

УДК 532.526

## **ВЯЗКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЙЛОРА — ГЕРТЛЕРА В СВЕРХЗВУКОВОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУЕ**

**Н.М. ТЕРЕХОВА**

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,  
Новосибирск*

В работе проведено численное моделирование характеристик неустойчивых возмущений Тейлора — Гертлера в сверхзвуковой осесимметричной струе в рамках вязкого приближения теории гидродинамической устойчивости. Выведены основные уравнения для малых колебаний в криволинейной цилиндрической системе координат. Изучены закономерности и особенности характеристических связей разномасштабных вихрей при изменении средних параметров потока. Найдены критические числа Рейнольдса потери устойчивости. Установлено, что крупномасштабные вихри, имеющие меньшие инкременты по сравнению с мелкомасштабными, теряют устойчивость при более низких числах Рейнольдса. Дается трактовка некоторых экспериментальных результатов.

### **ВВЕДЕНИЕ**

В последние годы рядом независимых исследовательских групп экспериментальными методами установлено, что в слое смещения сверхзвуковой осесимметричной неизобарической струи при определенных условиях возникают стационарные или квазистационарные азимутальные неоднородности средних полей потока [1 – 6]. На снимках при достаточно больших выдержках они фиксируются в виде продольных черно-белых полос, а при визуализации поперечных сечений первой бочки высвечивается волнообразная или пилообразная граница сверхзвукового слоя смещения [4 – 6].

При этом, как показано измерениями [1, 2, 4], в холодных затопленных турбулентных струях воздуха при высоких числах Рейнольдса истечения  $Re_d \sim 10^6$  ( $d$  — диаметр сопла) и небольших нерасчетностях  $N$  возникают достаточно большие отклонения от средних значений избыточного полного давления, что означает наличие азимутальных дефектов продольной скорости. В [3] для струй азота, истекающих в разреженное пространство при повышенных (порядка 50) степенях расширения, для  $Re_d > 3000$  установлено наличие подобных же вариаций плотности.

Естественно возникает вопрос о природе этих азимутальных неоднородностей. Наиболее реалистичной представляется гипотеза о возможности появления в слое смещения первой ячейки колебаний, которые можно связать с вращательной или центробежной неустойчивостью. Действительно, рассмотрим действие сил в сжатом слое первой бочки недорасширенной струи (рис. 1). В нем газ движется по искривленным траекториям, обтекая висячий скачок уплотнения (ВСУ) и затормаживаясь в слое смещения  $\delta$ . В этом слое и может возникнуть неустойчивое расслоение, так как частицы газа, находящиеся во внутренних слоях, стремятся, вследствие большей центробежной силы, пере-

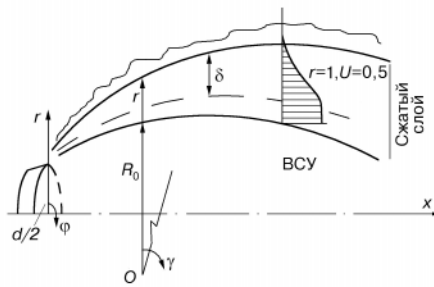


Рис. 1. Схема течения на начальном участке недорасширенной струи.

меститься наружу в области малых скоростей [7]. Центробежная сила, направленная по главной нормали к траектории движения от центра кривизны (гипотетическая точка  $O$  на рисунке), и обеспечивает возможность подобного перемещения. Если это движение не

уравновешивается поперечным градиентом давления, то может возникнуть поперечное перетекание, аналогичное тому, что возникает при течении на вогнутой поверхности (течение Гертлера) или между коаксиальными цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний покоится. Рэлей [8] сформулировал теорему об условии возникновения центробежной или вращательной неустойчивости, один из вариантов которой уместно привести здесь. Неустойчивость возникает, если квадрат абсолютной циркуляции уменьшается с увеличением цилиндрического радиуса  $(r_1 u_1)^2 > (r_2 u_2)^2$ ,  $r_1 < r_2$ , что возможно, если скорость газа при увеличении поперечного расстояния падает сильнее, чем  $1/r$ . Как будет видно далее, это условие в слое смешения выполняется.

На линейной стадии возмущения подобного типа в указанных течениях реализуются как система продольных квазистационарных вихрей. На нелинейной стадии возможно появление спиральных вторичных вихрей и более сложных образований, вид которых определяется конкретными условиями. Нет никакой логической противоречивости в применении подобных рассуждений к свободному сдвиговому слою, и следует ожидать, что подобная неустойчивость, приводящая к появлению либо турбулентности, либо другого типа ламинарного движения, может реализоваться и при свободном истечении на сверхзвуке.

К исследованию этого явления возник определенный интерес, на что указывает значительное число экспериментальных работ, ряд которых цитирован выше. Последнее вполне объяснимо, ибо неординарна сама возможность появления неустойчивости, реализующейся в виде стационарных продольных вихрей, в струйном потоке. Привычными являются представления, что в основе вращательной неустойчивости лежит наличие поверхности с искривлением или изломом, даже если вихри не соприкасаются с ней непосредственно, а лежат на границе застойных зон, как в отрывных течениях. В неизобарических струях подобное искривление траекторий движения газа создается собственными условиями истечения и может иметь место в области смешения потока с внешней затопленной или дозвуковой спутной зоной, которую как бы поджимает ВСУ.

Подтвердить или опровергнуть данную гипотезу можно либо прямыми методами обнаружения трехмерных полей скорости, что должно стать первоочередной задачей экспериментаторов, либо косвенными методами, к которым следует отнести методы математического моделирования. На поставленный перед теорией вопрос — допускают ли уравнения, описывающие неустойчивость в слое смешения сверхзвуковой струи в поле активных центробежных сил, существование стационарных неустойчивых возмущений, — в настоящее время дан однозначный утвердительный ответ.

Центробежная или вращательная неустойчивость, именуемая неустойчивостью Тейлора — Гертлера ( $T - G$ ), теоретически в невязком приближении исследована достаточно хорошо [2, 9 – 12]. Ограничение рамок математиче-

ского моделирования невязким приближением имеет под собой ряд оснований. Во-первых, как известно, в слое смещения струи реализуется средний профиль продольной скорости с перегибом, а значит, неустойчивость такого течения в основном определяется невязкими конвективными эффектами. Во-вторых, в появлении неустойчивости  $T - \Gamma$  главная роль принадлежит центробежным силам, которые учитываются в невязком анализе, а потому естественно предположить, что действие остальных сил вторично. И действительно, моделирование устойчивости слоя смещения неизобарической струи с учетом эффектов искривления в рамках невязкого анализа показало, что в нем могут иметь место квазистационарные волны, которые полностью определяются наличием данных сил. Таким образом, установлено, что в струе могут реализоваться неустойчивость  $T - \Gamma$  и продольно-вихревое движение.

Возникает вопрос, какие характеристики, полученные расчетным путем, можно сопоставить с опытными данными. Представляется, что на данном этапе наиболее информативными могут быть коэффициенты продольного усиления колебаний (инкременты). Как показал анализ работ [1 – 4], измерениями всегда фиксируются в той или иной степени нерегулярные по азимутальному углу эпюры измеряемых величин, что говорит о сложном многомодовом составе возмущений. Поэтому для получения поперечных эпюр колебаний расчетным путем и сравнения их с опытными необходимо иметь достоверную информацию о спектральном составе сигнала. В настоящее время такой спектральный анализ проведен только в работах [1, 2], которые дают некоторые предпосылки для обоснования рассматриваемой гипотезы. Все остальные работы можно использовать только как информативные качественные данные, в какой-то мере дополняющие эти результаты. Последнее является осложняющим обстоятельством, так как во все измерения [1, 2], проведенные для струй, истекающих в режиме развитой турбулентности и зашумленности, изначально заложены специфические особенности, которых лишены ламинарные или предтурбулентные струи [3]. К сожалению, авторы работы [3] не провели такой спектральный анализ своих данных.

Общим для всех рассматриваемых работ является факт усложнения состава сигнала с ростом числа Рейнольдса истечения. Как видно из снимков [5, 6], при невысоких  $Re_d$  число азимутальных “зубков” небольшое и оно возрастает с увеличением  $Re_d$ . То же самое фиксируют измерения [3]. В опытах [1, 2] сигнал всегда достаточно сложный.

Пока противоречивы данные о местоположении азимутальных неоднородностей. В [1, 2, 4] они зафиксированы только в слое смещения и не обнаружены в области сжатого слоя от ВСУ до внутренней границы слоя  $\delta$  при любых достаточно высоких значениях числа Рейнольдса истечения; в то же время авторы [3] утверждают, что с ростом  $Re_d$  может деформироваться не только эта область, но и сам ВСУ. По-видимому, это различие можно связать с особенностями [3], присущими истечению в разреженное пространство при повышенных нерасчетностях, что само по себе может интенсифицировать процесс.

Также пока неясна эволюция сигнала после прямого скачка (диска Маха). В [1, 2] показано, что после прохождения тройной точки в потоке остаются лишь следы ранее интенсивных колебаний, тогда как из снимков [6] следует, что ни число “зубков”, ни их интенсивность не меняются. Это логично объяснить различием характера реализуемых режимов. В [1, 2] струи заведомо турбулентны, перемешиваемость в них повышена, в [6] они скорее всего ламинарны.

Итак, после детального анализа имеющихся опытных результатов приступим к обсуждению математического описания. В рамках невязкого анализа [2, 10] показаны качественное соответствие порядка инкрементов невысоких азимутальных мод, реализуемых в [1, 2], и воспроизводимость азимутальной развертки сигнала избыточного полного давления. Но вместе с тем был об-

наружен ряд факторов, которые в невязком приближении не адекватны экспериментам.

Главный из них — наблюдаемое быстрое разрушение высокомолекулярных составляющих в процессе растекания струи, в то время как расчеты в рамках невязкого приближения показывают, что инкременты мелкомасштабных компонент последовательно возрастают увеличением номера моды, а потому по теории эти составляющие должны нарастать более интенсивно. Если учесть сравнительно сильное уменьшение инкрементов и перестройку волновых конфигураций этих мод с ростом толщины слоя смещения [11, 12], то можно лучше описать реальную динамику возмущений. Однако и это не позволяет считать теоретическое описание исчерпывающим, так как существует ряд физических процессов, которые нужно принять во внимание для правильного отражения спектральных характеристик возмущений. Среди них выделим три главные. Это диссипативное влияние вязкости, непараллельность средних полей скорости в первой бочке и нелинейность, приводящая к вторичной неустойчивости продольных вихрей и изменяющая их инкременты. Рассмотрение этих факторов и определяет стратегию теоретических исследований. Невозможно заранее оценить сравнительную значимость каждого из них в общей картине и все их одновременно учесть в расчете. Поэтому предметом данной работы является рассмотрение одного из названных факторов — влияния вязкости, а целью работы — изучение вязкой неустойчивости Тейлора — Гертлера.

Заметим, что нами рассмотрен предельный вариант введения в анализ вязкости, а именно — для несжимаемой жидкости, поскольку для исходно трехмерных возмущений в сверхзвуковом потоке с осевой симметрией (цилиндрические координаты с искривлением в продольном направлении) иначе преодолеть возникающие расчетные трудности просто не удастся. В итоге теоретических изысканий мы будем иметь два предельных решения: первое — в рамках невязкого приближения, и второе — с учетом постоянной вязкости. Следует ожидать, что истинное решение будет находиться между этими предельными подходами.

Не имея в настоящее время достоверных опытных данных, которые можно было бы точно воспроизвести расчетным путем, естественно задаться целью рассмотреть прежде всего качественное влияние вязких сил на устойчивость слоя смещения струи и выявить ту меру общности и те закономерности, которые можно соотнести с его действием. Для этого и был сделан подробный анализ экспериментальных работ.

Оценим количественное влияние факторов, игнорируемых при рассмотрении. Во-первых, в работе не учитывается изменение первой физической (сдвиговой) вязкости поперек слоя смещения. Были рассмотрены умеренные числа Маха  $1 < M_0 < 2$ . При этом для холодных струй реализуются режимы с небольшими изменениями средней статической температуры. Например, для  $M_0 = 1,5$  перепад статических температур поперек слоя, который пропорционален  $1/\rho_0$ , вызывает изменение динамической вязкости на 20 %, и при качественном рассмотрении этим явно можно пренебречь. Во-вторых, не учитывается вторая (объемная) вязкость. Основанием для этого является сравнение двух подходов к расчету спектральных характеристик возмущений для сверхзвукового пограничного слоя — с учетом и без учета второй вязкости [13]. Оказалось, что при прочих равных условиях отличие в инкрементах возмущений для невысоких чисел Маха составляет всего несколько процентов, а на фазовых скоростях и вовсе не сказывается. Вероятно, влияние второй вязкости в задачах устойчивости, по крайней мере для воздуха, не является определяющим. И наконец, самое сильное допущение — игнорируется вязкая диссипация тепла, и вместо уравнения энергии рассмотрено уравнение сохранения энтропии на линии тока, как в невязком случае. Обосновать это упрощение

можно также выбором рассмотренных в работе режимов. При невысоких числах Маха относительный перепад средних скоростей в слое смещения в два и более раза превышает относительный перепад температур, а значит вязкая диссипация динамических характеристик намного больше вязкой диссипации тепловых. Примем это справедливым и для малых возмущений.

Несмотря на большое число упрощений, подобная постановка вполне обоснованна, так как в рассмотрении вводится главный фактор — сдвиговая вязкость. Действие же неучитываемых факторов часто разнонаправленно. Напомним, что методы математического моделирования и служат для того, чтобы, обойдя непреодолимые трудности точного расчета, выявить и отразить основные черты истинного процесса.

Следует учесть, что в рамках невязкого анализа получено несколько семейств, или ветвей, собственных значений, удовлетворяющих краевой задаче, иными словами, показана ее неоднозначность [2, 9, 10]. Установлено, что инкременты возмущений на одной (главной) ветви прямо пропорциональны азимутальному волновому числу, а инкременты возмущений с остальных (добавочных) ветвей не зависят от него. В недавних расчетах [14] нечто аналогичное получено и для невязких бегущих волн в плоском слое сдвига с кривизной. Рассмотрение задачи в более точной редакции может способствовать выяснению природы этих добавочных решений.

#### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Итак, рассмотрен сжатый слой первой бочки осесимметричной затопленной неизобарической струи (см. рис. 1). Его поперечная протяженность — от внешней окрестности ВСУ до границы слоя смещения, а продольная — от ближней окрестности среза сопла до диска Маха. Сами скачки и изменения средних параметров на них не рассматриваются, но принято, что местоположение ВСУ определяет значения радиусов искривления  $R_0$ , а значит и центробежных сил, пропорциональных  $U^2/R_0$ . Продольная протяженность расчетной области выражена через значение толщины слоя смещения  $\delta$ , которое является одним из определяющих параметров. Рассмотренный диапазон  $0,1 < \delta < 0,65$  соответствует реально реализуемым толщинам слоя смещения. Зависимости продольной координаты  $x$  от  $\delta$  определяют так называемые продольные привязки  $x = x(\delta)$ , связанные с характером или режимом истечения. Значения степеней нерасчетности  $N$  не конкретизируются. Взяв достаточно широкий диапазон  $R_0$ , который можно связать с  $N$ . Наиболее реалистичными представляются значения  $5 < R_0 < 25$ . Рассмотрена затопленная холодная струя воздуха с  $\kappa = 1,4$ ,  $\kappa = c_p/c_v$ .

Сам сжатый слой состоит из двух подобластей, разделяемых по характеру поведения избыточного полного давления. Первую из них — от внешней области ВСУ до линии максимального значения избыточного полного давления (штриховая линия на рис.1), по терминологии Авдеевского и др. [15] называют “невязкой” подобластью. В ней происходит восстановление полного давления и небольшое возрастание средней скорости до ее максимального значения, а параметры течения определяются из уравнений для идеального газа. Во второй подобласти происходит плавный переход от параметров на внутренней границе сжатого слоя к параметрам в окружающем пространстве — это и есть слой смещения.

Профили продольной скорости и плотности в первой подобласти приняты постоянными и равными своему максимальному значению. Это базируется как на данных [16], где экспериментально показано, что возрастание средней скорости при небольших нерасчетностях весьма невелико, так и на специфике задачи об устойчивости. В теории гидродинамической устойчивости установлено, что в областях небольшого разгона течение так же устойчиво к малым

возмущениям, как и в однородном потоке без сдвига. Подобное упрощение позволяет сформулировать граничные условия для возмущений оптимальным образом. При осреднении уравнений значения средней скорости  $\bar{U}$  и плотности  $\bar{\rho}_0$  в этом аналоге потенциального ядра приняты как характерные.

В слоях смешения  $\delta$  безразмерные профили продольной средней скорости задаются соотношением

$$U(r) = \exp(-0,693\eta^2) \quad \eta = 2(r - r_1)/\delta, \quad r_1 = 1 - \delta/2. \quad (1)$$

В экспериментальной работе [16] этому вопросу уделяется достаточно много внимания. Там показано, что в слое смешения эпюры продольных средних скоростей хорошо описываются универсальной функцией — так называемым обратным профилем Шлихтинга. Соотношение (1), выведенное для сверхзвуковой расчетной струи, практически совпадает с этой универсальной функцией, но имеет некоторое преимущество в силу того, что лучше описывает сопряжение с затопленной зоной вблизи внешней границы. Как видно, изменение скорости поперек слоя заведомо выше величины  $1/r$ .

Профиль средней плотности  $\rho_0$  связан с  $U$  зависимостью

$$\rho_0 = [1 + (\kappa - 1)M_0^2 (1 - U^2)/2]^{-1}.$$

Профиль (1) имеет линию перегиба  $((\rho_0 U')/r)' = 0$ . В качестве характерного линейного масштаба выбрано значение  $\bar{r}$  на линии половинной скорости, поэтому при  $r = 1$   $U = 0,5$ . Это значение совпадает с половиной толщины слоя смешения, протяженность которого  $r_1 < r < 1 + \delta/2$ .

Значение числа Маха  $M_0$  также определяется по линии максимальной скорости. Связать его с числом Маха истечения на срезе сопла  $M_a$  можно по известному изэнтропическому соотношению

$$M_0^2 = 2[1 + (\kappa - 1)M_a^2/2]N^{(\kappa-1)/\kappa} - 1/(\kappa - 1).$$

Итак, все необходимые связи установлены.

Схема течения в первой бочке недорасширенной струи показана выше на рис. 1. В качестве криволинейных ортогональных координат выбраны  $R = R_0 + r$ , где  $r$  — изменяющаяся радиальная переменная, а  $R_0$  — радиус кривизны ( $R_0 \gg r$ ), и угловые переменные  $\varphi$  и  $\gamma$ . Соответствующие им компоненты скоростей —  $v$ ,  $w$ ,  $u$ . Метрическая форма в принятой системе координат  $dS^2 = H_1^2 + H_2^2 d\varphi^2 + H_3^2 d\gamma^2$ , а коэффициенты Ламе есть  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = R \cos \gamma - R_0$ ,  $H_3 = R$ . Естественно принять, что в интересующей нас области  $R_0 = \text{const}$ , а среднее поле параметрически зависит от толщины слоя смешения  $\delta$  (плоскопараллельное приближение). Тогда  $\cos \gamma \approx 1$  и  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = r$ ,  $H_3 = R_0$ , а продольная координата  $x$  вводится как  $dx = R_0 d\gamma$ .

Вязкие члены в уравнениях моментов записаны как для несжимаемой жидкости, а уравнение энергии редуцируется в уравнение сохранения энтропии на линии тока, как в невязком приближении.

В работе [9] приведена полная невязкая система в этой системе координат. Дополним ее вязкими членами, используя выкладки [17]. Ввиду громоздкости выводов, приведем только исходную систему и конечный вид линеаризованных уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \text{grad } \bar{u}^2 / 2 + \bar{\Omega} \times \bar{u} &= F - 1/\rho \text{ grad } p + v [\text{grad div } \bar{u} - \text{rot } \bar{\Omega}], \\ \rho_t + \bar{u} \text{ grad } \rho + \rho \text{ div } \bar{u} &= 0, \end{aligned}$$

$$s_t + \bar{u} \operatorname{grad} s = 0,$$

$$\bar{u} = |v, w, u|, \quad \bar{\Omega} = \operatorname{rot} \bar{u}.$$

Для исключения энтропии используется адиабатическое соотношение

$$s = \ln(p/\rho^\kappa)^{\bar{v}}.$$

Для одномерного среднего течения поле скоростей запишется в виде  $\bar{u} = |v', w', U(r) + u'|$ , где волновые компоненты имеют вид  $u' = u(r)e^{i(\alpha x - \omega t + n\varphi)}$ . Здесь  $\alpha = \alpha^r + i\alpha^i$ ,  $\alpha^r$  и  $n$  — продольное и азимутальное волновые числа,  $\alpha^i$  — коэффициент продольного усиления, круговая частота  $\omega$  — реальна. Для волн Т — Г  $\alpha^r$  и  $\omega \cong 0$ , поэтому  $v', u' = (v, u)(r)\exp(-\alpha^i x)\cos n\varphi$ , а  $w' = iw(r)\exp(-\alpha^i x)\sin n\varphi$ . Значения  $n$  определяют число вихрей или вихревых пар по окружности струи — малые  $n$  соответствуют крупномасштабным вихрям, а большие — мелкомасштабным.

Для возмущений Т — Г нельзя сделать упрощений уравнений, подобных принимаемым для пристенного пограничного слоя [13], и пренебречь вязкой диссипацией для поперечной компоненты волновой скорости  $v'$ , так как невязкое приближение показывает, что все возмущения, особенно для невысоких  $n$ , одного порядка.

В безразмерном виде линеаризованная система уравнений движения и сохранения в искривленной цилиндрической системе координат запишется:

$$iFv + p'/\rho_0 - 2Uu/R_0 = [Dv - v/r^2 - 2inw/r^2 + (v' - v/R_0 - 2i\alpha u)/R_0] \sqrt{\operatorname{Re}},$$

$$iFw + inp/(\rho_0 r) = [Dw - w/r^2 + 2inv/r^2 + w'/R_0] \sqrt{\operatorname{Re}},$$

$$iFu + U'v + i\alpha p/\rho_0 + Uv/R_0 = [Du + (u' - u/R_0 + 2i\alpha v)/R_0] \sqrt{\operatorname{Re}},$$

$$iFM_0^2 p + v' + v/r + inw/r + i\alpha u + v/R_0 = 0,$$

$$F = \alpha U - \omega, \quad Dv = v'' + v'/r - (\alpha^2 + n^2/r^2)v, \quad \operatorname{Re} = \bar{U}\bar{r}/v \quad (2)$$

с граничными условиями  $v, w, u, p \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ . Здесь и далее штрих означает производную по  $r$ . Как видно, помимо добавочных конвективных членов  $\sim 1/R_0$ , старший из которых  $Uu/R_0$ , появились слагаемые и в вязких частях уравнений, связанные с геометрическими эффектами [18]. Введенное выше число Рейнольдса легко перестроить на параметры на срезе сопла, на часто фигурирующее  $\operatorname{Re}_L = \operatorname{Re}_d/\sqrt{N}$  и на  $\operatorname{Re}_x$ , конкретизируя зависимости  $x = x(\delta)$ .

Решение системы (2) для переменных  $u, u', w, w', v, p$  проведено методом ортогонализации [13]. Достаточно сложной является проблема построения трех линейно независимых векторов для замыкания краевой задачи на собственные значения в цилиндрической системе координат. Как обычно, используются аналитические решения в областях постоянных параметров среднего течения — в потенциальном ядре  $r \rightarrow 0$  и дальнем поле струи  $r \rightarrow \infty$ , где постулируется отсутствие добавочных центробежных членов в (2). По методике Морриса [19, 20] получено:

$$u = C_1 Z_n(\lambda_1 r) + C_2 Z_n(\lambda_2 r),$$

$$v = -C_1 i / \alpha Z'_n(\lambda_1 r) - C_2 \alpha / \lambda_2 Z_{n+1}(\lambda_2 r) - C_3 i n / r Z_n(\lambda_2 r),$$

$$w = C_1 n / (\alpha r) Z_n(\lambda_1 r) + C_2 i \alpha / \lambda_2 Z_{n+1}(\lambda_2 r) + C_3 i n / r Z'_n(\lambda_2 r),$$

$$p = -C_1 \rho_0 F \operatorname{Re} Z_n(\lambda_1 r) / \left( \alpha (\operatorname{Re} + i M_0^2 F) \right),$$

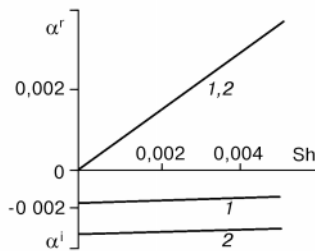
где  $\lambda_1^2 = (\alpha^2 \operatorname{Re} + i \lambda_2^2 M_0^2 F) / (\operatorname{Re} + i M_0^2 F)$ ,  $\lambda_2^2 = \alpha^2 + i \rho_0 F \operatorname{Re}$ . Здесь  $Z$  — модифицированные функции Бесселя  $n$ -порядка,  $Z_n = I_n$  (первого рода) при  $r \rightarrow 0$  и  $Z_n = 2K_n / (\pi i^{n+1})$  (второго рода) при  $r \rightarrow \infty$ . Первые вектора в этом представлении соответствуют невязкому приближению, а  $\lambda_1 = \lambda_{\text{inv}}$  при  $\operatorname{Re} \rightarrow \infty$ .

Сформулированная краевая задача на собственные значения для определителя ( $6 \times 6$ ) позволяет изучить многофункциональные связи  $\alpha^i = \alpha^i(\operatorname{Re}, M_0, R_0, \delta, n)$  и найти критические числа Рейнольдса, отделяющие области неустойчивости ( $\alpha^i < 0$ ) от областей устойчивости ( $\alpha^i > 0$ ) для волн  $T - \Gamma$ .

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Изложение результатов необходимо начать с некоторых общих рассуждений. В качестве начальных опорных собственных значений были взяты невязкие параметры главной ветви возмущений [2, 9, 10], полученные при достаточно малых, но конечных частотах, выраженных через число Струхала  $\operatorname{Sh} = 2\pi\omega\bar{r}/a_0$ , где  $a_0$  — скорость звука на линии максимальной скорости. Необходимо было удостовериться в том, что они действительно близки параметрам стационарных возмущений. Рис. 2 подтверждает это. При  $\operatorname{Sh} \rightarrow 0$   $\alpha^i \rightarrow 0$ , а  $\alpha^i$  меняется незначительно. Это позволяет надеяться, что результаты невязкого анализа верны по своей сути.

На рис. 3 показаны зависимости  $\alpha^i(\operatorname{Re})$  для одного из типичных вариантов расчета  $R_0 = 25$ ,  $\delta = 0,15$  и  $M_0 = 1,5$ . Видно (на оси  $\alpha^i = 0$  приведены значения критических чисел Рейнольдса  $\operatorname{Re}_c$ ), что крупномасштабные вихри (малые  $n$ ) теряют устойчивость при более низких  $\operatorname{Re}$  и существует диапазон значений  $\operatorname{Re}$ , в котором они имеют значительно большие инкременты по сравнению с мелкомасштабными вихрями. Асимптота  $\alpha^i = \text{const}$  характеризует достижение предельных  $\alpha^i$ , когда инкременты перестают зависеть от  $\operatorname{Re}$  (как в невязком приближении). Для малых  $n$  это происходит достаточно быстро, но с ростом номера моды область влияния вязкости растет и, к примеру, для  $n = 30$  предел соответствует достаточно высокому числу Рейнольдса:  $\operatorname{Re} \approx 10^5$ . Этот результат можно использовать для объяснения опытных данных. Интересно также, что подтвердились результаты прикладного анализа влияния вязкости, проведенного в [9].



Более полная трактовка этого вывода проиллюстрирована на рис. 4. Здесь показаны коэффициенты  $\alpha^i$  для разных номеров мод  $n$  в широком диапазоне чисел  $\operatorname{Re}$ . Предельной штриховой линией даны невязкие инкременты. Из рисунка хорошо видно, при каких зна-

Рис. 2. Поиск стационарных волн  $T - \Gamma$  с  $\omega = 0$  при  $R_0 = 25$ .

1 —  $\operatorname{Re} = 1765$ ,  $n = 25$ , 2 —  $\operatorname{Re} = 2365$ ,  $n = 30$ .



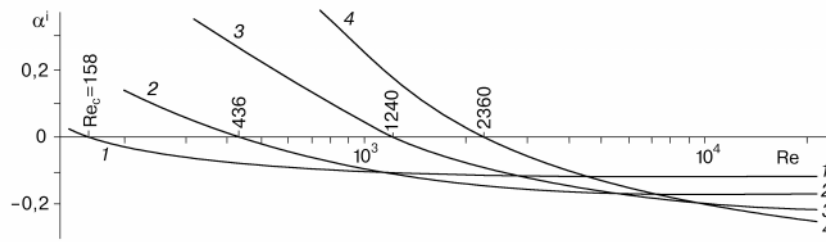


Рис. 3. Зависимости  $\alpha^i(\text{Re})$  для вихрей Т — Г при  $R_0 = 25$ ,  $\delta = 0,15$ ,  $M_0 = 1,5$ ,  $n = 5$  (1), 10 (2), 20 (3), 30 (4).

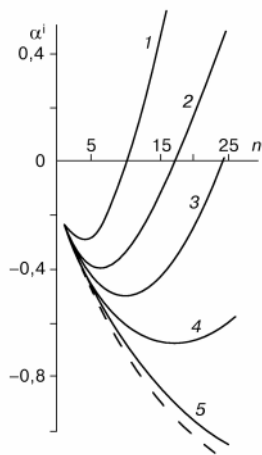


Рис. 4. Коэффициенты  $\alpha^i$  разных мод для тех же (см. рис. 3) параметров при числах Рейнольдса: 443 (1), 1000 (2), 2000 (3), 5000 (4), 60000 (5).

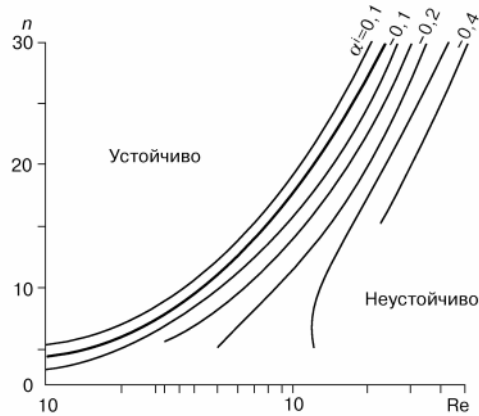


Рис. 5. Кривые нейтральной устойчивости и линии равного усиления  $\alpha^i = \text{const}$ .

чениях  $\text{Re}$  можно пользоваться невязкими значениями. Таким образом, ясно выявлено, что учет вязкости приводит к уменьшению инкрементов возмущений Т — Г при умеренных  $\text{Re}$  и это влияние особенно сказывается на характеристиках мелкомасштабных волн.

На рис. 5 показан ход нейтральной кривой и линий равного усиления. Выше нейтральной кривой  $\alpha^i = 0$  лежит область устойчивости, ниже — неустойчивости. Выяснено, что мода  $n = 3$  является граничной и волны с  $n = 1$  и 2 слабо неустойчивы при любых параметрах истечения для  $R_0 > 5$ .

На рис. 6 представлены нейтральные кривые, определяющие зависимости критических значений чисел Рейнольдса от толщин  $\delta$  и радиусов кривизны  $R_0$ . Из рисунка следует, что по мере утолщения слоя смешения в процессе растекания струи волны стабилизируются, и это особенно заметно на высоких модах. Ясно также, что при росте  $R_0$  происходит уменьшение значения центробежных сил и, естественно, снижение эффекта их действия. Это полностью согласуется с выводами невязкого анализа.

Не противоречат невязкому анализу и данные о зависимостях инкрементов от числа Маха истечения, представленные на рис. 7. С ростом  $M_0$

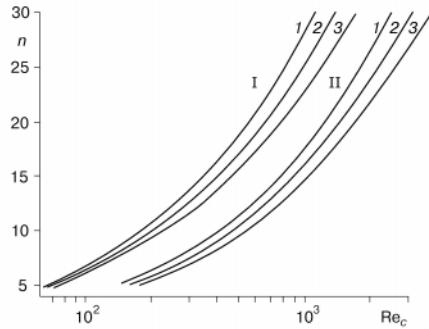


Рис. 6. Значения критических чисел Рейнольдса при разных  $\delta$  и  $R_0$ .  
 $R_0 = 5$  (семейство I) и  $R_0 = 25$  (семейство II);  $\delta = 0,2; 0,4; 0,6$  (1 – 3).

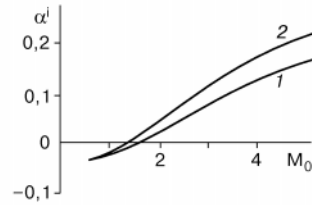


Рис. 7. Влияние числа Маха истечения на  $\alpha^l$ ;  $n = 5$  (1) и 10 (2).

инкременты возмущений уменьшаются и очень скоро становятся декрементами (исследованы околокритические  $Re$  для  $M_0 = 1,5$ ).

Возникает вопрос о построении обобщенной картины, в которой можно было бы наилучшим образом представить рассмотренные многофункциональные связи. Один из ее вариантов дан на рис. 8. Как известно, при рассмотрении неустойчивости Т — Г вводится параметр (или число) Гертлера  $G^2 = Re/R_0$ , описывающий соотношение вязких и центробежных эффектов. Кривые  $Re_c(G)$  для  $n = \text{const}$  отделяют области устойчивости (левее и ниже линий  $Re_c$ ) от областей неустойчивости (правее и выше их). Эти кривые, рассчитанные при малых толщинах  $\delta$  для наиболее характерных значений радиусов искривления, дают опорные критические значения практически для всех возможных параметров, имеющих место в струях.

Результаты работы позволяют рассмотреть возможный механизм выделения мод в спектре в зависимости от числа Рейнольдса. Естественно предположить, что без каких-либо вынуждающих обстоятельств, связанных с возможным выносом в свободный поток внутренних сопловых вихрей или с сильной шероховатостью кромок, индуцирующих начальный шлейф волн оп-

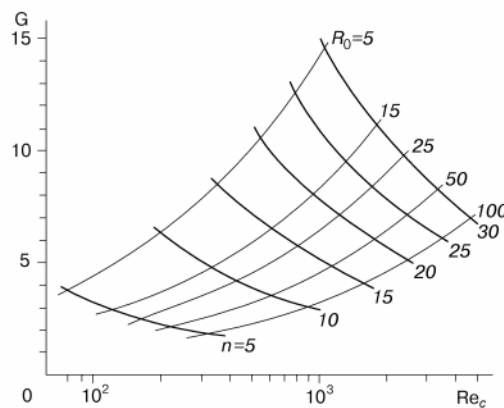
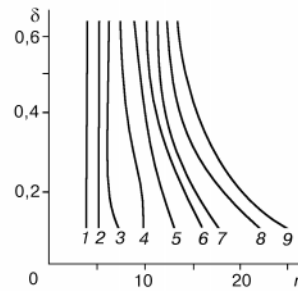


Рис. 8. Области неустойчивости Тейлора — Гертлера в струе.

Рис. 9. Моды с максимальным инкрементом  $\alpha^i$  на разных толщинах слоя смещения  $\delta$  при  $R_0 = 25$ .  
 $Re = 500, 750, 10^3, 2 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3, 7,5 \cdot 10^3, 10^4$  (линии 1 – 9).



ределенного состава, в слое смещения струи будут выделяться моды с максимальными инкрементами. Рассмотрим рис. 9, на котором представлены такие моды в диапазоне  $500 < Re < 10^4$  для одного радиуса искривления  $R_0 = 25$ . Становится ясно, что при невысоких  $Re$  выявляется наличие преобладающей моды, которая устойчиво имеет максимальный инкремент при всех толщинах слоя  $\delta$ : это мода  $n = 4$  для  $Re = 500$  и мода  $n = 6$  для  $Re = 10^3$ . При дальнейшем росте  $Re$  номер такой преобладающей моды при малых  $\delta$  тоже растет, но в процессе увеличения толщины слоя смещения ее значение смещается в область малых азимутальных чисел.

На рис. 10 представлена более подробная интерпретация такого исследования, показывающая соотношение инкрементов преобладающей и соседствующих с ней мод при разных толщинах  $\delta$ . Видно, что при  $Re = 10^3$  (рис. 10, а) мода  $n = 6$  действительно является максимально нарастающей в сравнении с близлежащими и ее инкремент заметно превосходит таковые окружающих мод.

Иная ситуация наблюдается при большем числе Рейнольдса  $Re = 10^4$  (рис. 10, б). Здесь, кроме уже выявленного смещения моды максимального инкремента на малые  $n$  (точки на кривых), можно отметить отсутствие явного преобладания такой моды над соседствующими в достаточно широкой окрестности. Это говорит о том, что при высоких  $Re$  возможная эволюция спектра возмущений может быть более сложной, с выделением целой группы близлежащих мод.

Качественное подтверждение этому можно найти в экспериментах [3, 5, 6], проведенных на ламинарных и предтурбулентных режимах. В них прямыми измерениями и визуализацией поперечных сечений потока установлено, что при умеренных числах Рейнольдса истечения реализуются низкомодовые волновые компоненты. Теперь мы знаем, что они и должны иметь большие инкременты по сравнению с высокомодовыми и что этот процесс определяется вязкостью. Многочисленные снимки [5, 6] иллюстрируют, что с ростом  $Re$

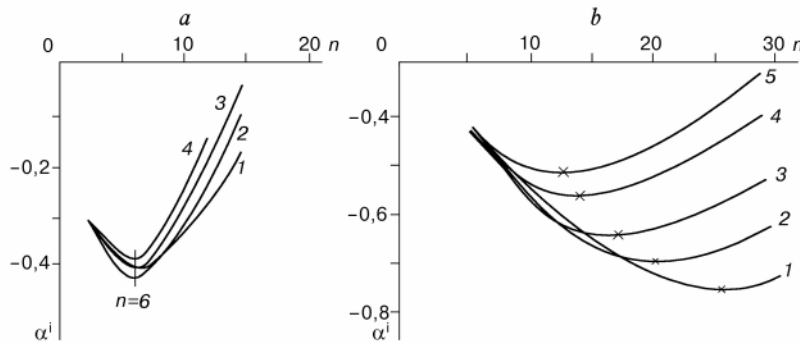


Рис. 10. Инкременты разных мод для  $R_0 = 25$ .

а —  $Re = 10^3$ ,  $\delta = 0,1$  (1),  $0,3$  (2),  $0,5$  (3),  $0,65$  (4); б —  $Re = 10^4$ ,  $\delta = 0,1$  (1),  $0,2$  (2),  $0,3$  (3),  $0,5$  (4),  $0,65$  (5).

масштабы вихрей уменьшаются. Это же показано в [3] прямыми измерениями, при  $Re_d = 1950$  обнаружена структура с 11, а при  $Re_d = 4100$  с 22 лепестками.

С этих позиций попытаемся объяснить данные [1, 2]. Из-за исходно турбулентного состояния потока при расчетах таких струй на устойчивость  $T - \Gamma$  нужно вводить в рассмотрение числа Рейнольдса, построенные не по физической, а по турбулентной вязкости. Сделать это корректно пока не представляется возможным из-за отсутствия достоверной модели, описывающей турбулентность в свободном потоке, но вполне можно оценить, какие  $Re_\tau$  могут реализоваться в слоях смешения. Для этого используем самую простую алгебраическую модель Прандтля с поправкой на сжимаемость [21]:

$$Re_\tau = \left[ \beta^2 \delta^2 \left| \frac{dU}{dr} \right|_{\max} \right]^{-1}, \quad \beta = 0,09 - \sqrt{M_0 - 1,2/42}.$$

Тогда, к примеру, для  $\delta = 0,1$  турбулентное число Рейнольдса будет  $Re_\tau = 1200$ , а это опять-таки тот диапазон, где влияние вязкости ощутимо. Вносимые в поток исходно высоким затравочным фоном мелкомасштабные колебания высоких азимутальных номеров реально должны иметь значительно меньшие инкременты, чем дает невязкая теория. К тому же по мере растекания струи и увеличения  $\delta$  инкременты этих мод уменьшаются значительно быстрее прочих, что и приводит к затуханию соответствующих составляющих спектра.

Отметим, что при расчетах с учетом вязкости не получено ни одного собственного значения для добавочных ветвей или семейств решений. Очевидно, эти решения действительно связаны с неоднозначностью краевой задачи в рамках невязкого приближения и не отвечают физически реализуемым возмущениям  $T - \Gamma$  в струях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Запругаев В.И., Миронов С.Г., Солотчин А.А. Спектральный состав волновых чисел и особенности структуры течения в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — Т. 34, № 5. — С. 41 – 47.
2. Желтухин Н.А., Запругаев В.И., Солотчин А.А., Терехова Н.М. Спектральный состав и структура стационарных вихревых возмущений Тейлора — Гертлера в сверхзвуковой струе // Докл. РАН. — 1992. — Т.325, №. 6. — С. 1133 – 1137.
3. Новопашин С.А., Перепелкин А.Л. Самоорганизация течения в сверхзвуковой предтурбулентной струе. — Новосибирск, 1988. — (Препр. /ИТ СО РАН; № 175-88).
4. Krothopalli A., Buzuna G., Lourenco L. Streamwise vortices in an underexpanded axisymmetric jet // Phys. Fluids A. — 1991. — Vol. 3, No. 8.
5. Teshima K. Three-dimensional characteristics of supersonic jets // Int. Simp. on Rarefied Gas Dynamics 17. — Aachen, 1990.
6. Welsh F.P., Cain T.M. Electron beam visualisation of low density nitrogen plumes // Proc.VII Symp. of the Flow Visual., Seattle, 1995. — P. 192 – 197.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.
8. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. — Л.: Гидрометеиздат, 1975.
9. Желтухин Н.А., Терехова Н.М. Возмущения высоких мод в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1990. — № 2. — С. 48 – 55.
10. Желтухин Н.А., Терехова Н.М. Неустойчивость Тейлора — Гертлера в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — № 5. — С. 48 – 55.
11. Терехова Н.М. Продольные вихри в сверхзвуковых струях // Докл. РАН. — 1996. — Т. 347, № 6. — С. 759 – 762.
12. Терехова Н.М. Продольные вихри в сверхзвуковых струях // ПМТФ. — 1996. — Т. 37, № 3. — С. 45 – 57.
13. Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
14. Liou W.W. Linear instability of curved free shear layers // Phys. Fluids. 1994. — Vol. 6, No. 2. — P. 541 – 549.

15. Дулов В.Г., Лукьянов Г.А. Газодинамика процессов истечения. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
16. Глазнев В.Н. Автоколебания с акустической обратной связью при истечении сверхзвуковых нерасчетных струй: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1991.
17. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. — М.: Физ-мат. лит-ра, 1963.
18. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. — М.: Мир, 1971.
19. Morris P.J. Viscous stability of compressible axisymmetric jets // AIAA J. — 1983. — Vol. 21, No. 4. — P. 1 – 2.
20. Morris P.J. The spatial viscous instability of axisymmetric jets // J. Fluid Mech. — 1976. — Vol. 77, pt. 3. — P. 511 – 529.
21. Теория турбулентных струй / Под ред. Г.Н. Абрамовича. — М.: Наука, 1984.

*Статья поступила в редакцию 5 марта 1998 г.,  
в доработанном виде — 29 октября 1998 г.*