

**МЕТОД РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО ПОТОКА
И ЕГО ДИВЕРГЕНЦИИ В ОБЛАСТЯХ СО СТУПЕНЧАТЫМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ И СОСТАВА**

В. М. Овсянников, Г. А. Турский

(Москва)

Предлагается приближенный метод, позволяющий вычислять радиационный поток и его дивергенцию при сложной зависимости сечения поглощения от длины волны. Рассеяние излучения не учитывается. Метод изложен для случая, когда область, занятую излучающим и поглощающим газом, можно разбить на конечное число подобластей, в которых температура и химический состав постоянны. Приведены примеры численных расчетов радиационного потока.

1. Радиационный поток тепла от плоского слоя. В задачах радиационной газовой динамики необходимо совместно с основной системой уравнений движения решать уравнение переноса излучения, интегрирование которого дает выражения для радиационного потока тепла и его дивергенции. Для плоского излучающего слоя газа, считая температуру и состав зависящими только от поперечной координаты y , имеем для радиационного потока тепла к поверхности тела ($y = 0$) следующее выражение [1,2]:

$$q_w = 2\pi \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda \int_0^{t_\lambda(\Delta)} B_\lambda(y) E_2[t_\lambda(y)] dt_\lambda(y), \quad t_\lambda(y) = \int_0^y k_\lambda dy' \quad (1.1)$$

Здесь предполагается, что с внешней стороны излучение на слой не падает, Δ — толщина слоя, $t_\lambda(y)$ — оптическое расстояние точки с координатой y от поверхности слоя, принятой за начало отсчета координаты, $E_n(t)$ — интегральная показательная функция n -го порядка ($n = 1, 2, 3$), B_λ — функция равновесного излучения Планка, $(\Delta\lambda)$ — интервал длин волн, в котором необходимо учитывать излучение, k_λ — приведенный объемный коэффициент поглощения с учетом вынужденного испускания, зависящий от температуры, давления и концентраций компонент.

Таким образом, оптическое расстояние t_λ может быть вычислено только после того, как будет известно газодинамическое поле. В реальных задачах k_λ является быстро осциллирующей функцией от длины волны λ , поэтому вычисление интеграла по λ в (1.1) трудоемко.

Предлагаемый метод основывается на следующих двух преобразованиях.

1. Заменяем в излучающем слое непрерывные распределения температуры T , давления p и молярных концентраций компонент x_i ступенчатыми, разбив излучающий слой на κ элементарных слоев с толщинами $(\Delta y)_j$ ($j = 1, \dots, \kappa$), внутри которых T , p , x_i постоянны (фиг. 1). Вынужденность и естественность этого преобразования определяются следующими соображениями:

а) в настоящее время нет подробных таблиц для функций $k_\lambda(T, p, x_i)$ от многих переменных, а существует набор функций $k_\lambda(T, p)$ от λ для некоторых равновесных смесей с достаточно крупным шагом по температуре и давлению;

б) кроме того, решения многих задач газовой динамики могут иметь в действительности профили T , p и x_i , близкие к ступенчатым.

2. Аппроксимируем интегралы I_n

$$I_n(t) = n \int_0^t E_n(t) dt = 1 - nE_{n+1}(t) \quad (n = 1, 2) \quad (1.2)$$

$$I_0 = \int_0^t e^{-t} dt = 1 - e^{-t}$$

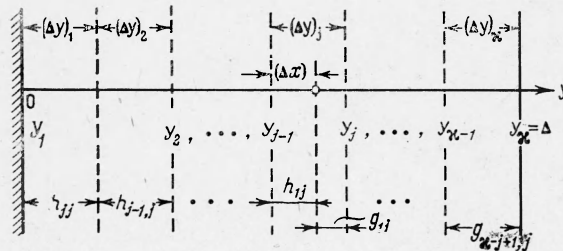
следующим образом:

$$\begin{aligned} I_n(t) &= S_{nv} = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_v t^v && \text{при } t \leq t_{(v)} \\ I_n(t) &= 1 && \text{при } t > t_{(v)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для иллюстрации приводим формулы аппроксимирующих полиномов S_{0v} , S_{1v} , S_{2v} , соответствующих I_0 , I_1 , I_2 с числом членов $v = 1, 2, 3$.

$S_{01} = 0.69t$	$(t_{(v)} = 1.44, \varepsilon = 0.31)$
$S_{02} = 0.8696t - 0.189t^2$	$(t_{(v)} = 2.3, \varepsilon = 0.14)$
$S_{03} = 0.93t - 0.29t^2 + 0.03t^3$	$(t_{(v)} = 4, \varepsilon = 0.097)$
$S_{11} = 3.3t$	$(t_{(v)} = 0.29, \varepsilon = 0.92)$
$S_{12} = 3.3t - 2.72t^2$	$(t_{(v)} = 0.6, \varepsilon = 0.45)$
$S_{13} = 3.3t - 4.65t^2 + 2.25t^3$	$(t_{(v)} = 1.1, \varepsilon = 0.18)$
$S_{21} = 1.22t$	$(t_{(v)} = 0.81, \varepsilon = 0.39)$
$S_{22} = 1.56t - 0.6084t^2$	$(t_{(v)} = 1.3, \varepsilon = 0.22)$
$S_{23} = 1.84t - 1.376t^2 + 0.368t^3$	$(t_{(v)} = 1.8, \varepsilon = 0.113)$

Здесь в скобках указаны значения $t_{(v)}$ и значения относительной погрешности аппроксимации ε .



Фиг. 1

Для функции I_2 коэффициенты a_s выбираются так, чтобы относительная погрешность аппроксимации при $t \leq t_{(v)}$ была минимальной. Заметим, что уже при небольших степенях полиномов ($v = 2 \div 3$) точность такой аппроксимации вполне удовлетворительная, а с увеличением v погрешность этой аппроксимации может быть сделана сколь угодно малой. На фиг. 2 сплошной линией изображен график функции $I_2(t)$, а штриховыми — ее аппроксимации при $v = 1, 2, 3$. Для простоты изложения метода будем рассматривать только случай, когда поглощение обусловлено связанно-связанными и связанно-свободными переходами. Тогда $k_{\lambda j}$, $\sigma_{\lambda j}$ и число частиц в единице объема N_j в слое j будут связаны соотношением

$$k_{\lambda j} = N_j \sigma_{\lambda j}$$

Свободно-свободные переходы, дающие вклад в k_λ , пропорциональный произведению концентраций ионов и электронов, легко могут быть учтены при небольшом видоизменении метода.

Обозначим через $(\Delta t_\lambda)_j$ и $t_{\lambda i}$ соответственно оптическую толщину одного элементарного слоя j и суммы из i элементарных слоев от первого до i -го включительно, через n_j — число частиц в j -м слое, приходящееся на единицу площади поверхности $y = 0$

$$t_{\lambda i} = \sum_{j=1}^i (\Delta t_\lambda)_j, \quad (\Delta t_\lambda)_j = n_j \sigma_{\lambda j}, \quad n_j = (\Delta y)_j N_j \quad (1.4)$$

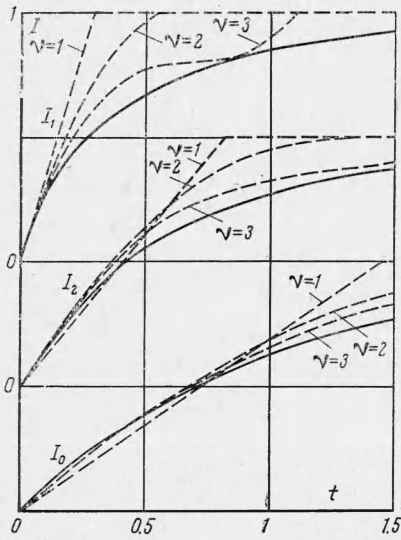
Формулу (1.1) с учетом первого преобразования можно представить так:

$$q_w = \sum_{j=1}^{\kappa} z_j \pi B(T_j) = \sum_{j=1}^{\kappa} z_j \sigma^* T_j^4 \quad (1.5)$$

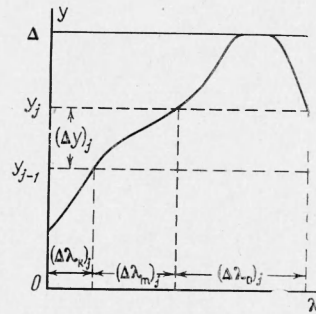
$$z_j = \int_{(\Delta \lambda)} \left[B_{\lambda j} \int_{(\Delta y)_j} E_2(t_\lambda) dt_\lambda \right] d\lambda, \quad B_{\lambda j} = \frac{B_{\lambda j}}{B(T_j)}, \quad B(T_j) = \frac{\sigma^*}{\pi} T_j^4 \quad (1.6)$$

Здесь выражение $\pi B(T_j)$ ($j = 1, \dots, \kappa$) равно радиационному потоку тепла от излучающего абсолютно черного слоя с температурой T_j , а коэффициент $z_j \leq 1$ ($j = 1, \dots, \kappa$) учитывает отличие слоя от абсолютно черного и ослабление этого излучения в слоях 1, 2, ..., $j-1$, σ^* — постоянная Стефана — Больцмана.

Для первого слоя z_1 имеет смысл степени черноты этого слоя.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим график (фиг. 3) функции $y_{(\nu)}(\lambda)$, заданной в неявном виде на плоскости λy

$$\int_0^{y_{(\nu)}} \sigma_\lambda(y) N(y) dy = t_{(\nu)}$$

где $t_{(\nu)}$ фиксировано. Кривая $y = y_{(\nu)}(\lambda)$ представляет собой геометрическое место точек, удаленных от стенки ($y = 0$) на одно и то же оптическое расстояние $t_{(\nu)}$, и разбивает всю область $((\Delta \lambda), 0 \leq y \leq \Delta)$ на две: в одной $t_\lambda \leq t_{(\nu)}$, а в другой $t_\lambda > t_{(\nu)}$. Для учета излучения, которое приходит на

стенку от слоя с номером j , выделенного на фиг. 3, разделим всю рассматриваемую область длин волн $(\Delta\lambda)$ для каждого слоя j на три: $(\Delta\lambda_k)_j$, $(\Delta\lambda_m)_j$, $(\Delta\lambda_0)_j$ такие, что

$$\begin{aligned} \lambda \in (\Delta\lambda_k)_j, & \text{ если } t_{(v)} \leq t_{\lambda, j-1} \\ \lambda \in (\Delta\lambda_m)_j, & \text{ если } t_{\lambda, j-1} < t_{(v)} < t_{\lambda j} \\ \lambda \in (\Delta\lambda_0)_j, & \text{ если } t_{\lambda j} \leq t_{(v)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Область $(\Delta\lambda_k)_j$ не дает вклада в радиационный поток к стенке от слоя j , так как излучение на этих длинах волн ввиду аппроксимации интегралов (1.3) полностью поглотится лежащими ближе к телу слоями ($i = 1, \dots, \dots, j - 1$). Заметим, что $(\Delta\lambda_k)_1 = 0$, так как весь график функции $y = y_{(v)}(\lambda)$ лежит выше оси λ . Из области длин волн $(\Delta\lambda_m)_j$ до стенки дойдет только излучение от той части слоя $(\Delta y)_j$, для которой $y < y_{(v)}$. Из области $(\Delta\lambda_0)_j$ на стенку попадает излучение от всех точек слоя $(\Delta y)_j$. Заметим, что учет реального спектра поглощения даст, вообще говоря, неоднозначную функцию $\lambda = y_{(v)}^{-1}(y)$ в слое $(\Delta y)_j$.

Поэтому некоторые из областей $(\Delta\lambda_k)_j$, $(\Delta\lambda_m)_j$, $(\Delta\lambda_0)_j$ или все будут состоять из большого числа отрезков.

Используя приближение (1.3) и разбиение $(\Delta\lambda)$ (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_l &= 2 \int_{(\Delta y)_l} E_2 dt_\lambda \quad (l = 1, \dots, \kappa; j = 2, \dots, \kappa) \\ \Phi_1 &= \sum_{s=1}^v a_s (\Delta t_\lambda)_1^s \text{ для } \lambda \in (\Delta\lambda_0)_1 \\ \Phi_1 &= 1 \quad \text{для } \lambda \in (\Delta\lambda_m)_1 \\ \Phi_j &= \sum_{s=1}^v a_s \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s}{k} t_{\lambda, j-1}^k (\Delta t_\lambda)_j^{s-k} \text{ для } \lambda \in (\Delta\lambda_0)_j \\ \Phi_j &= 1 - \sum_{s=1}^v a_s t_{\lambda, j-1}^s \quad \text{для } \lambda \in (\Delta\lambda_m)_j \\ \Phi_j &= 0 \quad \text{для } \lambda \in (\Delta\lambda_k)_j \\ & \left(\binom{s}{k} - \text{биномиальные} \right) \\ & \left(\binom{s}{k} - \text{коэффициенты} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Окончательно для коэффициентов z_j ($j = 1, \dots, \kappa$), (1.6) учитывая (1.8) и (1.4), получаем

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{s=1}^v a_s n_1^s M^{(1s0)} + M^{(100)} \\ z_j &= \sum_{s=1}^v a_s \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s}{k} n_j^{s-k} \sum_{i_1=1}^{j-1} \dots \sum_{i_k=1}^{j-1} n_{i_1} \dots n_{i_k} M_{i_1, \dots, i_k}^{(jsk)} + M^{(j00)} - \\ & - \sum_{s=1}^s a_s \sum_{i_1=1}^{j-1} \dots \sum_{i_s=1}^{j-1} n_{i_1} \dots n_{i_s} M_{i_1, \dots, i_s}^{(jss)} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$M_{i_1, \dots, i_k}^{(jsk)} = \int_{(\Delta\lambda_0)_j} B_{\lambda_j}^\circ \sigma_{\lambda_{i_1}} \dots \sigma_{\lambda_{i_k}} \sigma_{\lambda_j}^{s-k} d\lambda \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} M^{(j00)} &= \int_{(\Delta\lambda_m)_j} B_{\lambda_j}^\circ d\lambda_j \quad M_{i_1, \dots, i_s}^{(jss)} = \int_{(\Delta\lambda_m)_j} B_{\lambda_j}^\circ \sigma_{\lambda_{i_1}} \dots \sigma_{\lambda_{i_s}} d\lambda \\ (j &= 1, \dots, \kappa; i_1 = 1, \dots, j-1; s = 1, \dots, v; a = 0, \dots, s-1) \end{aligned}$$

При $k = 0$ произведение $\sigma_{\lambda i_1} \dots \sigma_{\lambda i_k}$ в интегралах M исчезает. В задаче с двумя излучающими слоями ($\kappa = 2$) нижние индексы i_1, \dots, i_k могут принимать только одно значение, равное единице. В этих задачах нижние индексы у M могут быть опущены.

Интегралы $M^{(j sk)}$ зависят в общем случае от температуры, числа частиц и состава смеси в элементарных слоях (Δy) . Они являются аналогами среднего коэффициента поглощения Планка k_p

$$k_p = \int_{(\Delta \lambda)} k_\lambda B_\lambda^\circ d\lambda = N \int_{(\Delta \lambda)} B_\lambda^\circ \sigma_\lambda d\lambda$$

и несут в себе информацию об оптических свойствах слоев (Δy)

При $s = k = 1$ и $t_\lambda \leq t_{(v)}$ для всех $\lambda \in (\Delta \lambda)$ интеграл $M^{(j sk)}$ представляет собой величину

$$M^{(j 11)} = \int_{(\Delta \lambda)} B_\lambda^\circ \sigma_\lambda d\lambda$$

пропорциональную коэффициенту k_p . Введение среднего коэффициента поглощения Планка позволяет избавиться от интегрирования по λ при решении задач в предельном случае оптически тонкой излучающей области. Введение интегралов $M^{(j sk)}$ позволяет это сделать при любой оптической толщине излучающего слоя.

Если интегралы $M^{(j sk)}(n_1, \dots, n_j)$ известны для значения $t_{(v)} = \tau$, то для другого значения $t_{(v)} = \tau_*$ соответствующие интегралы, которые обозначим через $M_*^{(j sk)}(n_1, \dots, n_j)$, получаются пересчетом из интегралов $M^{(j sk)}$ путем изменения масштаба переменных n_1, \dots, n_j

$$M_*^{(j sk)}(n_1, \dots, n_j) = M^{(j sk)}(n_1 \tau_* / \tau, \dots, n_j \tau_* / \tau) \quad (1.11)$$

2. Дивергенция радиационного потока тепла в плоском слое. Выражение для дивергенции радиационного потока во внутренней точке плоского слоя имеет вид [2]

$$\operatorname{div} q(y) = \int_{(\Delta \lambda)} d\lambda k_\lambda(y) \left\{ \int_0^{t_\lambda(\Delta)} 2\pi B_\lambda(v) E_1[|t_\lambda(v) - t_\lambda(y)|] dt_\lambda(v) - 4\pi B_\lambda(y) \right\} \quad (2.1)$$

Здесь предполагается, что с внешних сторон на слой излучение не падает.

Отличие от случая вычисления радиационного потока к стенке q_w состоит в том, что $\operatorname{div} q(y)$ надо вычислять в точках, являющихся внутренними точками элементарных слоев $(\Delta y)_j$.

Разделим излучающий слой на элементарные слои $(\Delta y)_j$ ($j = 1, \dots, \kappa$) согласно первому преобразованию п. 1.

Вычислим функцию $\operatorname{div} q(y)$ в точке $y \in (\Delta y)_j$, расположенной на расстоянии (Δx) от точки y_{j-1} . Введем новое обозначение элементарных слоев, применяя для нумерации греческие буквы

$$\xi_{\alpha j} = \begin{cases} (\Delta y)_j - (\Delta x) & \text{для } \alpha = 1 \\ (\Delta y)_{\alpha+j-1} & \text{для } \alpha = 2, \dots, \kappa - j + 1 \end{cases}$$

$$h_{\beta j} = \begin{cases} (\Delta x) & \text{для } \beta = 1 \\ (\Delta y)_{j-\beta+1} & \text{для } \beta = 2, \dots, j \end{cases}$$

Новая нумерация указана в нижней части фиг. 1. Формула (2.1) для $y \in (\Delta y)_j$ принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q(y) &= 2\pi \sum_{\alpha=1}^{x-j+1} w_{\alpha j} B(T_{\alpha}) + 2\pi \sum_{\beta=1}^j w_{\beta j}^{\circ} B(T_{\beta}) - 4u_j B(T_j) \\ w_{\alpha j} &= \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_{\lambda\alpha}^{\circ} N_j \sigma_{\lambda j} \int_{g_{\alpha j}} E_1[t_{\lambda}(g)] dt_{\lambda}(g) \\ w_{\beta j}^{\circ} &= \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_{\lambda\beta}^{\circ} N_j \sigma_{\lambda j} \int_{h_{\beta j}} E_1[t_{\lambda}(h)] dt_{\lambda}(h), \quad u_j = N_j \int_{(\Delta\lambda)} B_{\lambda j}^{\circ} \sigma_{\lambda j} d\lambda \end{aligned}$$

Здесь введены новые координаты g и h , обозначающие расстояние текущей точки y' от точки y , в которой вычисляется $\operatorname{div} q(y)$

$$g = y' - y \quad \text{для } y' > y; \quad h = y - y' \quad \text{для } y > y'$$

Коэффициенты a_s в представлении I_1 в виде (1.3) обозначим через a'_s . Коэффициенты a'_s выбирались так, чтобы на интервале $(t_{(m)})$, $(t_{(v)})$ полином аппроксимировал I_1 с минимальной относительной погрешностью ε . Значения a'_s , ε , $t_{(v)}$ приведены в п. 1 для начала интервала аппроксимации $t_{(m)} = 0.05$. На фиг. 2 сплошной линией нанесена точная функция $I_1(t)$, а штриховыми линиями — ее аппроксимации.

Окончательно получим

$$\begin{aligned} w_{1j} &= \sum_{s=1}^v a'_s n_{(\alpha=1)}^s N_j M^{(1s0j)} + N_j M^{(100j)} \\ w_{\alpha j} &= \sum_{s=1}^v a'_s \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s}{k} N_j n_{\alpha}^{s-k} \sum_{\alpha_1=1}^{x-j} \dots \sum_{\alpha_k=1}^{x-j} n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_k} M_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{(\alpha skj)} + N_j M^{(\alpha 00j)} - \\ &\quad - \sum_{s=1}^v a'_s \sum_{\alpha_1=1}^{x-j} \dots \sum_{\alpha_s=1}^{x-j} N_j n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_s} M_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^{(\alpha s s j)} \\ u_j &= N_j M_{(\Delta\lambda)}^{(j00j)}, \quad w_{1j}^{\circ} = \sum_{s=1}^v a'_s n_{(\beta=1)}^s N_j M^{(1s0j)} + N_j M^{(100j)} \\ w_{\beta j}^{\circ} &= \sum_{s=1}^v a'_s \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s}{k} N_j n_{\beta}^{s-k} \sum_{\beta_1=1}^{j-1} \dots \sum_{\beta_k=1}^{j-1} n_{\beta_1} \dots n_{\beta_k} M_{\beta_1, \dots, \beta_k}^{(\beta skj)} + N_j M^{(\beta 00j)} - \\ &\quad - \sum_{s=1}^v a'_s \sum_{\beta_1=1}^{j-1} \dots \sum_{\beta_s=1}^{j-1} N_j n_{\beta_1} \dots n_{\beta_s} M_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{(\beta s s j)} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_{i_1, \dots, i_k}^{(iskj)} &= \int_{(\Delta\lambda_0)_{ij}} B_{\lambda i}^{\circ} \sigma_{\lambda i_1} \dots \sigma_{\lambda i_k} \sigma_{\lambda j}^{s-k} d\lambda, \quad M_{(\Delta\lambda)}^{(j00j)} = \int_{(\Delta\lambda)} B_{\lambda j}^{\circ} \sigma_{\lambda j} d\lambda \\ M^{(i00j)} &= \int_{(\Delta\lambda_m)_{ij}} B_{\lambda i}^{\circ} \sigma_{\lambda j} d\lambda, \quad M_{j_1, \dots, j_s}^{(issj)} = \int_{(\Delta\lambda_m)_{ij}} B_{\lambda i}^{\circ} \sigma_{\lambda i_1} \dots \sigma_{\lambda i_s} d\lambda \\ &\quad (i_l = \alpha_1, \dots, \alpha_{x-j+1}, \beta_1, \dots, \beta_j) \end{aligned}$$

Индекс i вычисляется по значению α или β по формулам

$$i = j + \alpha - 1, \quad i = j - \beta + 1$$

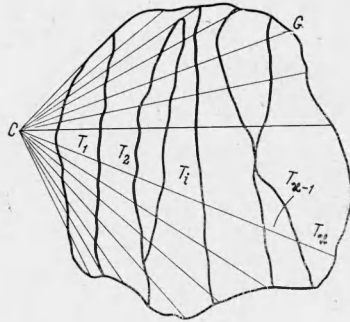
Области интегрирования $(\Delta\lambda_0)_{ij}$ и $(\Delta\lambda_m)_{ij}$ определяются равенствами, аналогичными (1.7), с учетом оптического расстояния от y_i до y .

3. Пространственный перенос излучения. Идеи преобразований п. 1 не связаны с размерностью пространства, заполненного излучающим газом, поэтому метод пригоден для вычисления радиационного потока и его дивергенции в двухмерных и трехмерных задачах переноса излучения. Рассмотрим для простоты случай вычисления радиационного потока к площадке, расположенной в точке C , от области G , содержащей однокомпонентный газ.

Для простоты изложения распределение температуры вдоль каждого луча, проходящего через точку C и пересекающего область G (фиг. 4), будем считать монотонным. Радиационный поток тепла к единичной площадке за единицу времени будет даваться следующим выражением [1]:

$$q_w = \int_{(\omega)} d\omega \cos \theta \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda \int_{r_0(\omega)}^{r_1(\omega)} B_\lambda(r, \omega) \exp[-t_\lambda(r, \omega)] dt_\lambda(r, \omega)$$

Здесь ω — направление луча, θ — угол между направлением луча и нормалью к рассматриваемой площадке, расположенной в точке C , r — расстояние от точки C до текущей точки вдоль луча, $r_0(\omega)$ и $r_1(\omega)$ — расстояния от точки C вдоль луча с направлением ω соответственно до ближней и дальней частей границы.



Фиг. 4

Разобьем область G изотермами на x элементарных слоев, как указано на фиг. 4, и заменим согласно первому преобразованию п. 1 непрерывное распределение $T(r, \omega)$ ступенчатым, так что в каждом элементарном слое температура будет считаться постоянной. Тогда

$$q_w = \int_{(\omega)} d\omega \cos \theta \sum_{j=1}^x z_j(\omega) B(T_j),$$

$$z_j(\omega) = \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_{\lambda_j}^\circ \int_{(\Delta r)_j} \exp(-t_\lambda) dt_\lambda$$

Согласно второму преобразованию п. 1 представим функцию $I_0(t)$ в виде (1.3). Коэффициенты полинома a_s , которые будем обозначать через a_s'' , приведены в п. 1. На фиг. 2 сплошной линией нанесена $I_0(t)$, а штриховыми линиями — ее аппроксимации. Тогда получим для $z_j(\omega)$ формулы, совпадающие с (1.9), если в них заменить постоянные коэффициенты a_s на a_s'' , а число частиц в элементарных слоях n_i рассматривать как функции угла ω . Интегралы $M^{(j,sk)}$ вычисляются по формулам (1.10) и зависят от значений $n_1(\omega), \dots, n_j(\omega)$ для выбранного направления ω и величины $t_{(v)}$.

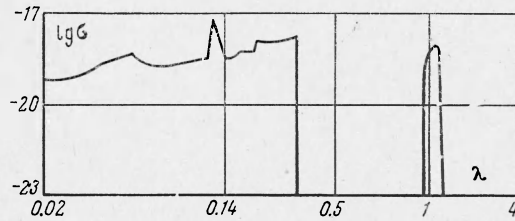
4. Примеры численных расчетов.

Так как число молекул n в реальных задачах очень велико, а сечения σ_λ малы, то для вычислений по формулам типа (1.9) удобно произвести нормировку n_i и интегралов M введением величин

$$n_i^\circ = n_i / K, \quad M^{(j,sk)} = K^s M^{(j,sk)} \quad (4.1)$$

В численных расчетах использовались следующие размерности: см^2 для σ , см^{-2} для n , $K = 10^{18}$.

Пример 1. Вычислим радиационный поток, падающий на стенку от плоских слоев газа с толщинами, меняющимися в пределах от 0.1 до 10 см с одной и той же температурой 13 000° К и давлением 1 атм. Зависимость сечения σ_λ газа от длины волны представлена на фиг. 5 (σ , см^2 ; λ , мк). Решение проводилось с использованием аппроксимации функции $I_2(t)$ полиномом второй степени, обеспечивающей точность 22%.

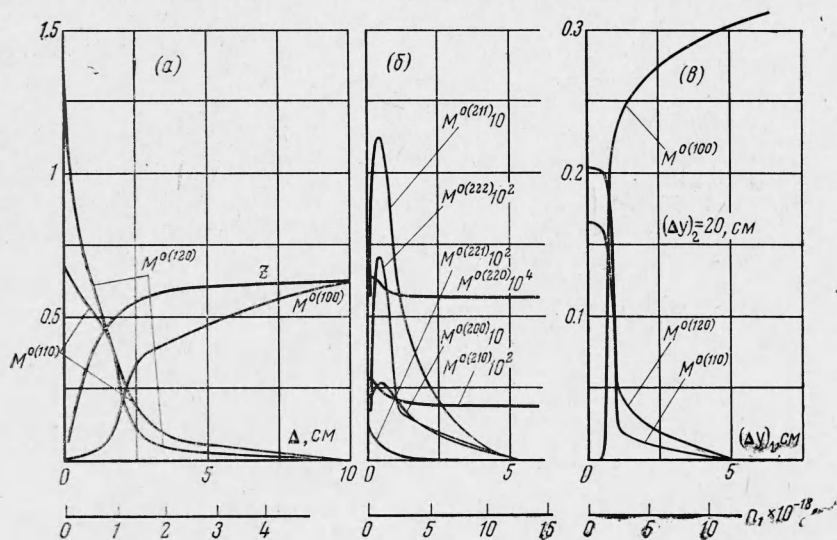


Фиг. 5

При $n = 0.057 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-2}$, что соответствует $\Delta = 0.1 \text{ см}$, в рассматриваемых условиях получено

$$M^{(110)} = 0.684, \quad M^{(120)} = 1.48, \quad M^{(100)} = 0$$

Обращение в нуль $M^{(100)}$ позволяет заключить, что интервал длин волн $(\Delta\lambda_m)_z$ в котором оптическая толщина слоя превышает $t_{(v)} = 1.3$, очень мал и не дает замет-



Фиг. 6

ного вклада в радиационный поток. Поэтому при такой и меньшей толщине излучающего слоя с $n \leq 0.057 \cdot 10^{18} \text{ (см}^{-2}\text{)}$, $\Delta \leq 0.1 \text{ (см)}$ радиационный поток может вычисляться по формулам (1.5), (1.9), которые в данном случае дают

$$q_w = \pi Bz = 4.14 \cdot 10^{-13} n - 3.49 \cdot 10^{-31} n^2 \text{ (ккал} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}\text{)}$$

Здесь n выражено в см^{-2} .

При увеличении n и Δ в 100 раз интегралы $M^{(110)}M^{(120)}$ будут монотонно убывающими, а $M^{(100)}$ — монотонно возрастающим. Они приведены на фиг. 6, а.

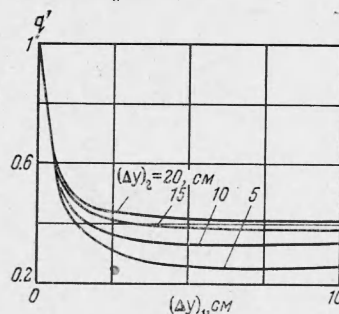
Радиационный поток вычисляется по формулам (1.5), (1.9), а функции $M^{(110)}$, $M^{(120)}$, $M^{(100)}$ определяются при помощи фиг. 6, а и формул (4.1).

Здесь же приводится для различных толщин Δ величина отношения потока от рассматриваемого слоя к потоку абсолютно черного тела с той же температурой $z = q_w/(\pi B)$. При малых $\Delta \sim 0.5 \text{ см}$ величина z увеличивается пропорционально Δ , при больших Δ скорость возрастания z уменьшается и при $4 \text{ см} \leq \Delta \leq 10 \text{ см}$ z стремится асимптотически к значению ≈ 0.62 .

Пример 2. Вычислим радиационный поток к стенке от двух плоских слоев газа: один с $T_1 = 3000^\circ \text{ К}$ и с сечением σ_1 , представленным на фиг. 5, а другой слой воздуха с $T_2 = 14000^\circ \text{ К}$.

Давление $p_1 = p_2 = 1 \text{ атм}$. По формулам п. 1 при $\nu = 2$ получим

$$q_w = \pi B(T_1) [a_1 n_1 M^{(110)} + a_2 (n_1)^2 M^{(120)} + M^{(100)}] + \pi B(T_2) [a_1 n_2 M^{(210)} + a_2 (n_2)^2 M^{(220)} + 2a_2 n_1 n_2 M^{(221)} + M^{(200)} - a_1 n_1 M^{(211)} - a_2 (n_1)^2 M^{(222)}]$$



Фиг. 7

Вычисленные значения интегралов M^0 представлены на фиг. 6, б, в в зависимости от n_1 при постоянном n_2 , соответствующем $(\Delta y)_2 = 20$ см. На фиг. 7 приведена величина ослабления радиационного потока, идущего от слоя 2 за счет поглощения в слое 1

$$q^* = q_w / q_w [(\Delta y)_1 = 0]$$

в зависимости от толщины $(\Delta y)_1$.

Авторы благодарят Э. С. Филиппову за помощь в проведении расчетов.

Поступила 30 VI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. К о н д р а т ь е в К. Я. Перенос длинноволнового излучения в атмосфере. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
2. P a i S. I. Radiation Das Dynamics. Washington — New York, Springer verlag., 1966. (Рус. перев.: Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.)