

3. Пленочный теплообменный аппарат/Л. И. Сень, А. М. Тё.— БИ, 1982, № 3.
4. Тё А. М., Сень Л. И., Подсушный А. М. Высокотемпературный нагрев морской воды в конфузорно-пленочном аппарате.— В кн.: Судовые энергетические установки. Межвузовский сб. Владивосток: ДВГУ, 1981.
5. Сень Л. И., Тё А. М., Цветодуб О. Ю. Модель пленочного течения жидкости по конфузорной поверхности.— ПМТФ, 1983, № 3.
6. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.
7. Паскопов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.— М.: Наука, 1984.

Поступила 25/III 1985 г.

УДК 532.542 + 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНА ПО ТРУБОПРОВОДУ, ЗАПОЛНЕННОМУ ЖИДКОСТЬЮ

С. П. Актершев, А. В. Федоров, В. М. Фомин

(Новосибирск)

В [1, 2] предложена математическая модель движения жидкости в магистральном трубопроводе с осью — криволинейной пространственной кривой — и изучены ее некоторые упрощения. В рамках предложенных моделей рассмотрены вопросы распространения линейных и нелинейных волн. Настоящее сообщение посвящено исследованию течения типа простой волны в трубопроводе с упругими стенками в рамках одного из вариантов модели [1], учитывающего по сравнению с [2] осевые смещения трубопровода. Получено основное уравнение для описания распространения волны в трубопроводе.

Уравнения, описывающие течение жидкости в трубопроводе, возьмем в виде [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho_1 R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= R \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial s} + R \frac{\sigma_{rs}^e - \sigma_{rs}^i}{h}, \\ \rho_1 R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\sigma_{\theta\theta} + R \frac{\sigma_{rr}^e - \sigma_{rr}^i}{h} + R \frac{\partial \sigma_{rs}}{\partial s}, \\ \sigma_{rs}^i &= \mu \frac{u - u^i}{h/2} + \mu \frac{\partial v^i}{\partial s}, \quad \sigma_{rs}^e = \mu \frac{u^e - u}{h/2} + \mu \frac{\partial v^e}{\partial s}, \\ \sigma_{rs} &= \mu \frac{u^e - u^i}{h} + \mu \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u}{\partial s} + (\lambda + 2\mu) \frac{v}{R_0} + \lambda \frac{v^e - v^i}{h}, \\ \sigma_{ss} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial s} + \lambda \frac{v^e - v^i}{h} + \lambda \frac{v}{R_0}, \\ \rho V R^2 &= \rho_0 V_0 R_0^2, \quad \frac{V^2}{2} + \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} = \frac{V_0^2}{2}, \quad p - p_0 = a_0^2 (\rho - \rho_0). \end{aligned}$$

Здесь u, v — перемещения трубопровода в продольном (ось s) и радиальном (ось r) направлениях; индексы e и i относятся к величинам на внешней и внутренней поверхностях трубы Φ^e и Φ^i ; ρ_1 — плотность материала трубы; $R = R(s, t)$ — образующая трубы; h — ее толщина; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; λ, μ — коэффициенты Ламэ; t — время; ρ, V, p — плотность, скорость, давление жидкости (рис. 1).

Поскольку компоненты вектора нормали к образующей трубы удовлетворяют условию $n_r/n_s \sim (R - R_0)/L \ll 1$, L — характерный линейный размер волны, то

$$(2) \quad \sigma_{rr}^e = \sigma_{rs}^e = \sigma_{rs}^i = 0, \quad \sigma_{rr}^i = -p.$$

Замкнем (1), (2) соотношениями

$$(3) \quad u = (u^e + u^i)/2, \quad v = (v^e + v^i)/2,$$

которые означают непрерывность разностных односторонних производных по r на срединной поверхности, и геометрическим соотношением

$$(4) \quad v - v^0 = R - R_0,$$

где v^0 — перемещение в невозмущенном состоянии при $R = R_0$ под действием давления p_0 .

Заметим, что в невозмущенном состоянии, когда $u = u^i = u^e = 0$,

нетрудно определить радиальные деформации v^0, v_0^e, v_0^i и напряжение:

$$\frac{v^0}{R_0} = \frac{p_0 R_0 \lambda + 2\mu}{4\mu h \lambda + 2\mu}, \quad \frac{v_0^e - v_0^i}{R_0} = -\frac{p_0 \lambda}{4\mu (\lambda + \mu)}, \quad \sigma_{ss} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{p_0 R_0}{2h}.$$

Это решение совпадает с решением задачи Ламэ с точностью до членов порядка $(h/R_0)^2$.

Будем искать решение системы (1)–(4) в виде простой волны, распространяющейся со скоростью D . Тогда для определения искомых функций u, v получим

$$(5) \quad (\rho_1 D^2 - (\lambda + 2\mu)) \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{\lambda}{R_0} \frac{dv}{d\xi},$$

$$\rho_1 D^2 R \frac{d^2 v}{d\xi^2} = -\lambda \frac{du}{d\xi} - (\lambda + 2\mu) \frac{v}{R_0} - \frac{\lambda (v_0^e - v_0^i)}{h} + \frac{pR}{h}$$

($\xi = x - Dt$). Интегрируя первое уравнение из (5) с учетом граничных условий $u = du/d\xi = 0, v = v^0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и подставляя его во второе, найдем для возмущения $R - R_0$ уравнение

$$\rho_1 D^2 R \frac{d^2 R - R_0}{d\xi^2} = \frac{(\lambda + 2\mu) \rho_1 D^2 - 4\mu (\lambda + \mu)}{\rho_1 D^2 - (\lambda + 2\mu)} \frac{R - R_0}{R_0} + \frac{pR - p_0 R_0}{h},$$

которое в безразмерных переменных $x = R/R_0, \xi = \xi/R_0$ можно записать в виде

$$(6) \quad \ddot{x} = -E(x - 1) + \alpha x(p/p_0 - 1),$$

$$E = \frac{1}{\rho_1 D^2} \frac{\rho_1 D^2 (\lambda + 2\mu) - 4\mu (\lambda + \mu)}{\rho_1 D^2 - (\lambda + 2\mu)}, \quad \alpha = p_0 R_0 / \rho_1 D^2 h,$$

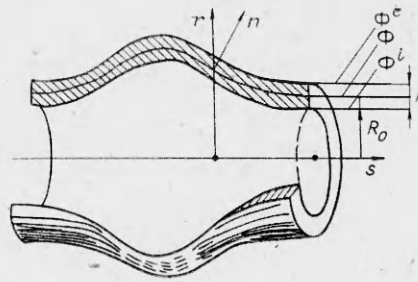
совпадающем с уравнением для описания перемещения стенки трубы в волне, полученным в [2] в рамках модели Жуковского. Отметим, что первый член в правой части (6) представляет собой упругие силы стенки трубы, которые противодействуют возмущению радиуса при $E > 0$, второй — возмущающая сила избыточного давления $p - p_0$, возникающего при торможении жидкости.

Рассмотрим (6) для скоростей D таких, что $\rho_1 D^2 \ll \lambda + 2\mu, \rho_1 D^2 \ll \frac{4\mu (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$. При этом $E \sim \frac{1}{\rho_1 D^2} \frac{4\mu (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$. Уравнение (6) запишем как

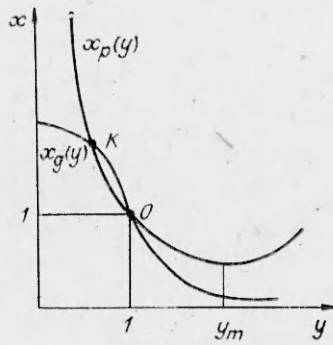
$$(7) \quad \ddot{x} = -E(x - 1) + \alpha' x(f(y) - 1),$$

$$\alpha' = \rho_0 a_0^2 R_0 / \rho_1 D^2 h, \quad y = V/V_0.$$

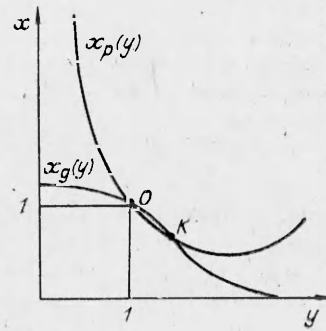
Здесь коэффициент при \ddot{x} «заморожен», что справедливо при условии $|1 - E/A| \ll 1$, где $A = \alpha' f(1) y(1)$. Вид функции $\rho/\rho_0 = f(y)$ и зависимость безразмерного радиуса трубы от скорости жидкости $x = x_p(y)$ определяются из уравнений движения жидкости:



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

$$\rho V R^2 = \rho_0 V_0 R_{0z}^2$$

$$\frac{V^2}{2} + a_0^2 \ln \rho = \frac{V_0^2}{2} + a_0^2 \ln \rho_0,$$

$$x_p(y) = y^{-\frac{1}{2}} \exp(M_0^2(y^2 - 1)/4),$$

$$f(y) = \exp(M_0^2(1 - y^2)/2), \quad M_0^2 = V_0^2/a_0^2.$$

Будем искать точки равновесия, для которых $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$ (особые точки для (7)). Для этого необходимо найти точки пересечения кривой $x = x_p(y)$ с нулевой линией $x = x_g(y)$, на которой обращается в нуль правая часть (7):

$$x_g(y) = E/(E - \alpha'(f(y) - 1)).$$

Предположим выполненным условие $M_0^2 < 2 \ln \frac{E + \alpha'}{\alpha'}$, при котором знаменатель не обращается в нуль. Тогда кривая $x = x_g(y)$ монотонно убывающая. Кривая $x = x_p(y)$ имеет минимум в точке $y_m = M_0^{-1}$. Рассмотрим $M_0 < 1$, при этом очевидная точка пересечения $x_p(y)$ и $x_g(y)$ находится на дозвуковой ветви. Если $|x_g(1)|$ больше $|x_p(1)|$, то вторая точка пересечения K лежит слева от $y = 1$ (рис. 2), а при обратном соотношении — справа от $y = 1$ (рис. 3). Вычислив производные, запишем эти условия в виде

$$(8) \quad x_K > 1, \quad y_K < 1, \quad M_0^2 \in (M_K^2, 1), \quad M_0^2 < 2 \ln \frac{E + \alpha'}{\alpha'};$$

$$(9) \quad x_K < 1, \quad y_K > 1, \quad M_0^2 < M_K^2, \quad M_0^2 < 2 \ln \frac{E + \alpha'}{\alpha'}.$$

Здесь $M_K^2 = (1 + 2\alpha'/E)^{-1}$. Условие $|1 - E/A| \ll 1$ означает, что M_0^2 должно быть близко к M_K^2 . В соответствии с общей теорией [3] тип особой точки $x = \tilde{x}$ определяется знаком $G_{xx}(\tilde{x})$, где G — потенциальная функция:

$$(10) \quad \ddot{x} = -dG/dx.$$

Для рассматриваемого случая

$$(11) \quad \frac{d^2 G}{dx^2} = \frac{E}{x_g} - \alpha' x \frac{df/dx_p}{dy/dy}.$$

Выражая f_y через наклон кривой $x = x_g(y)$ и подставляя в (11), получим в точке $x = \tilde{x}$ пересечения $x_p(y)$ и $x_g(y)$:

$$G_{xx}(\tilde{x}) = \frac{E}{\tilde{x}} \left(\frac{d(x_p - x_g)/dx_p}{dy/dy} \right).$$

Знак G_{xx} можно определить из условий (8), (9), зная знак величины dx_p/dy

и изменение знака $(x_p - x_g)$ при переходе через точку равновесия. Нетрудно видеть (см. рис. 2), что при условии (8) имеем $G_{xx}(1) < 0$, $G_{xx}(x_k) > 0$ — особая точка $x = 1$ («седло»), точка $x = x_k$ — центр. При условии (9) неравенства меняют знаки, и тогда $x = 1$ — центр, $x = x_k$ — «седло» (см. рис. 3).

Таким образом, при выполнении условий (8) и $M_k < M_0 < 1$ обе точки равновесия принадлежат дозвуковой ветви двузначной функции $y(x)$. Выбор этой ветви дает однозначную (с точностью до константы) потенциальную функцию $G(x)$. Согласно [3], в этом случае на фазовой плоскости (x, \dot{x}) существует замкнутая интегральная кривая, проходящая через точку $x = 1$, $\dot{x} = 0$ («седло»), которая обходит точку $x = x_k$, $\dot{x} = 0$ (центр).

На основании проделанного анализа можно сформулировать утверждение: решение $x(\xi)$ уравнения (7), определенное в области $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющее условию стационарности \dot{x} , $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow \pm\infty$, существует в виде уединенной волны при условии (8) и выборе константы в интеграле энергии, равной $G(1)$.

Для приближенного решения (7) воспользуемся первым интегралом уравнения (10):

$$\dot{x}^2/2 + G(x) = G(1).$$

Разложим, как это сделано в [2], потенциал $G(x)$ в окрестности $x = 1$ в ряд Тейлора с точностью до $(x - 1)^3$. В результате определим вторую точку равновесия K

$$x_k - 1 = -2G_{xx}(1)/G_{xxx}(1)$$

и решение

$$(12) \quad x(\xi) - 1 = -\frac{3G_{xx}(1)}{G_{xxx}(1)} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{4}{G_{xx}(1)}} \right).$$

Вычислив производные, найдем

$$(13) \quad G_{xx}(1) = -\frac{E(M_0^2/M_k^2 - 1)}{1 - M_0^2}, \quad G_{xxx}(1) = 2\alpha' M_0^2 \frac{M_0^4 + 3}{(1 - M_0^2)^{3/2}}$$

$$x_k - 1 = \frac{E(M_0^2/M_k^2 - 1)(1 - M_0^2)^2}{\alpha' M_0^2 (M_0^4 + 3)}.$$

Однако это разложение справедливо лишь для M_0^2 , не очень близких к единице, так как при $M_0^2 \rightarrow 1$ $G_{xx}(1)$, $G_{xxx}(1) \rightarrow \infty$. Для преодоления связанных с этим фактом затруднений поступим следующим образом. Будем вычислять x_k как точку пересечения кривых $x_p(y)$ и $x_g(y)$, раскладывая обе функции в ряд Тейлора в окрестности $y = 1$ с точностью до λ^2 ($\lambda = 1 - y$):

$$(14) \quad x_p = 1 + \frac{1 - M_0^2}{2} \lambda + \frac{3 + M_0^4}{8} \lambda^2 + \dots,$$

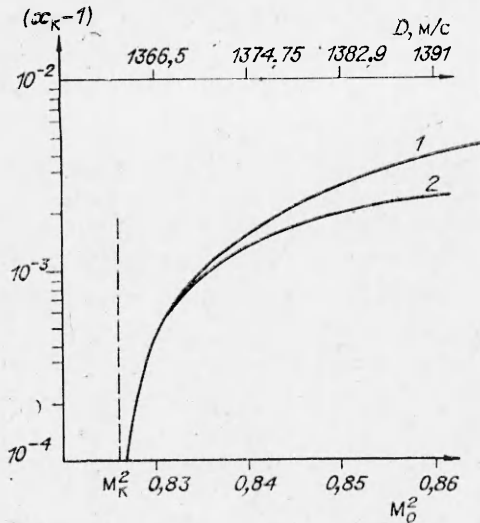
$$x_g = 1 + \frac{\alpha' M_0^2}{E} \lambda + \frac{\alpha'}{2E} \frac{M_0^2}{M_k^2} (M_0^2 - M_k^2) \lambda^2.$$

Для случая $\alpha'/E \ll 1$ квадратичный член в разложении $x_g(\lambda)$ пренебрежимо мал по сравнению с соответствующим членом для $x_p(\lambda)$. Решая уравнение $x_p(\lambda) = x_g(\lambda)$, определим

$$\lambda_k = \frac{4(M_0^2/M_k^2 - 1)}{M_0^4 + 3}.$$

Это разложение справедливо вплоть до $M_0^2 = 1$, так как

$$\lambda_k(M_0^2 = 1) = 2\alpha'/E \ll 1.$$



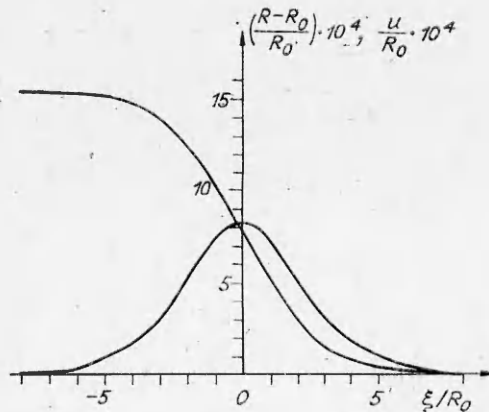
Р и с. 4

(см. (6)). При этом для $\lambda = \mu$ (сталь), $\rho_1 D^2 \ll \lambda + 2\mu$ отношение $(E_{Ю} - E)/E \sim 0,068$. На рис. 4 приведены зависимости (13) и (15) $x_K(M_0)$ для трубы из стали, заполненной водой ($\mu, \lambda = 8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_1 = 8 \cdot 10^3$ кг/м³, $a_0 = 1,5 \cdot 10^3$ м/с, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³), при $R_0/h = 10$. Если волна распространяется по покоящейся жидкости, то $V_0 = D$, поэтому там же приведена шкала скоростей волны D . Как видно из графиков, отличие зависимостей (13) и (15) начинает проявляться только при больших деформациях радиуса $((R - R_0)/R_0 \sim 10^{-3})$, когда их уже нельзя считать упругими. Амплитуда солитона быстро растет с увеличением D в узком диапазоне вблизи $a_0/(1 + 2\alpha'/E)$, причем до границы предела упругости $x_K - 1 \leq 10^{-3}$ справедливо решение (12).

Продольное смещение срединной поверхности стенки трубы найдем из уравнения (5):

$$(16) \quad \frac{u(\xi) - u(0)}{R_0} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_0^{\xi} [\bar{x}(\tau) - 1] d\tau = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial G_{x^2}(1)}{G_{x^2}(1)} \times \\ \times \sqrt{\frac{-4}{G_{x^2}(1)}} \operatorname{th} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\frac{-4}{G_{x^2}(1)}}} \right).$$

Зависимости продольного и радиального смещений (16) и (12) от координаты ξ приведены на рис. 5 для трубы из стали, заполненной неподвижной водой, при $R_0/h = 10$, $M_0^2 = M_K^2 + 0,005$.

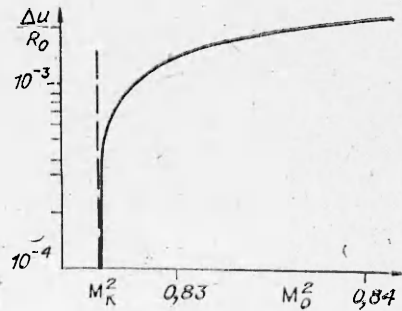


62

Подставив значение $\lambda_{\text{г}}$ в (14), получим

$$(15) \quad x_K - 1 = \frac{4\alpha' M_0^2 M_0^2 - M_K^2}{E M_{\text{г}}^2 (3 + M_0^2)}.$$

Из сравнения x_K , вычисленных по (13) и (15), видно, что они совпадают асимптотически при $M_0^2 \rightarrow M_K^2$. Прежде чем перейти к анализу полученного приближенного решения, сделаем одно замечание относительно рассматриваемого варианта канального течения в квазиодномерном приближении. В [2] величина восстанавливающей силы характеризовалась параметром $E_{Ю}$ — модуль Юнга материала трубы. Здесь роль такого параметра играет величина, которую также обозначим через E



Р и с. 6

Р и с. 5

В результате прохождения солитона радиус трубы принимает прежнее значение R_0 , а в продольном направлении стенка смещается на величину $\Delta u/R_0 = \frac{42\lambda}{\lambda + 2a} \sqrt{-G_{x^2}(1)/G_{x^3}(1)}$. Отметим, что в [2] прохождение волны характеризовалось лишь радиальными перемещениями. На рис. 6 показана зависимость $\Delta u/R_0$ от M_0^2 при тех же параметрах. Как видно, продольные перемещения по своей величине превосходят радиальные. Это указывает на необходимость рассмотрения задач распространения волн напряжений и деформаций в трубопроводах с учетом квазидвумерности напряженно-деформируемого состояния стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В., Фомин В. М. Математическое моделирование процессов, протекающих в магистральных трубопроводах. Препринт ИТНМ СО АН СССР, 1983, № 35.
2. Федоров А. В. Распространение солитона в упругом криволинейном трубопроводе.— В кн.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности/Под ред. В. М. Фомина. Новосибирск: ИТНМ СО АН СССР, 1984.
3. Андронов А. А., Витт А. Л., Хайкин С. О. Теория колебаний.— М.: Наука, 1981.

Поступила 13/III 1985 г.

УДК 532.593

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ СОВМЕСТНОМ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Букреев, А. В. Гусев, И. В. Стурова

(Новосибирск)

В настоящее время в рамках линейной теории выполнен анализ внутренних волн в невязкой двухслойной жидкости при достаточно общем законе движения источника возмущения (см., например, [1]). Для частного случая движения круглого цилиндра перпендикулярно его образующей один из интересных режимов такой, когда наряду с поступательным перемещением параллельно границе раздела цилиндр совершает вертикальные гармонические колебания. Как показано в [1], волновое поле в этом случае существенно зависит от частоты колебаний Ω . При относительно малых частотах волновые возмущения имеют место как впереди, так и позади тела. С увеличением частоты сверх некоторого критического значения Ω_* , зависящего от скорости поступательного движения тела, толщин слоев и перепада плотности между ними, волновое движение возможно только за телом. При $\Omega = \Omega_*$ в рамках линейной теории идеальной жидкости происходит неограниченное (степенное) нарастание амплитуды волн во времени, как и в различного рода резонансных явлениях. Рост волн могут ограничить либо вязкость, либо нелинейные эффекты. Влияние вязкости рассмотрено в [2] на примере аналогичной плоской задачи о возмущениях, создаваемых горизонтально колеблющимся цилиндром, движущимся в нижнем слое безграничной двухслойной жидкости. При этом предполагалось, что вязкость отлична от нуля только в верхнем слое. Нелинейные эффекты проанализированы в [3, 4], где на примере частного случая однородной жидкости учтены нелинейные граничные условия на свободной поверхности. Для линейно-стратифицированной жидкости теоретически и экспериментально изучено поведение внутренних волн при различных законах движения тела (см., например, [5]). Наиболее близка по постановке к рассматриваемой задаче работа [6].

В теоретической части данной работы основное внимание уделяется учету вязкости в рамках линейной модели. Проведены также опыты, в которых изучены критические и близкие к ним режимы. Настоящая работа — продолжение [7], где представлено теоретическое и экспериментальное исследование внутренних волн, возникающих при вертикальных гармонических колебаниях погруженного цилиндра в двухслойной вязкой жидкости с учетом поверхностного натяжения на границе раздела.

При теоретическом решении линейной задачи о поведении внутренних волн, генерируемых движущимся круглым цилиндром, последний моделируется точечным диполем. Жидкость предполагается несжимаемой, в невозмущенном состоянии покоящейся и состоящей из двух бесконечно