

УДК: 532.5; 531.39

## Особенности динамического поведения пузырьков в кластере, вызванные их гидродинамическим взаимодействием

А.А. Губайдуллин<sup>1,2</sup>, А.С. Губкин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН

<sup>2</sup>Тюменский государственный университет

E-mail: timms@tmn.ru, alexshtil@gmail.com

Проведено численное исследование коллективного взаимодействия пузырьков в кластерах различных конфигураций. Использовалась математическая модель, учитывающая сжимаемость и вязкость жидкости, а также гидродинамическое взаимодействие между пузырьками. Теплообмен газовых пузырьков с жидкостью учтен в рамках двухтемпературной схемы. Использовано выражение для потока тепла к единице поверхности пузырька, позволяющее описывать теплообмен газовых пузырьков с жидкостью в достаточно широком диапазоне значений давлений и температур жидкости. Исследовано поведение отдельного пузырька в коллективе пузырьков при мгновенном сжатии и при периодическом возмущении различной частоты. Показано, что в определенных условиях для некоторых пузырьков достигаются значительные степени сжатия и, как следствие, высокие давления и температуры. Исследовано влияние конфигурации кластера. На примерах кластера из трех вложенных додекаэдров, линейного и стохастического кластеров показано, что конфигурация кластера может оказывать сильное влияние на его динамику.

**Ключевые слова:** пузырьковый кластер, гидродинамическое взаимодействие пузырьков, теплообмен пузырька с жидкостью.

### Введение

Пузырьковые среды давно интересуют исследователей из-за нелинейных свойств, широкой распространенности в природе и интенсивного использования в технике. Так, например, пузырьковая завеса может служить демпфером ударных волн. Поэтому вызывает интерес распространение и эволюция нелинейных возмущений в различных газожидкостных системах. Также вызывает интерес исследование уединенных структур, так называемых пузырьковых кластеров, поскольку поведение в волнах сжатия отдельного пузырька в коллективе пузырьков может отличаться от поведения одиночного пузырька в безграничной жидкости за счет коллективного гидродинамического взаимодействия.

Существуют различные подходы и модели, учитывающие указанное взаимодействие пузырьков в кластере [1–5]. Чем меньше расстояние между пузырьками по сравнению с их размерами, тем точнее нужно учитывать гидродинамическое взаимодействие пузырьков. Так, например, модели [2–4] имеют 2-й или 3-й порядок точности, а модель с произвольным порядком точности в настоящее время отсутствует.

В работах [6, 7] приведены результаты экспериментов, в которых зарегистрировано производство нейтронов и ядер трития при акустическом воздействии на кластеры пузырьков. При этом замечено, что появление нейтронной эмиссии, т.е. степень сжатия пузырьков, зависит от формы кластера.

### 1. Математическая модель

Рассмотрим пузырьковый кластер (рис. 1), состоящий из  $N$  газовых пузырьков, как компактное образование в большом объеме жидкости [1–4, 8–10]. Очевидно, что в плотном кластере гидродинамическое взаимодействие может приводить к сильной деформации поверхности пузырьков, трудно поддающейся теоретическому учету. Поэтому будем предполагать кластер достаточно разреженным, чтобы пузырьки сохраняли свою сферическую форму.

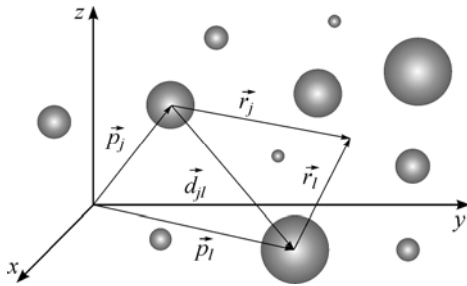
Составим систему уравнений динамики кластера из уравнений движения пузырьков в жидкости с учетом их гидродинамического взаимодействия [4], но дополнительно учтем теплообмен пузырьков с окружающей жидкостью.

Уравнения движения пузырьков имеют вид:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}_n}{c_l}\right) R_n \ddot{R}_n + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{R}_n}{2c_l}\right) \dot{R}_n^2 - \frac{P_n}{\rho_l} \left(1 + \frac{\dot{R}_n}{c_l}\right) - \frac{R_n}{\rho_l c_l} \frac{dP_n}{dt} = \frac{\dot{P}_n^2}{4} - \\ & - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^N \left\{ \frac{R_l^2 \ddot{R}_l + 2R_l \dot{R}_l^2}{d_{nl}} + \frac{R_l^2}{2d_{nl}^3} (\bar{p}_n - \bar{p}_l) \cdot (R_l \ddot{p}_n + \dot{R}_l \dot{p}_n + 5\dot{R}_l \dot{p}_l) - \right. \\ & \left. - \frac{R_l^3}{4d_{nl}^3} \left[ \dot{p}_l \cdot (\dot{p}_n + 2\dot{p}_l) + \frac{3}{d_{nl}^2} [\dot{p}_l \cdot (\bar{p}_l - \bar{p}_n)] [(\bar{p}_n - \bar{p}_l) \cdot (\dot{p}_n + 2\dot{p}_l)] \right] \right\}, \\ & \frac{1}{3} R_n \ddot{p}_n + \dot{R}_n \dot{p}_n = \frac{\bar{F}_n}{2\pi\rho_l R_n^2} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^N \left\{ \frac{\bar{p}_n - \bar{p}_l}{d_{nl}^3} (R_n R_l^2 \ddot{R}_l + 2R_n R_l \dot{R}_l^2 + \dot{R}_n \dot{R}_l R_l^2) - \right. \\ & \left. - \frac{R_l^2}{2d_{nl}^3} [R_n R_l \ddot{p}_l + (\dot{R}_n R_l + 5R_n \dot{R}_l) \dot{p}_l] + \right. \\ & \left. + \frac{3R_l^2 (\bar{p}_n - \bar{p}_l)}{2d_{nl}^5} [(\bar{p}_n - \bar{p}_l) \cdot [R_n R_l \ddot{p}_l + (\dot{R}_n R_l + 5R_n \dot{R}_l) \dot{p}_l]] \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $R_n, R_l$  — радиусы  $n$ -го и  $l$ -го пузырьков,  $d_{nl} = |\bar{p}_n - \bar{p}_l|$ ,  $\bar{p}_n, \bar{p}_l$  — векторы позиций центров  $n$ -го и  $l$ -го пузырьков,  $\bar{F}_n$  — межфазная сила,  $\rho_l$  — плотность жидкости,  $c_l$  — скорость звука в жидкости, точкой обозначено дифференцирование по времени. Уравнение (1) описывает радиальные пульсации  $n$ -го пузырька, а уравнение (2) — его поступательное движение;  $P_n$  имеет вид:

$$P_n = P_{gn} - 2\sigma/R_n - 4\eta\dot{R}_n/R_n - P_0 - P_{ex}(\bar{p}_n), \quad (3)$$



где  $P_{gn}$  — давление газа в пузырьке,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $P_0$  — гидростатическое давление,  $P_{ex}$  — внешнее акустическое давление в пределах  $n$ -го пузырька.

Рис. 1. Схема пузырькового кластера.

Межфазная сила представляет собой силу вязкого трения Левича [4]:

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{dn} = -12\pi\eta R_n \left( \dot{\vec{p}}_n - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq n}}^N \vec{v}_{ln} \right), \quad (4)$$

где  $\vec{v}_{ln}$  — скорость жидкости, генерируемая  $l$ -м пузырьком и действующая на  $n$ -й. С точностью до членов  $1/d_{jl}^3$  скорость  $\vec{v}_{ln}$  имеет вид [4]:

$$\vec{v}_{ln} = \frac{R_l^2 \dot{R}_l (\bar{p}_n - \bar{p}_l)}{d_{nl}^3} + \frac{R_l^3}{2d_{nl}^3} \left\{ \frac{3(\bar{p}_n - \bar{p}_l)}{d_{nl}^2} [\dot{\vec{p}}_l \cdot (\bar{p}_n - \bar{p}_l)] - \dot{\vec{p}}_l \right\}. \quad (5)$$

При описании теплообмена газовых пузырьков с жидкостью будем использовать двухтемпературную схему, в рамках которой уравнение для давления газа внутри пузырьков имеет следующий вид [11]:

$$\frac{dP_{gn}}{dt} = \frac{3(\gamma-1)}{4\pi R_n^3} q_n - \frac{3\gamma P_{gn}}{R_n} \dot{R}_n, \quad (6)$$

Выражение для потока тепла к единице поверхности  $n$ -го пузырька  $q_n$  примем в виде [11]:

$$q_n = 2\pi R_n \lambda_g \text{Nu}_{gn} (T_l - T_{gn}),$$

$$\text{Nu}_{gn} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_{gn}}, & \text{Pe}_{gn} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe}_{gn} < 100, \end{cases}$$

$$\text{Pe}_{gn} = 12(\gamma-1) \cdot \frac{T_l}{|T_{gn} - T_l|} \cdot \frac{R_n |\dot{R}_n|}{D_{gn}}, \quad (7)$$

$$D_{gn} = \lambda_g / (c_{pg} \rho_{gn}),$$

$$\rho_{gn} = \rho_{gn0} (R_{i0}/R_i)^3,$$

где  $\text{Nu}_{gn}$  — число Нуссельта,  $\text{Pe}_{gn}$  — число Пекле,  $T_l$  — температура жидкости,  $T_{gn}$  — температура газа в  $n$ -ом пузырьке,  $D_{gn}$  — коэффициент температуропроводности газа,  $\lambda_g$  — коэффициент теплопроводности газа,  $c_{pg}$  — теплоемкость газа при постоянном давлении,  $\gamma$  — показатель адиабаты газа,  $\rho_{gn}$  — плотность газа в  $n$ -ом пузырьке.

Уравнение состояния совершенного газа примем в виде:

$$P_{gn} = \rho_{gn} R_g T_{gn}, \quad (8)$$

где  $R_g$  — универсальная газовая постоянная.

Для решения системы уравнений (1)–(8) необходимо задать начальные координаты, скорости, радиусы, радиальные скорости пузырьков, давление газа в пузырьках, а также закон изменения давления жидкости вдали от пузырькового кластера.

## 2. Методика численного решения уравнений модели пузырькового кластера

Система уравнений (1)–(8) решалась численно. В качестве метода интегрирования использовался метод Рунге–Кутты–Мерсона [12], позволяющий адаптировать шаг

интегрирования в процессе расчета, сохраняя приемлемую точность, и в то же время минимизировать время расчета. Однако применение этого метода требует его предварительной модификации в связи с необходимостью приведения уравнений (1) и (2) к виду Коши.

Рассмотрим методику численного решения уравнений (1) и (2). Предварительно заметим, что уравнение (1) можно записать в матричной форме:

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (9)$$

где матрица  $A$ , вектора  $\bar{x}$  и  $\bar{b}$  имеют следующий вид:

$$a_{mk} = \delta_{mk} \left( \left( 1 - \frac{\dot{R}_k}{c_l} \right) R_k + \frac{4\eta}{\rho_l c_l} \right) + (1 - \delta_{mk}) \frac{R_k^2}{d_{mk}}, \quad (10)$$

$$x_k = \ddot{R}_k, \quad (11)$$

$$b_m = \frac{\dot{P}_m^2}{4} + \frac{P_m}{\rho_l} \left( 1 + \frac{\dot{R}_m}{c_l} \right) + \frac{R_m}{\rho_l c_l} \left( \frac{dP_m}{dt} + \frac{4\eta \ddot{R}_m}{R_m} \right) - \left( \frac{3}{2} - \frac{\dot{R}_m}{2c_l} \right) \dot{R}_m^2 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^N \left\{ \frac{2R_l \dot{R}_l^2}{d_{ml}} + \frac{R_l^2}{2d_{ml}^3} (\bar{p}_m - \bar{p}_l) \cdot (R_l \ddot{p}_m + \dot{R}_l \dot{p}_m + 5\dot{R}_l \dot{p}_l) - \frac{R_l^3}{4d_{ml}^3} \left[ \dot{p}_l \cdot (\dot{p}_m + 2\dot{p}_l) + \frac{3}{d_{ml}^2} [\dot{p}_l \cdot (\bar{p}_l - \bar{p}_m)] [(\bar{p}_m - \bar{p}_l) \cdot (\dot{p}_m + 2\dot{p}_l)] \right] \right\}, \quad (12)$$

В соответствии с выбранным методом для получения решения на  $(n + 1)$ -ом шаге для каждой неизвестной необходимо последовательно определить пять коэффициентов. При этом для нахождения каждого из коэффициентов в уравнении (1) необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений (9)–(12) относительно вектора  $\bar{x}$ , содержащего старшие производные  $\ddot{R}_k$ .

С ростом числа пузырьков в кластере возрастает порядок системы (1)–(2), и эффективность прямых методов численного решения системы линейных алгебраических уравнений резко падает. Поэтому для решения ия системы линейных алгебраических уравнений большого порядка уместно использовать итерационные или вариационно-итерационные методы решения, такие как метод Зейделя [13], метод последовательной верхней релаксации или градиентные методы [14]. Тем не менее, объем вычислений быстро возрастает при увеличении количества пузырьков в кластере. Поэтому становится целесообразным распараллеливание кода решателя, к примеру, с помощью стандарта OpenMP [15].

### 3. Результаты расчетов

При моделировании динамики кластера можно варьировать его конфигурацию, число и размер пузырьков, разреженность ( $d_{ij}/R_{\max}$ ), сорт газа в пузырьках, сорт жидкости, тип и амплитуду внешнего возмущения.

Ниже представлены результаты исследования влияния конфигурации кластера и типа внешнего возмущения на динамику пузырьков в кластере. Они проиллюстрированы на примере трех конфигураций (рис. 2).

В первом случае кластер представлял собой совокупность трех концентрически вложенных друг в друга додекаэдров (рис. 1а), причем додекаэдры вписаны в сферы радиусов 5, 10, 15 мм соответственно. Во втором — это линейный стример (рис. 1б) с начальной длиной, равной 300 мм. В третьем — кластер со случайным расположением пузырьков в сфере радиуса 15 мм (рис. 1с) таким образом, чтобы  $d_{ij}/R_{\max} \geq 25$ , где

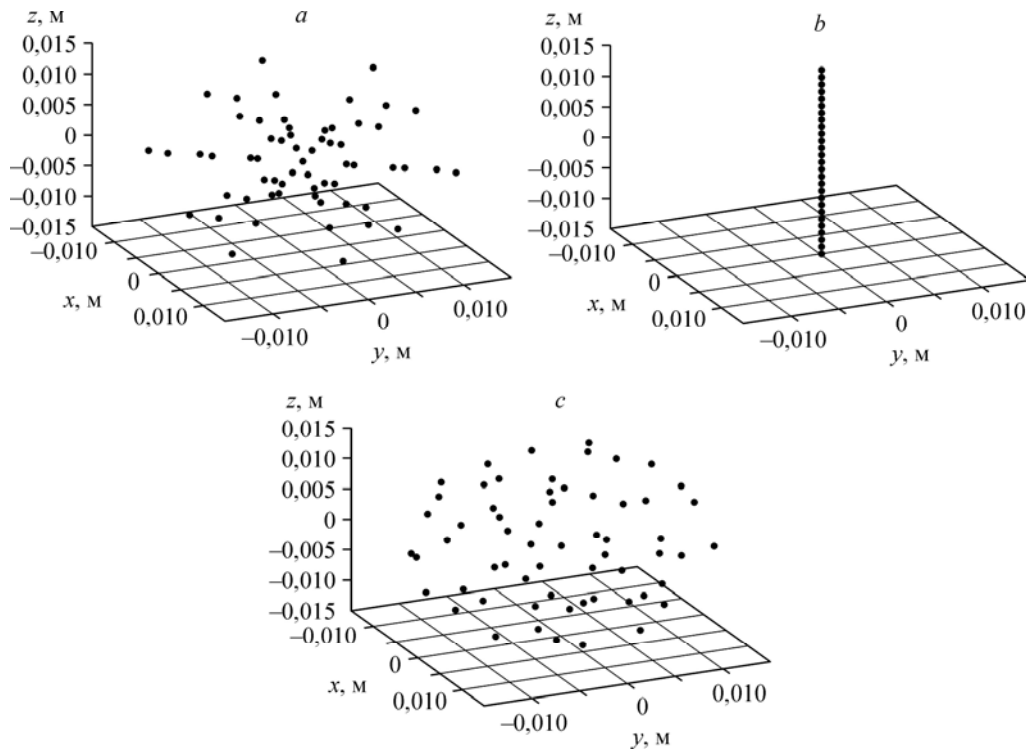


Рис. 2. Схемы расположения пузырьков в кластерах.

*a* — кластер из трех вложенных друг в друга додекаэдров, *b* — линейный кластер, *c* — шаровой стохастический кластер.

$R_{\max}$  — максимальный начальный радиус пузырька в кластере. Общее количество пузырьков для всех случаев одинаково и равно 61. Начальные радиусы центрального и периферийных пузырьков для всех кластеров одинаковы и равны  $R_0 = 0,25$  мм. Для обезразмеривания радиусов пузырьков использовались начальные значения их радиусов.

Влияние типа внешнего возмущения на динамику пузырьков проиллюстрировано на двух примерах. В первом в качестве внешнего воздействия  $P_{\text{ex}}$  в формуле (3) задавалось мгновенное сжатие, когда давление во всем объеме жидкости повышалось на заданную величину  $\Delta P$ :

$$P_{\text{ex}}(\bar{p}_n) = \begin{cases} P_0, & t < 0, \\ P_0 + \Delta P, & t \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Во втором — задавалось гармоническое возмущение заданной частоты:

$$P_{\text{ex}}(\bar{p}_n) = P_0 - \Delta P \cdot \sin(\omega t). \quad (14)$$

Перепад давления  $\Delta P$  для сжатия (13) принимался равным 0,3 МПа, для гармонического возмущения (14) — 0,05 МПа. Частота гармонического возмущения принималась близкой к собственной частоте пузырьков в кластере  $\omega \approx 64244 \text{ с}^{-1} = 2\pi \cdot 10,2 \text{ кГц}$ .

Параметры жидкости и газа полагались следующими: жидкость — 60-процентный раствор глицерина в воде (скорость звука  $c_l = 1500$  м/с, плотность  $\rho_l = 1156$  кг/м<sup>3</sup>, кинематическая вязкость  $\nu = 9,52 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$  Н/м), газ — воздух (показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ , удельная изобарная теплоемкость  $c_{pg} = 1007$  Дж/(кг·К), коэффициент теплопроводности  $\lambda_g = 0,0258$  Вт/(м·К)). Начальное давление принималось равным  $P_0 = 0,1$  МПа, температура жидкости —  $T_l = 293$  К.

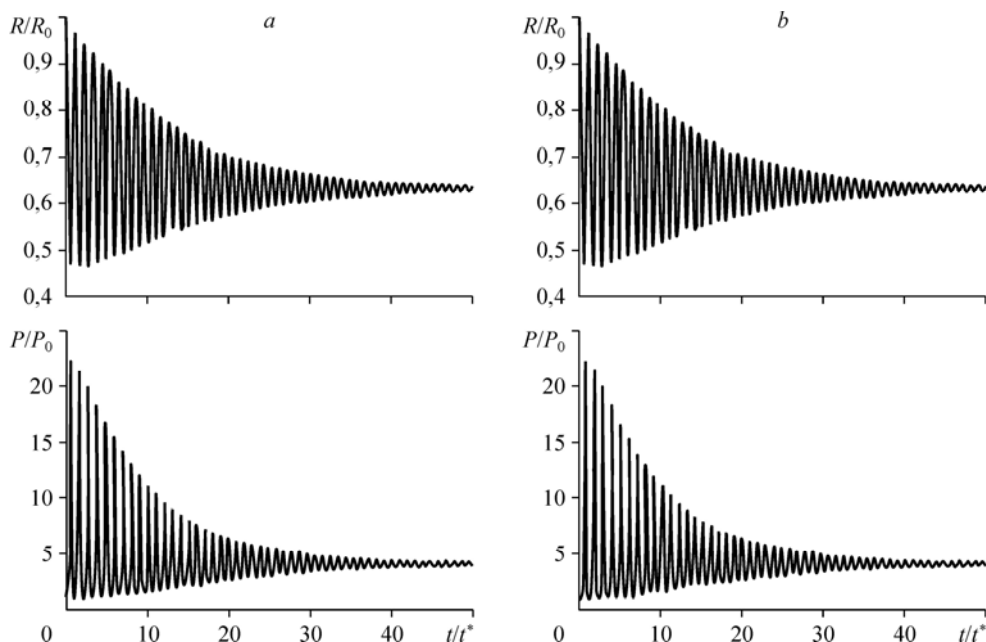


Рис. 3. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (а) и периферийного (b) пузырьков в случае пузырькового кластера в форме трех вложенных друг в друга додекаэдров при мгновенном сжатии (13) без взаимодействия между пузырьками.

В качестве характерного времени выбиралась величина  $t^* = R_0 \sqrt{\rho_l / P_0} \approx 2,7 \cdot 10^{-5}$  с, которая соответствует времени схлопывания полой сферы радиуса  $R_0$  в жидкости с плотностью  $\rho_l$  и давлением  $P_0$ .

На рис. 3–9 приведены результаты расчетов динамики вышеописанных пузырьковых кластеров при внешних воздействиях (13) и (14): зависимости безразмерного радиуса  $R/R_0$

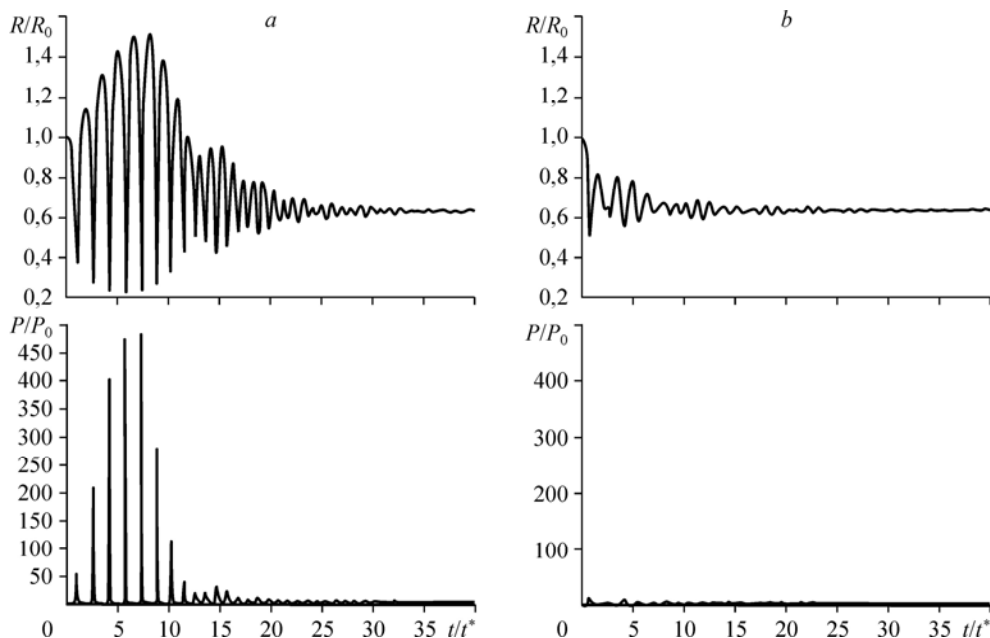


Рис. 4. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (а) и периферийного (b) пузырьков в случае пузырькового кластера в форме трех вложенных друг в друга додекаэдров при мгновенном сжатии (13).

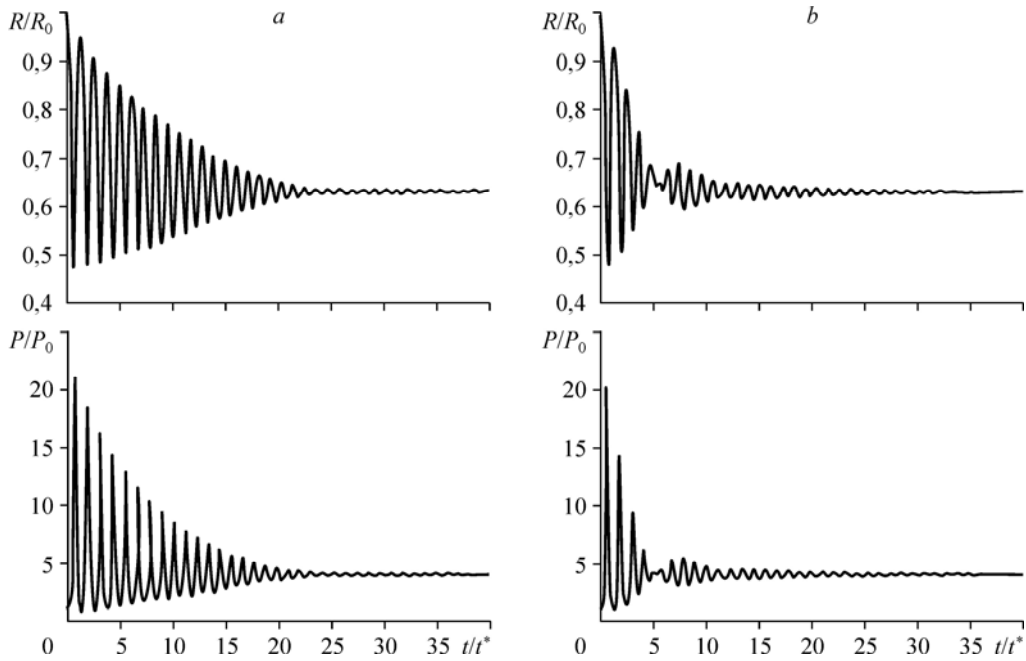


Рис. 5. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (а) и периферийного (b) пузырьков в случае струмера при мгновенном сжатии (13).

и безразмерного давления  $R/R_0$  от безразмерного времени  $t/t^*$  для центрального (а) и периферийного (b) пузырьков.

Чтобы оценить роль гидродинамического взаимодействия пузырьков, приведем результаты расчета динамики пузырькового кластера без взаимодействия между пузырьками. Как видно из рис. 3, динамика центрального и периферийных пузырьков

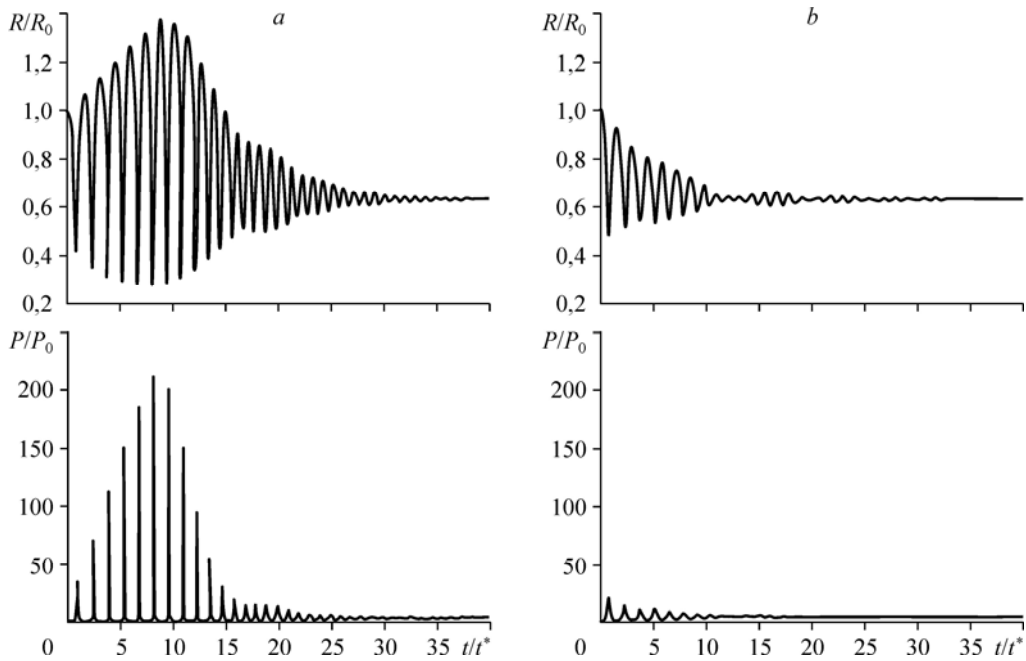


Рис. 6. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (а) и периферийного (b) пузырьков в случае стохастического кластера при мгновенном сжатии (13).

не отличается друг от друга и совпадает с динамикой одиночного пузырька в безграничной жидкости при прочих равных условиях.

Если учитывать межпузырьковое взаимодействие, то картина кардинально меняется. На рис. 4–6 видно, что в случае кластера из додекаэдров и стохастического кластера для центрального пузырька достигаются значительные амплитуды сжатия и, как следствие, значительное увеличение давления по сравнению с периферийными пузырьками. Максимальная температура для центрального пузырька составляет  $\approx 2000$  К и  $\approx 1000$  К для кластера из додекаэдров и стохастического кластера соответственно. В случае стримера центральный пузырек сжимается меньше, чем в случае трех додекаэдров и стохастического кластера. Максимальное значение давления, достигаемое в этом случае как для центрального, так и для периферийного пузырька, не превосходит 2,2 МПа. Амплитуда колебаний на протяжении всего времени моделирования не превосходит начального радиуса пузырька. Таким образом, конфигурация кластера может оказывать сильно влияние на динамику пузырьков. Давления и температуры, достигаемые в кластере из додекаэдров и стохастическом кластере, многократно превосходят давления и температуры, имеющие место в линейном стримере, что качественно согласуется с экспериментальными данными [6, 7].

В случае гармонического возмущения (14) (рис. 7–9) в центральном пузырьке для кластера из додекаэдров достигаются на порядки более высокие значения давления, чем в случае стримера и стохастического кластера. Установлено, что частота возмущения влияет на амплитуду колебаний пузырьков. Амплитуда растет с приближением частоты к собственной частоте колебаний пузырьков. Кроме того, расчеты показали, что при одной и той же амплитуде возмущения  $\Delta P$  в случае гармонического возмущения (14) степень сжатия центрального пузырька, а следовательно, достигаемые давления и температуры выше, чем при мгновенном сжатии (13). Характерная длительность пика сжатия

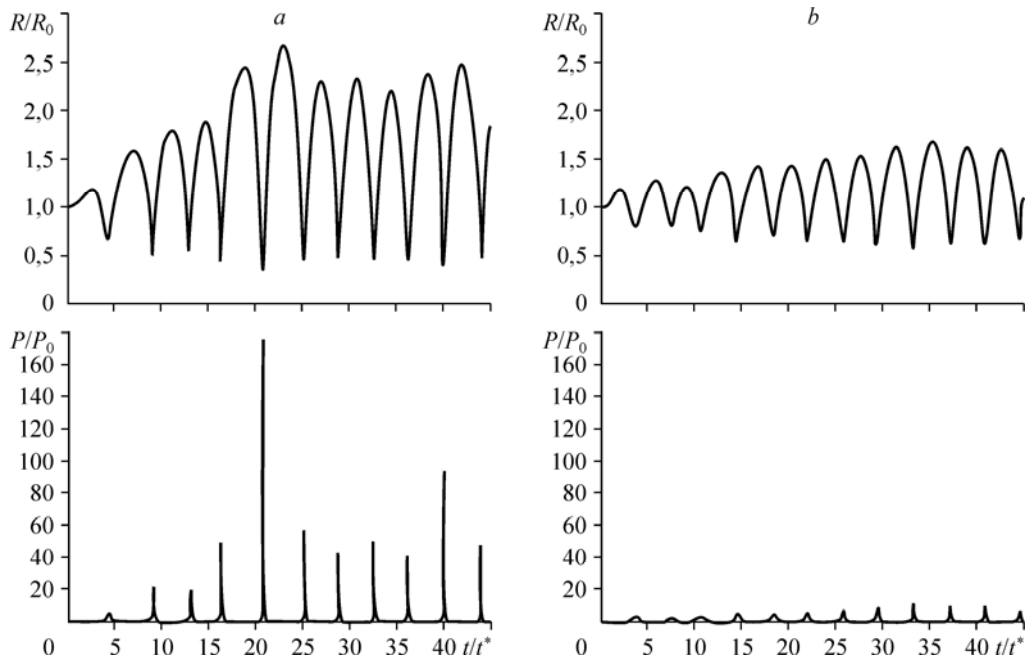


Рис. 7. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (a) и периферийного (b) пузырьков в случае пузырькового кластера в форме трех вложенных друг в друга додекаэдров при внешнем гармоническом возмущении (14).



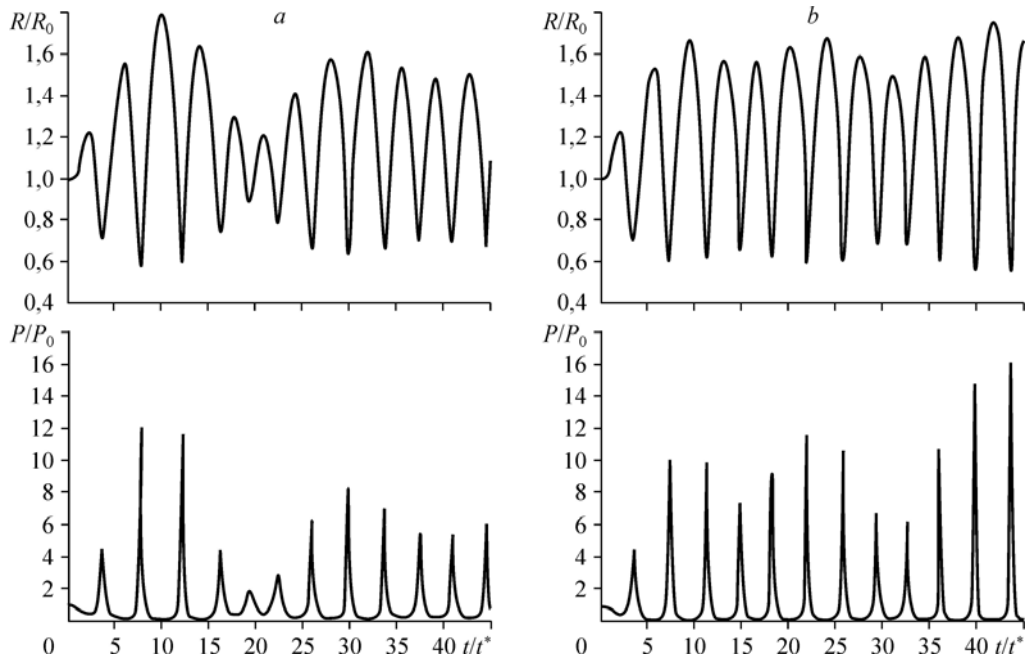


Рис. 8. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (*a*) и периферийного (*b*) пузырьков в случае стримера при внешнем гармоническом возмущении (14).

для всех случаев составляет  $\sim 10^{-7} - 10^{-9}$  с. Диссипация кинетической энергии радиального движения пузырьков из-за межфазного теплообмена приводит к быстрому затуханию колебаний пузырьков.

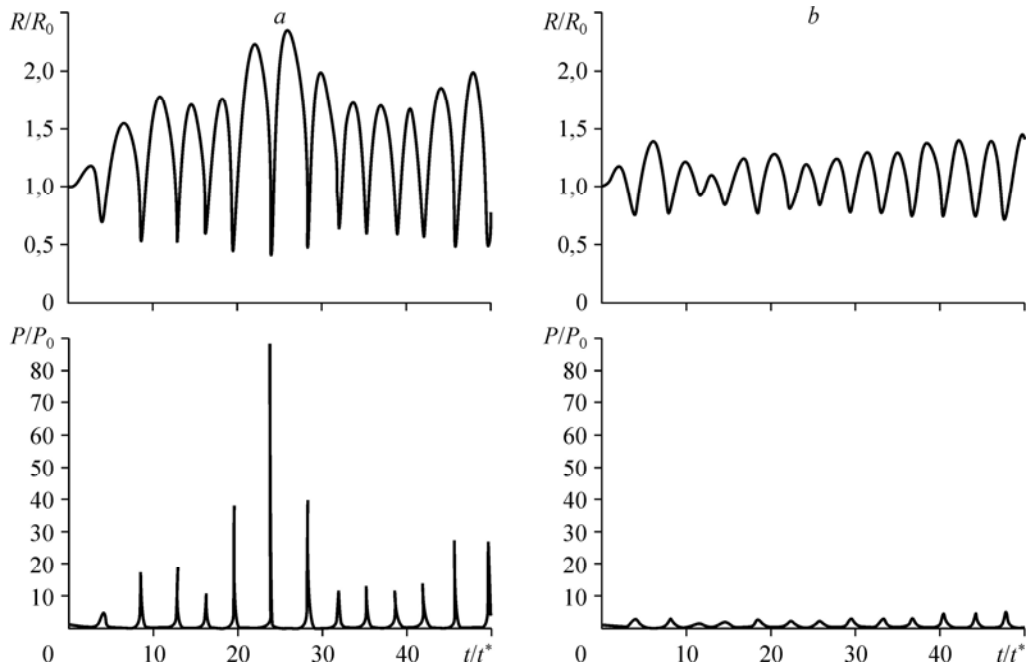


Рис. 9. Зависимость от времени давления и радиуса центрального (*a*) и периферийного (*b*) пузырьков в случае стохастического кластера при внешнем гармоническом возмущении (14).

### Заключение

Исследована динамика пузырьковых кластеров разных конфигураций при воздействии на них различных типов возмущений. Получены следующие результаты.

1. Выполнено численное моделирование нелинейной динамики пузырьковых кластеров разных конфигураций при воздействии на них мгновенного сжатия и гармонического возмущения заданной частоты. Показано, что в кластере из додекаэдров и стохастическом кластере в центральном пузырьке достигаются значительные амплитуды сжатия и, как следствие, значительное увеличение давления и температуры по сравнению с периферийными пузырьками.

2. Конфигурация кластера может сильно влиять на его динамику. Давления, достигаемые в кластере из додекаэдров и стохастическом кластере, многократно превосходят давления в стримере, что качественно согласуется с экспериментальными данными.

3. Частота гармонического возмущения влияет на амплитуду колебаний пузырьков в кластере. Амплитуда растет с приближением частоты к собственной частоте колебаний пузырька.

4. В случае гармонического возмущения степень сжатия пузырьков выше, чем при мгновенном сжатии той же амплитуды.

### Список литературы

1. **Аганин А.А., Давлетшин А.И.** Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 6. С. 89–102.
2. **Воинов О.В., Головин А.М.** Уравнения Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 117–123.
3. **Luther S., Mettin R., Lauterborn W.** Modeling acoustic cavitation by a lagrangian approach // Proc. of the 15th Int. Symp. On Nonlinear Acoustics, ISNA 15, 1–4 September, 1999, Germany. N.Y.: American Institute of Physics, AIP Conf. Proc. 524, 2000. P. 355–358.
4. **Doinikov A.A.** Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields // Acoustical Society of America. 2004. P. 821–827.
5. **Gubaidullin A.A., Nigmatulin N.I.** Numerical simulation of propagation of shock waves in bubbly liquids // Proc. of The 2nd Intern. Conf. on Multiphase Flow '95-Kyoto April 3–7, 1995. P. 39–47.
6. **Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C.** Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. 2002. Vol. 295. P. 1868–1873.
7. **Taleyarkhan R.P., West C.D., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C., Xu Y.** Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // Phys. Review Lett. 2006. Vol. 96. P. 034301-1–034301-4.
8. **Амелькин С.В., Санников И.Н.** Динамика пузырьков в кластере при акустическом воздействии // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2002. Вып. 121. С. 7–11.
9. **Губайдуллин А.А., Санников И.Н.** Волны в жидкости с облаками пузырьков // IX Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. 2. Нижний Новгород, 2006. С. 66.
10. **Reddy J., Szeri A.J.** Coupled dynamics of translation and collapse of acoustically driven microbubbles // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 4. P. 1346–1352.
11. **Нigmatulin Р.И.** Динамика многофазных сред: в 2 т. М.: Наука, 1987.
12. **Мудров А.Е.** Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП «РАСКО», 1991. С. 176–203.
13. **Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.** Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. С. 17–47, 150–175.
14. **Зализняк В.Е.** Численные методы. Основы научных вычислений: уч. пособие для бакалавров / 2-е изд., перераб. и доп. Серия: Бакалавр. М.: Изд-во Юрайт, 2012. 365 с.
15. **Анотонов А.С.** Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP: уч. пособие. М.: Изд-во МГУ, 2012. 339 с.

*Статья поступила в редакцию 3 октября 2014 г.*