ПМТФ, № 4, 1965

# О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

*С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев*

*(Москва)*

Распространение пламени в гомогенной газовой смеси, где протекает экзотермическая химическая реакция первого порядка, описывается уравнениями теплопроводности и диффузии, которые запишем в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{c}\frac{du}{dx}\right)-m\frac{du}{dx}+v\Phi=0,\qquad \frac{d}{dx}\left(\rho D\frac{dv}{dx}\right)-m\frac{dv}{dx}-v\Phi=0 \qquad (1)$$

$$-\infty\leqslant x\leqslant+\infty,\qquad u(-\infty)=u_-,\quad v(-\infty)=v_-,\quad u(\infty)=u_+ \qquad (2)$$

Здесь $u$ — температура, $v = ha / c$, $a$ — концентрация, $h$ — тепловой эффект реакции, $c=\mathrm{const}$ — теплоемкость газа, $k = k(u)$ — коэффициент теплопроводности, $\rho=\rho(u)$ — плотность газа, $D = D(u)$ — коэффициент диффузии, $m$ — массовая скорость, $\Phi=\Phi(u)$ — константа скорости химической реакции. Константа скорости $\Phi = 0$ при $u_-\leqslant u\leqslant\varepsilon$ и $\Phi>0$ при $\varepsilon< u\leqslant u_+$.

При решении задачи (1), (2) должны быть найдены распределения температуры и концентрации в волне горения и скорость волны $m$.

Вопрос о существовании и единственности решения задачи (1), (2) впервые рассматривался в работе [1], где в предположении $\lambda=\rho cD/k=1$ установлено, что задача (1), (2) всегда имеет единственное решение. В работе [2] доказано существование решения (1), (2) при любом, не равном нулю постоянном значении $\lambda$, и установлена единственность решения при $0<\lambda<1$. При доказательстве принято, что величины $k$, $\rho D$, так же как и $c$, не зависят от температуры.

Существование и единственность решения задачи (1), (2) в случае $\lambda=0$ $(D=0)$, соответствующем распространению фронта экзотермической реакции в конденсированной среде, исследовались в работе [3].

Покажем, воспользовавшись методом Я. Б. Зельдовича [1,4], что задача (1), (2) имеет единственное решение и в случае, когда коэффициент теплопроводности, коэффициент диффузии и плотность газа являются функциями температуры такими, что $0<\lambda(u)<1$.

Система уравнений (1) имеет первый интеграл

$$\frac{k}{c}\frac{du}{dx}+\rho D\frac{dv}{dx}-m(u+v)=\mathrm{const} \qquad (3)$$

Из (3) и условий $(du/dx)_{x=\pm\infty}=(dv/dx)_{x=\pm\infty}=0$, которые следуют из (2), находим

$$\rho D\frac{dv}{dx}=m(u+v-u_+)-\frac{k}{c}\frac{du}{dx},\qquad u_+=u_-+v_- \qquad (4)$$

Считая далее температуру $u$ независимой переменной и вводя новую неизвестную функцию

$$p=\frac{k}{c}\frac{du}{dx} \qquad (5)$$

вместо уравнений (1), (5), получим

$$\frac{dp}{du}=m-\frac{vf}{p}\qquad\left(f=\frac{k\Phi}{c}\right)\tag{6}$$

$$\frac{dv}{du}-\frac{m(u+v-u_+)}{\lambda p}-\frac{1}{\lambda}\qquad\left(\lambda=\frac{\rho Dc}{k}\right)\tag{7}$$

$$p(u_-)=p(u_+)=v(u_+)=0\tag{8}$$

Задача (6) — (8) эквивалентна задаче (1), (2). На интервале $u_-\leqslant u\leqslant\varepsilon$ решение уравнения (6) с условием $p(u_-)=0$ имеет вид

$$p=m(u-u_-)\tag{9}$$

С ростом $m$ от $m=0$ ординаты интегральных кривых (9) увеличиваются от нуля.

Рассмотрим интегральные кривые уравнений (6), (7) на интервале $\varepsilon\leqslant u\leqslant u_+$, проходящие через точку $p(u_+)=0$, $v(u_+)=0$, которая является особой точкой. Из трех интегральных кривых, проходящих через эту точку, физический смысл имеет лишь кривая с наклоном

$$\left[\frac{dp}{du}\right]_{u_+}=\frac{m}{2\lambda(u_+)}-\left(\frac{m^2}{4\lambda^2(u_+)}+\frac{f(u_+)}{\lambda(u_+)}\right)^{1/2}\tag{10}$$

и соответственно

$$\left[\frac{dv}{du}\right]_{u_+}=\frac{2[1-\lambda(u_+)]\,m}{\lambda(u_+)\,[m+(m^2+4\lambda(u_+)\,f(u_+))^{1/2}]}-1\tag{11}$$

Уравнения интегральных кривых при $m=0$ имеют вид

$$p(u,0)=\left(2\int\limits_u^{u_+}f(u_2)\left[\int\limits_{u_2}^{u_+}\frac{du_1}{\lambda(u_1)}\right]du_2\right)^{1/2}\qquad v(u,0)=\int\limits_u^{u_+}\frac{du_1}{\lambda(u_1)}\tag{12}$$

Решение уравнения (7) может быть представлено в виде

$$v(u,m)=u_+-u+\int\limits_u^{u_+}\frac{1-\lambda(u_2)}{\lambda(u_2)}\exp\left[-m\int\limits_u^{u_2}\frac{du_1}{\lambda(u_1)\,p(u_1,m)}\right]du_2\tag{13}$$

Из (13) следует, что при $\lambda<1$ выполняется неравенство

$$u+v>u_+\tag{14}$$

Введем функции $p_m=\partial p/\partial m$ и $v_m=\partial v/\partial m$, которые позволяют судить об изменении положения интегральных кривых с изменением величины $m$. Из уравнений (6), (7) находим для $p_m$ и $v_m$ уравнения

$$\frac{dp_m}{du}=1-\frac{f}{p}v_m+\frac{vf}{p^2}p_m,\qquad\frac{dv_m}{du}=\frac{(u+v-u_+)(p-mp_m)}{\lambda p^2}+\frac{m}{\lambda p}v_m\tag{15}$$

В точке $u=u_+$, где $p_m=v_m=0$, имеет место

$$\frac{dp_m}{du}>0,\qquad\frac{dv_m}{du}>0\tag{16}$$

Из (16) следует, что функции $p_m$ и $v_m$ вблизи точки $u=u_+$ при $u<u_+$ принимают отрицательные значения. Из уравнений (15) видно, что знак функций $p_m$, $v_m$ не изменяется на всем интервале $\varepsilon\leqslant u\leqslant u_+$. Действительно, пусть в некоторой точке функция $p_m$ проходит через ноль, а функция $v_m$ сохраняет отрицательное значение. В этой точке кривая $p_m(u)$ не может иметь положительную производную. Однако из (15) следует, что в этой точке должно быть

$$\frac{dp_m}{du}=1-\frac{fv_m}{p}>0$$

Пусть теперь функция $v_m$ проходит через ноль в точке, где $p_m < 0$. Кривая $v_m(u)$ не может иметь положительного наклона в этой точке, но из уравнений (15) и неравенства (14) следует, что в этой точке

$$\frac{dv_m}{du} = \frac{(u + v - u_+)(p - mp_m)}{\lambda p^2} > 0$$

Аналогично доказывается, что случай одновременной смены знака функций $p_m$, $v_m$ также невозможен.

Таким образом, функции $p_m$ и $v_m$ на всем интервале $\varepsilon \leqslant u < u_+$ не могут принимать положительных значений. Это означает, что ординаты интегральных кривых $p(u, m)$ во всех точках этого интервала (в том числе — в точке $u = \varepsilon$) с ростом $m$ от $m = 0$ уменьшаются от значений, определяемых формулой (12). Следовательно, с ростом $m$ ординаты $p(\varepsilon - 0, m)$ и $p(\varepsilon + 0, m)$ монотонно сближаются и при конечном $m = m^*$, при котором $p(\varepsilon - 0, m^*) = p(\varepsilon + 0, m^*)$, существует непрерывная интегральная кривая $p(u, m^*)$, являющаяся решением задачи (6) — (8). При этом функция $v(u, m^*)$ определяется формулой (13).

Случай $\lambda = 0$ $(D = 0)$ требует особого исследования. Здесь из уравнений (1), (5) вместо системы (6), (7) получим задачу

$$\frac{dp}{du} = m - \frac{f}{m} - \frac{(u_+ - u) f}{p}, \qquad p(u_-) = p(u_+) = 0 \tag{17}$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи (17) рассмотрим, наряду с этой задачей задачу

$$\frac{dp_1}{du} = m - \frac{(u_+ - u) f(u)}{p_1}, \qquad p_1(u_-) = p_1(u_+) = 0 \tag{18}$$

Эта задача всегда имеет единственное решение [1,4]. Обозначим через $m^\circ$ соответствующее собственное значение задачи (18).

Из уравнения задачи (17) следует, что всякая интегральная кривая этого уравнения, проходящая через точку $p(u_+) = 0$, при $m > 0$ имеет $p(\varepsilon, m) > 0$. При $m = m^\circ$ эта интегральная кривая расположена выше соответствующей интегральной кривой задачи (18). Следовательно, $p(\varepsilon + 0, m^\circ) > p(\varepsilon - 0, m^\circ)$. В то же время на интервале $u \leqslant u \leqslant \varepsilon$ интегральная кривая уравнения (17), проходящая через точку $p(u_-) = 0$ и определяемая формулой (9), совпадает с решением задачи (18). Рассматривая поведение интегральных кривых уравнения (17) при увеличении $m$ от значения $m = m^\circ$, приходим к выводу, что задача (17), имеет единственное решение.

Отметим, что проведенное доказательство сохраняет силу и при более общей зависимости скорости химической реакции от концентрации и температуры $F(u, v)$ достаточно лишь, чтобы выполнялись условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{u=u_+} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} > 0 \quad \text{при } \varepsilon < u \leqslant u_+$$

Поступила 5 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, № 1.
2. Канель Я. И. О стационарном решении для системы уравнений теории горения. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
3. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории горения конденсированных систем. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.
4. Гельфанд И. М. Некоторые задачи квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959. т. 14. № 2.