандартное обозначение пространств Бохнера, таких как $L^q(0, T, X)$ с нормой $\|\cdot\|_{L^q(X)}$, где X — гильбертово пространство.

Рассмотрим (1.1) со следующими гипотезами.

Гипотеза 1: $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$.

Гипотеза 2: $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограничено при $0 < m_0 \leq M(s) \leq m_1$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Гипотеза 3: M — функция, непрерывная по Липшицу, т.е. существует $L_M > 0$ такое, что $|M(s) - M(t)| \leq L_M |s - t|$ для всех $s, t \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.1 (Существование и единственность решения) [9]. *Если гипотезы 1–3 верны, то задача (1.1) имеет единственное решение, т.е. существует единственная функция u такая, что*

$$u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \tag{2.1}$$

$$u_t \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)), \tag{2.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Omega} u_t v \, dx + M(\|\nabla u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.4}$$

где (2.4) следует понимать согласно определению в $\mathcal{D}'(0, T)$.

3. Пространственная дискретизация

Пусть \mathcal{T}_h — регулярная триангуляция Ω с элементами K в соответствии с классической теорией метода конечных элементов [11, 18] и пусть $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{h_K\}$ обозначает размер сетки, где $h_K = \text{diam}(K) = \max\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K\}$, а S_h — подпространство конечной размерности $H^1(\Omega)$, состоящее из непрерывных кусочных многочленов степени $r \geq 1$ на \mathcal{T}_h ; $V_h = S_h \cap H_0^1(\Omega)$. Пусть Π_h — оператор интерполяции и $R_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ — проекционный оператор Рунта, определяемый путем

$$\int_{\Omega} \nabla(u - R_h u) \nabla w \, dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

Тогда мы имеем следующую лемму.

Лемма 3.1 [11]. *Если $u \in H^{r+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ для всех $r \geq 1$, то*

$$\|u - \Pi_h u\| + h \|\nabla(u - \Pi_h u)\| \leq Ch^{r+1} \|u\|_{r+1}, \tag{3.2}$$

$$\|u - R_h u\| + h \|\nabla(u - R_h u)\| \leq Ch^{r+1} \|u\|_{r+1}, \tag{3.3}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от h .

Пространственная дискретная задача на основе теоремы 2.1 следующая: найти $u_h \in V_h$ для $t \geq 0$, такое что

$$\int_{\Omega} (u_h)_t v_h dx + M(\|\nabla u_h\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.4)$$

$$u_h(0) = \Pi_h u_0.$$

Доказательство следующей теоремы можно также найти в [9].

Теорема 3.1. Полудискретная задача (3.4) допускает единственное решение $u_h \in V_h$, удовлетворяющее

$$\|u_h\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} \leq C, \quad \|\nabla u_h\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} \leq C.$$

Кроме того, пусть u — решение задачи (1.1). Если $u \in L^\infty(0, T, H^{r+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ при $r \geq 1$, то имеем

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|u - u_h\|_{L^2(H_0^1(\Omega))} \leq Ch^r. \quad (3.5)$$

C — положительная постоянная, не зависящая от h .

4. Полностью дискретная задача (θ -схема)

Перейдем к полностью дискретной аппроксимации. Пусть $\{t_n \mid t_n = n\delta; 0 \leq n \leq N\}$ — однородное разбиение $[0, T]$ с временным шагом $\delta = T/N$. Пусть $\theta \in \mathbb{R}$ при $\theta \in [1/2, 1)$. Запишем $t_{n+\theta} = (1 - \theta)t_n + \theta t_{n+1}$ и $w^n = w(t_n) = w(x, t_n)$ и для последовательности функций $\{w^n\}_{n=0}^N$ определим

$$\bar{\partial} w^{n+1} = \frac{w^{n+1} - w^n}{\delta},$$

$$\bar{w}^{n+\theta} = (1 - \theta)w^n + \theta w^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$\hat{w}^{n+1} = \frac{1}{2}(3w^n - w^{n-1}), \quad n = 1, \dots, N - 1.$$

Используем следующую норму в дискретном варианте:

$$\|w\|_{L^\infty(0, T, \delta, X)} = \max_{0 \leq n \leq N} \|w^n\|_X, \quad (4.1)$$

$$\|w\|_{L^2(0, T, \delta, X)}^2 = \delta \sum_{n=1}^N \|w^n\|_X^2, \quad (4.2)$$

$$\|w\|_{\bar{L}^2(0, T, \delta, X)}^2 = \delta \sum_{n=1}^N \|\bar{w}^{n+\theta}\|_X^2, \quad (4.3)$$

где X — заданное банахово пространство.

Линеаризованный θ -метод конечных элементов Галеркина для задачи (3.4) имеет следующий вид: найти $u_h^n \in V_h$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, такое что

$$\int_{\Omega} \bar{\partial} u_h^{n+1} v_h dx + M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_h^{n+\theta} \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f^{n+\theta} v_h dx \quad \forall v_h \in V_h, \quad (4.4)$$

$$u_h^0 = \Pi_h u_0,$$

где \hat{u}_h^1 — решение следующего уравнения:

$$\int_{\Omega} \partial_{\theta} \hat{u}_h^1 v_h dx + M\left(\|\nabla u_h^0\|^2\right) \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_h^1 \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f^{\theta} v_h dx, \tag{4.5}$$

где $\partial_{\theta} \hat{u}_h^1 = \frac{\hat{u}_h^1 - u_h^0}{\delta\theta}$.

Теорема 4.1. *Полностью дискретная аппроксимация (4.4) допускает единственное решение $u_h^n \in V_h$ для всех $n = 0, \dots, N$. Положив $U_h = (u_h^n)_{n=0}^N$, имеем*

$$\|U_h\|_{L^{\infty}(0,T,\delta,L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla U_h\|_{L^2(0,T,\delta,L^2(\Omega))}^2 \leq C, \tag{4.6}$$

$$\delta \sum_{n=0}^N \|\bar{\partial} u_h^{n+1}\|^2 + \|\nabla U_h\|_{L^{\infty}(0,T,\delta,L^2(\Omega))}^2 \leq C, \tag{4.7}$$

где C – базовая постоянная, не зависящая от h .

Чтобы доказать эту теорему используем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Если $\theta \in [1/2, 1)$, то для всех $a, b \in \mathbb{R}^+$*

$$\frac{1}{2}(a^2 - b^2) \leq (a - b)(\theta a + (1 - \theta)b).$$

Доказательство.

$$P \equiv (a - b)(\theta a + (1 - \theta)b) = \theta a^2 + (1 - 2\theta)ab - (1 - \theta)b^2.$$

Если $\theta \in [1/2, 1)$, то $1 - 2\theta \leq 0$, и из $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ мы имеем

$$(1 - 2\theta)ab \geq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)(a^2 + b^2).$$

Поэтому

$$\theta a^2 + \frac{1}{2}(1 - 2\theta)(a^2 + b^2) - (1 - \theta)b^2 \leq P, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \leq P. \quad \square$$

Доказательство теоремы 4.1. Сначала заметим, что (4.4) – линейная система уравнений в конечномерном пространстве, следовательно единственность означает существование решения. Пусть U_1^n и U_2^n – два решения (4.4), и положим $W_h^n = U_1^n - U_2^n$. При вычитании W_h^n удовлетворяет следующей задаче:

$$\int_{\Omega} \bar{\partial} W_h^{n+1} v_h dx + M(\|\nabla \hat{U}_1^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla \bar{W}_h^{n+\theta} \nabla v_h dx + \left(M(\|\nabla \hat{U}_1^{n+1}\|^2) - M(\|\nabla \hat{U}_2^{n+1}\|^2)\right) \int_{\Omega} \nabla \bar{U}_2^{n+\theta} \nabla v_h dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \tag{4.8}$$

$$W_h^0 = 0,$$

где $\hat{W}_h^1 = \hat{U}_1^1 - \hat{U}_2^1$ – решение уравнения

$$\theta \delta \int_{\Omega} \hat{W}_h^1 v_h dx + M(\|\nabla U_1^0\|^2) \int_{\Omega} \nabla \hat{W}_h^1 \nabla v_h dx = 0. \tag{4.9}$$

Взяв $v_h = \bar{W}_h^{n+\theta}$ в (4.8) и используя лемму 4.1, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\partial} \|W_h^{n+1}\|^2 + m_0 \|\nabla \bar{W}_h^{n+\theta}\|^2 &\leq \left(M(\|\nabla \hat{U}_1^{n+1}\|^2) - M(\|\nabla \hat{U}_2^{n+1}\|^2) \right) \int_{\Omega} \nabla \bar{U}_2^{n+\theta} \nabla \bar{W}_h^{n+\theta} dx \\ &\leq L_M (\|\nabla \hat{U}_1^{n+1}\| + \|\nabla \hat{U}_2^{n+1}\|) \|\nabla \hat{W}_h^{n+1}\| \|\nabla \bar{U}_2^{n+\theta}\| \|\nabla \bar{W}_h^{n+\theta}\| \\ &\leq C \|\nabla \hat{W}_h^{n+1}\|^2 + \frac{m_0}{2} \|\nabla \bar{W}_h^{n+\theta}\|^2. \end{aligned}$$

То есть

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|W_h^{n+1}\|^2 + \frac{m_0}{2} \|\nabla \bar{W}_h^{n+\theta}\|^2 \leq C \|\nabla \hat{W}_h^{n+1}\|^2.$$

Поэтому

$$\|W_h^{n+1}\|^2 + \|\nabla \bar{W}_h^{n+\theta}\|^2 \leq C \left(\|W_h^n\|^2 + \|\nabla W_h^n\|^2 + \|\nabla W_h^{n-1}\|^2 \right), \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (4.10)$$

$$\|W_h^1\|^2 + \|\nabla W_h^1\|^2 \leq C \|\nabla \hat{W}_h^1\|^2. \quad (4.11)$$

Положив $v_h = \hat{W}_h^1$ в (4.9), имеем

$$\|\hat{W}_h^1\| = \|\nabla \hat{W}_h^1\| = 0,$$

это означает, что $\|W_h^1\|^2 + \|\nabla W_h^1\|^2 = 0$, и путем математической индукции мы заключаем, что $\|W_h^n\|^2 + \|\nabla \bar{W}_h^n\|^2 = 0$ для всех $n = 0, \dots, N$, т. е. $W_h^n = 0$.

Для результата устойчивости (4.6), взяв $v_h = \bar{u}_h^{n+\theta}$ в (4.4), применив нижнюю границу $M(\cdot)$ (гипотеза 2) и используя лемму 4.1, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\partial} \|u_h^{n+1}\|^2 + m_0 \|\nabla \bar{u}_h^{n+\theta}\|^2 &\leq \|f^{n+\theta}\| \|\bar{u}_h^{n+\theta}\| \\ &\leq C \|f^{n+\theta}\| \|\nabla \bar{u}_h^{n+\theta}\| \quad (\text{используя неравенство Пуанкаре}) \\ &\leq C \|f^{n+\theta}\|^2 + \frac{m_0}{2} \|\nabla \bar{u}_h^{n+\theta}\|^2. \end{aligned}$$

То есть

$$\|u_h^{n+1}\|^2 + m_0 \delta \|\nabla \bar{u}_h^{n+\theta}\|^2 \leq \|u_h^n\|^2 + C \delta \|f^{n+\theta}\|^2.$$

Суммируя приведенное выше уравнение по $n = 0, \dots, J$

$$\|u_h^{J+1}\|^2 + m_0 \delta \sum_{n=0}^J \|\nabla \bar{u}_h^{n+\theta}\|^2 \leq \|u_h^0\|^2 + C \delta \sum_{n=0}^J \|f^{n+\theta}\|^2, \quad 0 \leq J \leq N,$$

и сделав так, чтобы J стремилось к N для двух сумм, мы получаем желаемый результат (4.6) при $C = C(\|u_0\|, \|f\|_{\bar{L}^2(0,T,\delta,L^2(\Omega))})$.

Чтобы доказать (4.7), возьмем $v_h = \bar{\partial} u_h^{n+1}$ в (4.4). Тогда имеем

$$\|\bar{\partial} u_h^{n+1}\|^2 + M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_h^{n+\theta} \nabla (\bar{\partial} u_h^{n+1}) dx \leq \|f^{n+\theta}\| \|\bar{\partial} u_h^{n+1}\|.$$

Используя тот факт, что $M(\cdot)$ ограничена, и применив лемму 4.1 ко второму члену приведенного выше уравнения, мы имеем

$$\|\bar{\partial} u_h^{n+1}\|^2 + C \frac{1}{2} \bar{\partial} \|\nabla u_h^{n+1}\|^2 \leq \|f^{n+\theta}\| \|\bar{\partial} u_h^{n+1}\| \leq C \|f^{n+\theta}\|^2 + \frac{1}{2} \|\bar{\partial} u_h^{n+1}\|^2.$$

То есть

$$\delta \|\bar{\partial} u_h^{n+1}\|^2 + C(\|\nabla u_h^{n+1}\|^2 - \|\nabla u_h^n\|^2) \leq C\delta \|f^{n+\theta}\|^2.$$

Суммируя приведенное выше уравнение по $n = 0, \dots, J$

$$\delta \sum_{n=0}^J \|\bar{\partial} u_h^{n+1}\|^2 + C(\|\nabla u_h^{J+1}\|^2 - \|\nabla u_h^0\|^2) \leq C\delta \sum_{n=0}^J \|f^{n+\theta}\|^2 \quad \forall 0 \leq J \leq N,$$

и сделав так, чтобы J стремилось к N для двух сумм, мы получаем желаемый результат (4.7) при $C = C(\|\nabla u_0\|, \|f\|_{L^2(0,T,\delta,L^2(\Omega))})$. \square

В следующей теореме мы доказываем сходимость полностью дискретного решения.

Теорема 4.2. Пусть u, u_h^n — решения (2.1)–(2.4) и (4.4), (4.5) соответственно. Предположим, что $u \in L^\infty(0, T, H^{r+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ при $r \geq 1$ и $\theta \in [1/2, 1)$. Обозначим $U = (u(t_n))_{n=0}^N$ и $U_h = (u_h^n)_{n=0}^N$. Тогда существует базовая постоянная C , не зависящая от h и δ , такая что

случай 1: для $\theta = 1/2 + \lambda\delta, \lambda \in \{0, 1\}$, имеет место

$$\|U - U_h\|_{L^\infty(0,T,\delta,L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla(U - U_h)\|_{L^2(0,T,\delta,L^2(\Omega))}^2 \leq C(h^{2r} + \delta^3); \quad (4.12)$$

случай 2: для $\theta \neq 1/2 + \lambda\delta, \lambda \in \{0, 1\}$, имеет место

$$\|U - U_h\|_{L^\infty(0,T,\delta,L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla(U - U_h)\|_{L^2(0,T,\delta,L^2(\Omega))}^2 \leq C(h^{2r} + \delta^2). \quad (4.13)$$

Доказательство. Разложим $u_h^n - u^n$ следующим образом:

$$u_h^n - u^n = (u_h^n - R_h u^n) + (R_h u^n - u^n) = \Psi_h^n + \eta^n$$

и положим

$$\hat{\Psi}_h^1 = \hat{u}_h^1 - R_h u^\theta.$$

Тогда лемма 3.1 дает оценку η^n .

На основании (2.1)–(2.4) и (4.4), (4.5) Ψ_h^n и $\hat{\Psi}_h^1$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\partial} \Psi_h^{n+1} v_h \, dx + M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta} \nabla v_h \, dx \\ &= \int_{\Omega} \bar{\partial} u_h^{n+1} v_h \, dx + M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_h^{n+\theta} \nabla v_h \, dx - \\ & \int_{\Omega} \bar{\partial} R_h u^{n+1} v_h \, dx - M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla R_h \bar{u}^{n+\theta} \nabla v_h \, dx \\ &= \int_{\Omega} (u_t^{n+\theta} - \bar{\partial} R_h u^{n+1}) v_h \, dx + M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla (u^{n+\theta} - \bar{u}^{n+\theta}) \nabla v_h \, dx + \\ & \left(M(\|\nabla u^{n+\theta}\|^2) - M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \right) \int_{\Omega} \nabla u^{n+\theta} \nabla v_h \, dx, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\partial}_{\theta} \hat{\Psi}_h^1 v_h dx + M(\|\nabla u_h^0\|^2) \int_{\Omega} \nabla \hat{\Psi}_h^1 \nabla v_h dx \\
&= \int_{\Omega} \bar{\partial}_{\theta} u_h^1 v_h dx + M(\|\nabla u_h^0\|^2) \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_h^1 \nabla v_h dx - \\
& \quad \int_{\Omega} \bar{\partial}_{\theta} R_h u^{\theta} v_h dx - M(\|\nabla u_h^0\|^2) \int_{\Omega} \nabla R_h u^{\theta} \nabla v_h dx \\
&= \int_{\Omega} (u_t^{\theta} - \bar{\partial}_{\theta} R_h u^{\theta}) v_h dx + \left(M(\|\nabla u^{\theta}\|^2) - M(\|\nabla u_h^0\|^2) \right) \int_{\Omega} \nabla u^{\theta} \nabla v_h dx, \quad (4.15)
\end{aligned}$$

где $\bar{\partial}_{\theta} \hat{\Psi}_h^1 = \frac{\hat{\Psi}_h^1 - \Psi_h^0}{\delta\theta}$ и $\bar{\partial}_{\theta} R_h u^{\theta} = \frac{R_h(u^{\theta} - u_0)}{\delta\theta}$. Заметим, что в (4.14) и (4.15) мы используем определение проекционного оператора Рунца (3.1).

При $v_h = \bar{\Psi}_h^{n+\theta}$ в (4.14) имеем

$$\int_{\Omega} \bar{\partial} \Psi_h^{n+1} \bar{\Psi}_h^{n+\theta} dx + M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2 = \sum_{i=1}^3 I_i, \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega} (u_t^{n+\theta} - \bar{\partial} R_h u^{n+1}) \bar{\Psi}_h^{n+\theta} dx \leq \|u_t^{n+\theta} - \bar{\partial} R_h u^{n+1}\| \|\bar{\Psi}_h^{n+\theta}\| \\
&\leq C(\|u_t^{n+\theta} - \bar{\partial} u^{n+1}\| + \|\bar{\partial} \eta^{n+1}\|) \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\| \\
&\leq C(\|u_t^{n+\theta} - \bar{\partial} u^{n+1}\| + \|\bar{\partial} \eta^{n+1}\|)^2 + \frac{m_0}{4} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \int_{\Omega} \nabla (u^{n+\theta} - \bar{u}^{n+\theta}) \nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta} dx \leq m_1 \|\nabla (u^{n+\theta} - \bar{u}^{n+\theta})\| \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\| \\
&\leq C \|\nabla (u^{n+\theta} - \bar{u}^{n+\theta})\|^2 + \frac{m_0}{4} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \left(M(\|\nabla u^{n+\theta}\|^2) - M(\|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|^2) \right) \int_{\Omega} \nabla u^{n+\theta} \nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta} dx \\
&\leq L_M (\|\nabla u^{n+\theta}\| + \|\nabla \hat{u}_h^{n+1}\|) (\|\nabla (u^{n+\theta} - \hat{u}_h^{n+1})\|) \|\nabla u^{n+\theta}\| \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\| \\
&\leq C (\|\nabla (u^{n+\theta} - \hat{u}_h^{n+1})\| + \|\nabla \hat{\eta}^{n+1}\| + \|\nabla \hat{\Psi}_h^{n+1}\|) \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\| \quad (\text{для } n \geq 1) \\
&\leq C (\|\nabla (u^{n+\theta} - \hat{u}_h^{n+1})\| + \|\nabla \hat{\eta}^{n+1}\| + \|\nabla \hat{\Psi}_h^{n+1}\|)^2 + \frac{m_0}{4} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2 \\
&\leq C (\|\nabla (u^{n+\theta} - \hat{u}_h^{n+1})\| + \|\nabla \hat{\eta}^{n+1}\| + \|\nabla \Psi_h^n\| + \|\nabla \Psi_h^{n-1}\|)^2 + \frac{m_0}{4} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2,
\end{aligned}$$

где $C = C(L_M, m_0, \|\nabla U\|_{L^\infty(0,T,\delta,L^2(\Omega))}, \|\nabla U_h\|_{L^\infty(0,T,\delta,L^2(\Omega))})$.

Заметим, что если $n = 0$, то

$$I_3 \leq C (\|\nabla \eta^{\theta}\| + \|\nabla \hat{\Psi}_h^1\|)^2 + \frac{m_0}{4} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{\theta}\|^2.$$

Если мы применим лемму 4.1 к первому члену (4.16) и нижней границе $M(\cdot)$, мы получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\Psi_h^{n+1}\|^2 + \frac{m_0}{4} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2 &\leq C (\|u_t^{n+\theta} - \bar{\partial} u^{n+1}\|^2 + \|\bar{\partial} \eta^{n+1}\|^2 + \|\nabla (u^{n+\theta} - \bar{u}^{n+\theta})\|^2 + \\
&\quad \|\nabla (u^{n+\theta} - \hat{u}_h^{n+1})\|^2 + \|\nabla \hat{\eta}^{n+1}\|^2 + \|\nabla \Psi_h^n\|^2 + \|\nabla \Psi_h^{n-1}\|^2), \quad n \geq 1, \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\Psi_h^1\|^2 + \frac{m_0}{4} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{\theta}\|^2 \leq C (\|u_t^{\theta} - \bar{\partial} u^1\|^2 + \|\bar{\partial} \eta^1\|^2 + \|\nabla (u^{\theta} - \bar{u}^{\theta})\|^2 + \|\nabla \eta^{\theta}\|^2 + \|\nabla \hat{\Psi}_h^1\|^2).$$

Из теории численного дифференцирования и интерполирования мы можем доказать, что

$$\|u_t^{n+\theta} - \bar{\partial}u^{n+1}\| \leq \begin{cases} C\delta^2\|u_{tt}\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}, & \text{если } \theta = 1/2 + \delta, \\ C\delta^2\|u_{ttt}\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}, & \text{если } \theta = 1/2, \\ C\delta\|u_t\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}, & \text{если } \theta \neq 1/2 + \lambda\delta \text{ при } \lambda = 0, 1, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\|u^{n+\theta} - \hat{u}^{n+1}\|_{L^p(\Omega)} \leq \begin{cases} C\delta^2\|u_t\|_{L^\infty(L^p(\Omega))}, & \text{если } \theta = 1/2 + \delta, \\ C\delta^2\|u_{tt}\|_{L^\infty(L^p(\Omega))}, & \text{если } \theta = 1/2, \\ C\delta\|u_t\|_{L^\infty(L^p(\Omega))}, & \text{если } \theta \neq 1/2 + \lambda\delta \text{ при } \lambda = 0, 1, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\|u^{n+\theta} - \bar{u}^{n+\theta}\| \leq C\delta^2\|u_{tt}\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}, \quad (4.20)$$

$$\|\nabla(u^{n+\theta} - \bar{u}^{n+\theta})\| \leq C\delta^2\|\nabla u_{tt}\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}. \quad (4.21)$$

Рассмотрим случай $\theta = 1/2 + \lambda\delta$, поскольку эта же техника будет использоваться в остальных случаях.

Формулы (4.17) на основании леммы 3.1 и приведенных выше неравенств принимают вид

$$\bar{\partial}\|\Psi_h^{n+1}\|^2 + \|\nabla\bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2 \leq C\{\delta^4 + h^{2r} + \|\nabla\Psi_h^n\|^2 + \|\nabla\Psi_h^{n-1}\|^2\}, \quad (4.22)$$

$$\bar{\partial}\|\Psi_h^1\|^2 + \|\nabla\bar{\Psi}_h^\theta\|^2 \leq C\{\delta^4 + h^{2r} + \|\nabla\hat{\Psi}_h^1\|^2\}. \quad (4.23)$$

Докажем путем математической индукции, что

$$\|\Psi_h^n\|^2 + \delta\sum_{i=0}^{n-1}\|\nabla\bar{\Psi}_h^{i+\theta}\|^2 \leq C\{\delta^3 + h^{2r}\} \text{ для всех } 0 \leq n \leq N. \quad (4.24)$$

Сначала вычислим $\delta\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\|^2$.

Принимая $v_h = \hat{\Psi}_h^1$ в (4.15), используя гипотезы 2 и 3, неравенство Пуанкаре, неравенство Гельдера и лемму 3.1, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta\delta}\|\hat{\Psi}_h^1\|^2 - \frac{1}{\theta\delta}\int_{\Omega}\Psi_h^0\hat{\Psi}_h^1 dx + m_0\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\|^2 &\leq \|u_t^\theta - \bar{\partial}_\theta R_h u^\theta\| \|\hat{\Psi}_h^1\| + C\|\nabla(u^\theta - u_h^0)\| \|\nabla\hat{\Psi}_h^1\| \\ &\leq C\left(\|u_t^\theta - \bar{\partial}_\theta u^\theta\| + \|\bar{\partial}_\theta \eta^\theta\|\right)\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\| + C\left(\|\nabla(u^\theta - u_0)\| + \|\nabla(u_0 - u_h^0)\|\right)\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\| \\ &\leq C\left(\|u_t^\theta - \bar{\partial}_\theta u^\theta\|^2 + \|\bar{\partial}_\theta \eta^\theta\|^2 + \|\nabla(u^\theta - u_0)\|^2 + \|\nabla(u_0 - u_h^0)\|^2\right) + \frac{m_0}{2}\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\|^2 \\ &\leq C\{\delta^2 + h^{2r}\} + \frac{m_0}{2}\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\|^2, \end{aligned}$$

или эквивалентно

$$\frac{1}{\theta\delta}\|\hat{\Psi}_h^1\|^2 - \frac{1}{\theta\delta}\int_{\Omega}\Psi_h^0\hat{\Psi}_h^1 dx + \frac{m_0}{2}\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\|^2 \leq C\{\delta^2 + h^{2r}\}.$$

Если мы возьмем второй член в левой части приведенного выше уравнения, используем его в его правой части и применим неравенство Гельдера, то мы получим

$$\frac{1}{2\theta\delta}\|\hat{\Psi}_h^1\|^2 + \frac{m_0}{2}\|\nabla\hat{\Psi}_h^1\|^2 \leq \frac{1}{2\theta\delta}\|\Psi_h^0\|^2 + C\{\delta^2 + h^{2r}\}.$$

Тогда

$$\|\hat{\Psi}_h^1\|^2 + \delta \|\nabla \hat{\Psi}_h^1\|^2 \leq C\{\delta^3 + h^{2r}\}, \quad (4.25)$$

поскольку $\|\Psi_h^0\|^2 \leq Ch^{2r+2}$.

Мы знаем, что $\|\Psi_h^0\|^2 \leq Ch^{2r+2}$. Подставив (4.25) в (4.23), получим

$$\|\Psi_h^1\|^2 + \delta \|\nabla \bar{\Psi}_h^\theta\|^2 \leq C\{\delta^3 + h^{2r}\}.$$

Предположим, что (4.24) верно для $0 \leq n \leq k$. Тогда, суммируя уравнение (4.22) по $n = 1, \dots, k$, имеем

$$\|\Psi_h^{k+1}\|^2 + \delta \sum_{n=1}^k \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2 \leq \|\Psi_h^1\|^2 + C \sum_{n=1}^k \delta\{\delta^4 + h^{2r}\} + C\delta \sum_{n=1}^k \|\nabla \Psi_h^n\|^2 + C\delta \sum_{n=1}^k \|\nabla \Psi_h^{n-1}\|^2.$$

Заметим, что

$$\delta \sum_{n=0}^{k-1} \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2 = \delta \sum_{n=1}^k \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n-1+\theta}\|^2 \leq C\{\delta^3 + h^{2r}\},$$

и по определению $\nabla \bar{\Psi}_h^{n-1+\theta}$ (т. е. $\nabla \bar{\Psi}_h^{n-1+\theta} = \theta \nabla \Psi_h^{n-1} + (1-\theta) \nabla \Psi_h^n$), имеем

$$\delta \sum_{n=1}^k \|\nabla \Psi_h^n\|^2 + \delta \sum_{n=1}^k \|\nabla \Psi_h^{n-1}\|^2 \leq C\{\delta^3 + h^{2r}\}.$$

Также отметим, что $\sum_{n=1}^k \delta \leq T$ для всех $1 \leq k \leq N$. Тогда мы имеем

$$\|\Psi_h^{k+1}\|^2 + \delta \sum_{n=1}^k \|\nabla \bar{\Psi}_h^{n+\theta}\|^2 \leq C\{\delta^3 + h^{2r}\}. \quad \square$$

5. Численное моделирование

В данном пункте мы представим несколько численных моделей для иллюстрации теоретических выкладок. Поскольку результирующая матрица линейной системы (4.4), (4.5) разреженная симметричная и положительно определенная, выполняется неполное разложение Холецкого, и результат используется как предобуславливатель в итерационном решателе предобусловленного метода сопряженных градиентов (ПМСГ).

Рассмотрим задачу (1.1) при $\Omega = (0, 1)^2$. Функции f и u_0 выбраны таким образом, что аналитическое решение задается следующим образом:

$$u(x, y, t) = xy(1-x)(1-y) \exp(x+y-t).$$

На рисунке 1 представлены сравнения точного и приближенного решений. Приближенное решение было вычислено с использованием линейной конечно-элементной аппроксимации, $\theta = 1/2$, $h = 1/25$, $\delta = 10^{-2}$ и $T = 1$.

Для анализа скорости сходимости мы смоделировали эту задачу с использованием линейного θ -метода конечных элементов Галеркина (4.4), (4.5) на однородных сетках и при $T = 0.5$. Рисунок 2 показывает оценки ошибки (при фиксированном $\delta = 10^{-2}$) в L^2 - и H^1 -нормах для $\theta = 1/2 + \delta$ (слева) и $\theta = 3/4$ (справа). Эти оценки ошибки имеют вид $\mathcal{O}(h^2)$ для L^2 -нормы и $\mathcal{O}(h)$ для энергетической нормы. Наш теоретический анализ

дает лишь скорость сходимости $\mathcal{O}(h)$ для L^2 -нормы, и мы численно получили оптимальный порядок сходимости. Рисунок 3 показывает оценки ошибки (при фиксированном $h = 1/25$) в L^2 для $\theta = 1/2$ (слева) и $\theta = 3/4$ (справа). Для $\theta = 1/2$ оценка ошибки имеет вид $\mathcal{O}(\delta^{3/2})$ для L^2 -нормы, для $\theta = 3/4$ ошибка имеет вид $\mathcal{O}(\delta)$ для L^2 -нормы. Эти результаты находятся в соответствии с нашим теоретическим анализом.

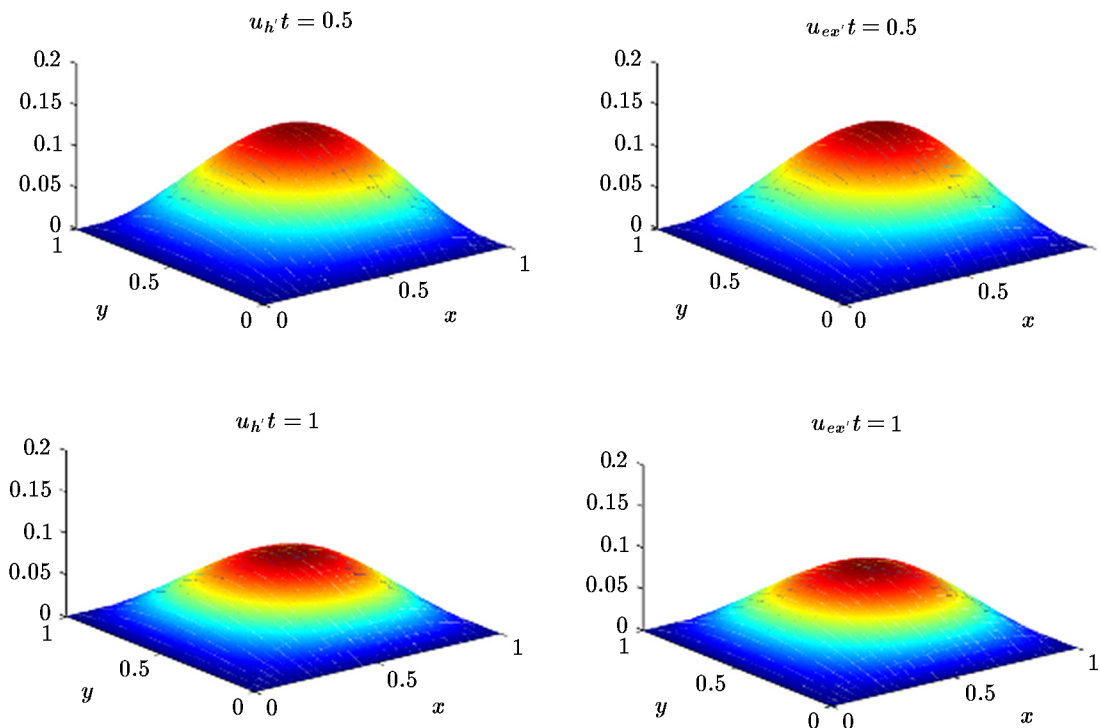


Рис. 1. Эволюция точного и приближенного решений

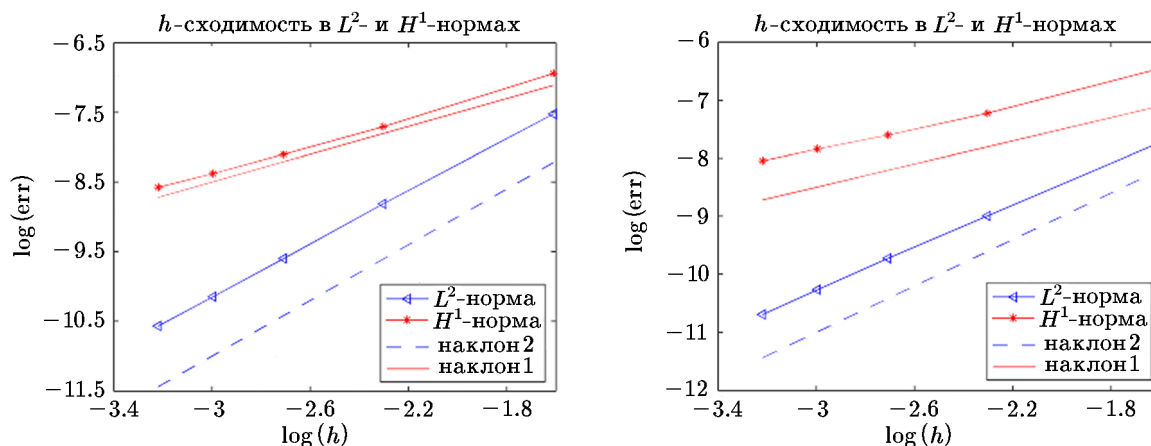


Рис. 2. L^2 - и H^1 -ошибки для $\theta = 1/2 + \delta$ (слева) и $\theta = 3/4$ (справа)

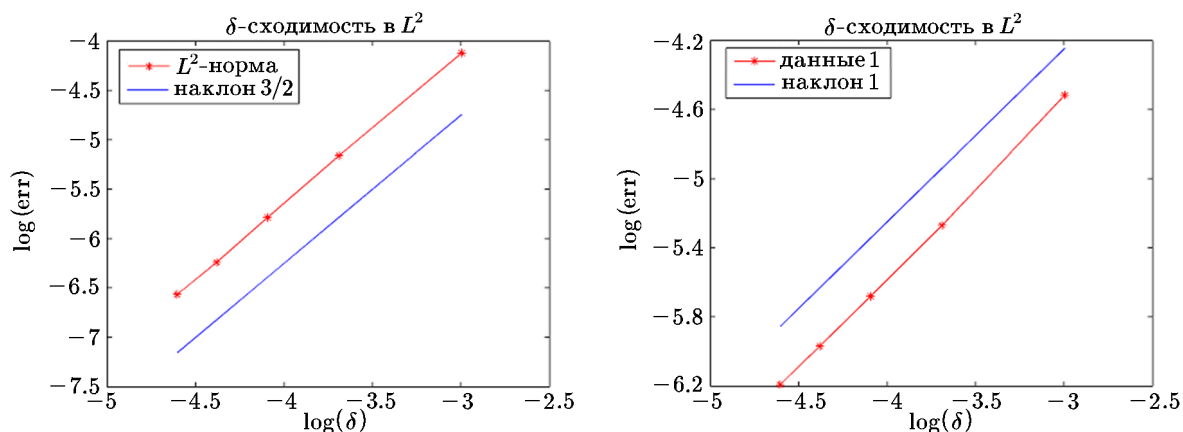


Рис. 3. L^2 -ошибка для $\theta = 1/2 + \delta$ (слева) и $\theta = 3/4$ (справа)

Выводы

Представлен и проанализирован линейризованный θ -метод конечных элементов Галеркина для нелокальных задач типа Кирхгофа; анализ был проведен для $\theta \in [1/2, 1)$. Мы доказали L^2 оценки и энергетические ошибки с использованием условий, достаточных для точного решения для различных значений θ . Мы также представили некоторые численные эксперименты в среде Matlab. Наши численные результаты подтверждают теоретический анализ. Результаты, полученные в данной статье, являются основой для развития численных методов на основе конечных элементов для более общих и сложных нелокальных задач (как стационарных, так и эволюционных).

Литература

1. **Chipot M. and Lovat B.** Some remarks on non local elliptic and parabolic problems // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. — 1997. — Vol. 30, № 7. — P. 4619–4627.
2. **Chipot M.** The diffusion of a population partly driven by its preferences // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 2000. — Vol. 155, № 3. — P. 237–259.
3. **Mbehou M.** The Euler–Galerkin finite element method for nonlocal diffusion problems with a p-Laplace-type operator // *Applicable Analysis*. — 2018. — DOI: 10.1080 / 00036811.2018.1445227.
4. **Mbehou M., Maritz R., and Tchepmo P.** Numerical analysis for a nonlocal parabolic problem // *East Asian J. on Applied Mathematics*. — 2016. — Vol. 6, № 4. — P. 434–447.
5. **Lions J.** On some questions in boundary value problems of mathematical physics // *North-Holland Mathematics Studies*. — 1978. — Vol. 30. — P. 284–346.
6. **Arosio A. and Panizzi S.** On the well-posedness of the Kirchhoff string // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1996. — Vol. 348, № 1. — P. 305–330.
7. **Mbehou M.** Finite element method for nonlocal hyperbolic-parabolic problems of Kirchhoff–Carrier type in domains with moving boundary. — (Under review).
8. **Ono K.** On global solutions and blow-up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. — 1997. — Vol. 216, № 1. — P. 321–342.
9. **Srivastava V., Chaudhary S., Kumar V.S., and Srinivasan B.** Fully discrete finite element scheme for nonlocal parabolic problem involving the Dirichlet energy // *J. of Applied and Computing*. — 2017. — Vol. 53, № 1-2. — P. 413–443.

10. **Alves C., Corrêa F., and Figueiredo G.** On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth // *Differ. Equ. Appl.* — 2010. — Vol. 2, № 3. — P. 409–417.
11. **Thomé V.** Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems // *Computational Science & Engineering.* — Springer, 1984. — (Lect. Notes in Mathematics; 1054).
12. **Djoko J., Lubuma J., and Mbehou M.** On the numerical solution of the stationary power-law Stokes equations: A penalty finite element approach // *J. of Scientific Computing.* — 2016. — Vol. 69, № 3. — P. 1058–1082.
13. **Douglas J.Jr., Dupont T.** Galerkin methods for parabolic equations // *SIAM J. on Numerical Analysis.* — 1970. — Vol. 7, № 4. — P. 575–626.
14. **Ammi M.R.S. and Torres D.F.** Numerical analysis of a nonlocal parabolic problem resulting from thermistor problem // *Mathematics and Computers in Simulation.* — 2008. — Vol. 77, № 2. — P. 291–300.
15. **Mbehou M.** The theta-Galerkin finite element method for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* — 2018. — Vol. 41, № 4. — P. 1480–1491.
16. **Heywood J.G. and Rannacher R.** Finite-element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. Part IV: Error analysis for second-order time discretization // *SIAM J. on Numerical Analysis.* — 1990. — Vol. 27, № 2. — P. 353–384.
17. **Luskin M., Rannacher R., and Wendland W.** On the smoothing property of the Crank-Nicolson scheme // *Applicable Analysis.* — 1982. — Vol. 14, № 2. — P. 117–135.
18. **Ciarlet P.** *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* — Amsterdam: North Holland, 1978.

Поступила в редакцию 23 августа 2017 г.

После исправления 17 мая 2018 г.

Принята к печати 7 мая 2019 г.

