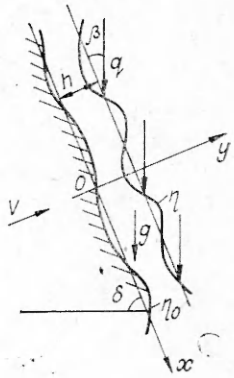
УДК 532.51.013.4

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА, ОБРАЗУЮЩЕЙСЯ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ

Ю. П. Зорин, О. Ю. Мальцев

(*Москва*)

Гидродинамические процессы в сварочной ванне при электронно-лучевой сварке с глубоким проплавлением играют важную роль, так как процессами переноса жидкого металла в зоне обработки определяется большинство дефектов при формировании сварных швов (полости в объеме шва, колебания глубины проплавления по длине шва), а в ряде случаев гидродинамика определяет производительность обработки. Однако полное исследование гидродинамических процессов сильно усложняется их взаимосвязью с процессами теплопереноса, испарения и взаимодействия паров металла с электронным потоком. Поэтому на первом этапе исследования необходимы определенные упрощения. В данной работе в качестве первого приближения для течения металла вдоль фронта плавления при электронно-лучевой сварке с глубоким проплавлением рассматривается плоское течение пленки расплавленного металла под действием силы тяжести и импульса электронов. В работе определяется стационарное распределение функции тока и температуры, соответствующее такому течению, и исследуется гидродинамическая устойчивость этого стационарного течения относительно бесконечно малых двумерных возмущений. Схема взаимодействия высококонцентрированного потока электронов с металлом, в результате которого образуется жидкая пленка, показана на фиг. 1. Полуограниченный массив металла подается со скоростью V, направленной по оси y; граница $y = \eta_0$ — поверхность фазового перехода из твердого состояния в жидкое, а при $y = \eta$ происходит фазовый переход из жидкого состояния в газообразное под воздействием потока электронов с концентрацией энергии $q \sim 10^9$ Вт/м², направленного под углом β к поверхности металла и равномерно распределенного вдоль всей оси x. Поверхность металла составляет угол δ с горизонтом. Процесс происходит в вакууме. Взаимодействие потока электронов с парами металла не учитывается.



Фиг. 1

1. Вывод системы уравнений для амплитуд возмущений. В безразмерных переменных для плоского течения имеем следующие уравнения Навье — Стокса, описывающие движение вязкой жидкости:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\frac{\partial p_{\text{ж}}}{\partial x}+\frac{gh\sin\delta}{U_m^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial p_{\text{ж}}}{\partial y}+\frac{gh\cos\delta}{U_m^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi,$$

где ψ — функция тока; $p_{\text{ж}}$ — давление в жидкости.

При записи (1.1) за характерные значения длины и скорости соответственно приняты средняя толщина жидкой пленки h и максимальная величина x составляющей скорости течения пленки U_m, достигаемая на верхней границе пленки при стационарном течении. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = U_m h/\nu$, где ν — кинематический коэффициент вязкости расплавленного металла.

При исключении $p_{\text{ж}}$ из уравнений (1.1) следует уравнение для функции тока

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\tau}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\Delta\psi. \tag{1.2}$$

Обезразмеренные уравнения теплопроводности для жидкой и твердой фаз записываются следующим образом:

$$\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial\tau}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re\,Pr}}\Delta t_{\text{ж}}; \tag{1.3}$$

$$(1.4)\qquad \frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial \tau}+v\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}_{\text{т}}}\Delta t_{\text{т}}.$$

Здесь $\mathrm{Pr}=\nu/a_{\text{ж}}$ — число Прандтля для расплавленного металла; $\mathrm{Pr}_{\text{т}}=\nu/a_{\text{т}}$; $a_{\text{ж}}$ и $a_{\text{т}}$ — коэффициенты температуропроводности жидкого и твердого металла; $v=V/U_m$. За характерное значение температуры принята максимальная температура жидкого металла T_m, достигаемая на верхней границе пленки при стационарном течении.

Решения уравнений (1.2)—(1.4) должны удовлетворять ряду граничных условий. В безразмерной форме эти условия имеют следующий вид: условия «прилипания» при $y=\eta_0$

$$(1.5)\qquad \partial\psi/\partial y=0,\quad -\partial\psi/\partial x=v;$$

условия плавления при $y=\eta_0$

$$(1.6)\qquad t_{\text{ж}}=T_{\text{пл}}/T_m,\quad t_{\text{т}}=T_{\text{пл}}/T_m,$$

где $T_{\text{пл}}$ — температура плавления металла;
условие непрерывности потока энергии при $y=\eta_0$

$$(1.7)\qquad -\eta_{0x}\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial x}+\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial y}=\frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda_{\text{ж}}}\left(-\eta_{0x}\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial x}+\frac{\partial t_{\text{т}}}{\partial y}\right)+\frac{h\rho VL_{\text{пл}}}{\lambda_{\text{ж}}T_m},$$

где $\eta_{0x}=\partial\eta_0/\partial x$, $\lambda_{\text{т}}$ и $\lambda_{\text{ж}}$ — коэффициенты теплопроводности твердого и жидкого металла, ρ — плотность металла (принимается одинаковой для твердой и жидкой фаз), $L_{\text{пл}}$ — удельная теплота плавления;
условие на бесконечно удаленной границе металла

$$(1.8)\qquad t_{\text{т}}=T_\infty/T_m \text{ при } y=-\infty,$$

где $T_\infty=\mathrm{const}$;
условие непрерывности потока вещества при $y=\eta$

$$(1.9)\qquad \left(-\eta_x\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}-\eta_\tau\right)\frac{1}{\sqrt{1+\eta_x^2}}=\rho_{\text{п}}v_{\text{пn}},$$

где $\eta_x=\partial\eta/\partial x$, $\eta_\tau=\partial\eta/\partial\tau$, $\rho_{\text{п}}$ — плотность паров металла, отнесенная к плотности жидкого металла, $v_{\text{пn}}$ — нормальная составляющая безразмерной скорости паров металла;
условие непрерывности тангенциальной составляющей потока импульса при $y=\eta$

$$(1.10)\qquad -\frac{4}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\frac{1-\eta_x^2}{1+\eta_x^2}=$$
$$=q\sqrt{2m_e/(\bar{e}u_e)}\Big/(\rho U_m^2)\left(\frac{\sin 2\beta}{2}\frac{1-\eta_x^2}{1+\eta_x^2}+\cos 2\beta\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2}\right),$$

где m_e и $\bar{e}$ — масса и заряд электрона, u_e — ускоряющее напряжение;
условие непрерывности нормальной составляющей потока импульса при $y=\eta$

$$(1.11)\qquad p_{\text{ж}}+\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{1-\eta_x^2}{1+\eta_x^2}+\frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2}=p_{\text{п}}+\rho_{\text{п}}v_{\text{пn}}^2,$$

где $p_{\text{ж}}$ и $p_{\text{п}}$ — безразмерные давления в жидкости и в парах металла;
условие непрерывности потока энергии при $y=\eta$

$$(1.12)\qquad Q(\sin\beta+\eta_x\cos\beta)\frac{1}{\sqrt{1+\eta_x^2}}=\rho_{\text{п}}v_{\text{пn}}\left(\frac{v_{\text{пn}}^2}{2}+L\right)+$$
$$+\lambda\left(-\eta_x\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial x}+\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial y}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\eta_x^2}},$$

где $Q = q/(\rho U_m^3)$, $L = L_{исп}/U_m^2$, $L_{исп}$ — удельная теплота испарения металла, $\lambda = \lambda_ж T_m/(h\rho U_m^3)$;
условие равенства температур жидкости и паров металла при $y = \eta$

$$t_ж = t_п, \tag{1.13}$$

где $t_п$ — температура паров металла;
уравнение Менделеева — Клапейрона

$$p_п = \rho_п R T_m t_п / U_m^2, \tag{1.14}$$

где R — универсальная газовая постоянная;
уравнение Клапейрона — Клаузиуса

$$p_ж = B/(\rho U_m^2) \exp[-L_{исп}/(RT_m t_ж)] \quad \text{при} \quad y = \eta, \tag{1.15}$$

где $B = p_0 \exp[L_{исп}/(RT_к)]$, $T_к$ — температура кипения металла при атмосферном давлении p_0;
условие Жуге [1]

$$v_{пn} = a/U_m \text{ при } y = \eta, \tag{1.16}$$

где $a = \sqrt{\gamma R T_m t_п}$ — скорость звука в парах металла, γ — показатель адиабаты.

Имеется точное решение уравнений (1.1), (1.3), (1.4), не зависящее от времени:

$$\psi_0 = A_1 y + B_1 y^2 - A_1/k_1 \exp(k_1 y) + D_1 x,$$

$$t_{ж0} = A_2 + B_2 \exp(k_2 y), \quad t_{т0} = A_3 + B_3 \exp(k_3 y),$$

где $k_1 = Vh/\nu$; $k_2 = Vh/a_ж$; $k_3 = Vh/a_т$; $B_1 = gh \sin\delta/(2VU_m)$. Значения коэффициентов A_1, A_2, A_3, B_2, B_3, D_1 находятся из граничных условий, записываемых в стационарном случае на границах $y = -\infty$, $y = 0$ и $y = 1$: $A_1 = \nu(g \sin\delta/V - \tau_e/\mu)/(VU_m \exp k_1)$, где $\tau_e = q\sqrt{2m_e/(\bar{e}u_e)} \times \times \sin\beta \cos\beta$, $\mu = \rho\nu$ — динамический коэффициент вязкости жидкого металла; $A_2 = T_{пл}/T_m - (1 - T_{пл}/T_m)/(\exp k_2 - 1)$, $A_3 = T_\infty/T_m$, $B_2 = (1 - T_{пл}/T_m)/(\exp k_2 - 1)$, $B_3 = (T_{пл} - T_\infty)/T_m$, $D_1 = -V/U_m$.

Из граничных условий находятся также температура T_m, толщина жидкой пленки h и скорость подачи V. Эти величины зависят от концентрации энергии q, угла β и теплофизических характеристик металла. Так, температура T_m определяется из трансцендентного уравнения

$$q \sin\beta = B \exp[-L_{исп}/(RT_m)][c_ж(T_m - T_{пл}) + c_т(T_{пл} - T_\infty) + L_{пл} + L_{исп} + \gamma R T_m/2]/[(\gamma + 1)\sqrt{RT_m/\gamma}],$$

где $c_ж$ и $c_т$ — удельные теплоемкости жидкого и твердого металла. Скорость подачи массива металла

$$V = q \sin\beta/\{[c_ж(T_m - T_{пл}) + c_т(T_{пл} - T_\infty) + L_{пл} + L_{исп} + \gamma R T_m/2]\rho\}.$$

Толщина жидкой пленки

$$h = \frac{a_ж}{V} \ln\left(1 + \frac{c_ж}{c_т} \frac{T_m - T_{пл}}{T_{пл} - T_\infty + L_{пл}/c_т}\right).$$

Можно, однако, установить, что стационарное течение является неустойчивым при некотором соотношении параметров задачи. Положим

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad t_ж = t_{ж0} + t_{ж1}, \quad t_т = t_{т0} + t_{т1}, \quad \eta = 1 + \eta_1,$$

$$\eta_0 = 0 + \eta_{01}, \quad p_п = p_{п0} + p_{п1}, \quad \rho_п = \rho_{п0} + \rho_{п1}, \quad t_п = t_{п0} + t_{п1},$$

здесь $p_{п0}$, $\rho_{п0}$ и $t_{п0}$ — характеристики паров металла, соответствующие стационарному процессу; величины с индексом 1 — бесконечно малые плоские периодические возмущения, имеющие следующий вид:

$$(1.17)\quad \begin{aligned} &\psi_1 = f(y)\exp[i\alpha(x - c\tau)], && t_{ж1} = \varphi_ж(y)\exp[i\alpha(x - c\tau)],\\ &t_{т1} = \varphi_т(y)\exp[i\alpha(x - c\tau)], && \eta_1 = n\exp[i\alpha(x - c\tau)],\\ &\eta_{01} = n_0\exp[i\alpha(x - c\tau)], && p_{п1} = p_1\exp[i\alpha(x - c\tau)],\\ &\rho_{п1} = \rho_1\exp[i\alpha(x - c\tau)], && t_{п1} = t_1\exp[i\alpha(x - c\tau)], \end{aligned}$$

где α — волновое число; c — фазовая скорость возмущений.

Подставим (1.17) в уравнения (1.2)—(1.4). После линеаризации получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд возмущений функции тока и температур жидкой и твердой фаз

$$(1.18)\quad (u - c)(f'' - \alpha^2 f) - u''f = -\frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}}(f^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f) + \frac{ik_1}{\alpha\,\mathrm{Re}}(f''' - \alpha^2 f');$$

$$(1.19)\quad (u - c)\varphi_ж - t'_{ж0}f = -\frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}(\varphi''_ж - \alpha^2\varphi_ж) + \frac{ik_1}{\alpha\,\mathrm{Re}}\varphi'_ж;$$

$$(1.20)\quad -c\varphi_т = -\frac{i}{\alpha\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}_т}(\varphi''_т - \alpha^2\varphi_т) + \frac{ik_1}{\alpha\,\mathrm{Re}}\varphi'_т,$$

здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по y, $u = \partial\psi_0/\partial y$.

2. Решение системы уравнений для амплитуд возмущений. Считаем, что $\alpha\mathrm{Re}$ велико. Тогда уравнение (1.18) есть линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами и малым параметром $(\alpha\,\mathrm{Re})^{-1}$ при старшей производной. Его решение ищется, согласно [2], в виде суперпозиции частных решений

$$f(y) = C_1f_1(y) + C_2f_2(y) + C_3f_3(y) + C_4f_4(y),$$

где f_1 и f_2 — решения «невязкого» уравнения, которое получается из (1.18), если пренебречь вязкостью:

$$(2.1)\quad (u - c)(f'' - \alpha^2 f) - u''f = 0.$$

Решения уравнения (2.1) можно определить в виде разложения по степеням разности $y - y_c$, где y_c — точка, в которой $u(y_c) = c$,

$$(2.2)\quad f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(y - y_c)^k,\quad f_2 = 2E_2f_1\ln(y - y_c) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(y - y_c)^k.$$

Для коэффициентов разложений (2.2) справедливы рекуррентные соотношения

$$a_1 = 1,\quad a_2 = E_2,\quad a_{k+1} = E_{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}\left[\alpha^2(E_{k-1} - E_0a_k) + \sum_{j=2}^{k}\gamma_ja_j\right],$$

$$k \geqslant 2,\quad b_0 = 1,\quad b_1 = E_2,$$

$$b_{k+1} = \frac{k+2}{k}E_{k+2} + \frac{1}{k(k+1)}\left[\alpha^2(E_k - E_0b_k) + \sum_{j=1}^{k}\gamma_jb_j - {} - 2E_2\sum_{j=1}^{k+1}(2j - 1)a_jE_{k-j+2}\right],\quad k \geqslant 1,$$

$$\gamma_j = \alpha^2E_{k-j} + (k+1)(k+2-2j)E_{k-j+2},\quad E_k = \frac{u^{(k)}(y_c)}{k!\,u'(y_c)}.$$

Другая пара независимых частных решений уравнения (1.18) f_3 и f_4 находится в форме

$$(2.3)\quad f(y) = \exp\left(\int g_*dy\right),\quad g_*(y) = \sum_{m=0}^{m}(\alpha\,\mathrm{Re})^{\frac{1-m}{2}}g_m(y).$$

Подстановка (2.3) в уравнение (1.18) позволяет определить

$$g_0 = \pm\sqrt{i(u - c)},\quad g_1 = -\frac{5}{2}\frac{g'_0}{g_0} + \frac{k_1}{2},$$

в результате чего можно найти

$$f_{3,4} = (u-c)^{-5/4} \exp\left[+ \int\limits_{y_c}^{y} \sqrt{i\alpha \operatorname{Re}(u-c)}\, dy + \frac{k_1}{2} y \right].$$

Решения f_3 и f_4 вблизи $y = y_c$ находятся непосредственно из уравнения (1.18) при введении нового переменного $z = (y - y_c)/\varepsilon$, $\varepsilon = [\alpha \operatorname{Re} u'(y_c)]^{-1/3}$. Если искать решения $f(y) = \chi(z)$ в форме ряда по степеням $\varepsilon, \chi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \chi^{(k)}$, то после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε можно получить

$$\chi_1^{(0)} = z, \quad \chi_2^{(0)} = 1, \quad \chi_{3,4}^{(0)} = \int\limits_{\pm\infty}^{z} dz \int\limits_{\pm\infty}^{z} \sqrt{z} H_{1/3}^{(1,2)} \left[\frac{2}{3} (iz)^{3/2} \right] dz,$$

где $H_{1/3}^{(1)}$ и $H_{1/3}^{(2)}$ — функции Ганкеля. Асимптотика функций Ганкеля позволяет отождествить решения $f_{1,2,3,4}$ в соответствии с решениями $\chi_{1,2,3,4}$, а также определить нужную ветвь при обходе точки y_c

$$-7\pi/6 < \arg(y - y_c) < \pi/6.$$

Уравнение (1.19) — это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром $(\alpha \operatorname{Re})^{-1}$ при старшей производной. Его решение ищется в виде

$$\varphi_{ж}(y) = C_5 \varphi_{ж1}(y) + C_6 \varphi_{ж2}(y) + \varphi_{ж4}(y),$$

где $\varphi_{ж1,2}$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего (1.19),

$$(u-c)\varphi_{ж} = -\frac{i}{\alpha \operatorname{Re} \Pr} (\varphi_{ж}'' - \alpha^2 \varphi_{ж}) + \frac{ik_1}{\alpha \operatorname{Re}} \varphi_{ж}'; \tag{2.4}$$

$\varphi_{ж4}$ — частное решение уравнения (1.19).

Решения уравнения (2.4) находятся в виде

$$\varphi_{ж}(y) = \exp\left(\int h_* dy\right), \quad h_*(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha \operatorname{Re})^{\frac{1-m}{2}} h_m(y). \tag{2.5}$$

Подстановка (2.5) в уравнение (2.4) позволяет определить

$$h_0 = \pm \sqrt{i \Pr (u-c)}, \quad h_1 = -\frac{1}{2} \frac{h_0'}{h_0} + \frac{\Pr k_1}{2},$$

в результате чего можно найти

$$\varphi_{ж1,2} = (u-c)^{-1/4} \exp\left[\mp \int\limits_{y_c}^{y} \sqrt{i\alpha \operatorname{Re} \Pr (u-c)}\, dy + \frac{\Pr k_1}{2} y \right].$$

Частное решение уравнения (1.19) может быть предстэвлено асимптотическим разложением

$$\varphi_{ж4}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha \operatorname{Re})^{-m} \varphi_{ж4}^{(m)}(y). \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (1.19) и ограничиваясь первым членом разложения, получим $\varphi_{ж4} = t_0 f/(u-c)$.

Решения уравнения (1.20) ищутся тем же методом, что и решения однородного уравнения (2.4). В результате амплитуда возмущения температуры твердого металла представится выражением

$$\varphi_{т}(y) = C_7 \varphi_{т1}(y) + C_8 \varphi_{т2}(y), \quad \varphi_{т1,2} = \exp(\mp \sqrt{-i\alpha \operatorname{Re} \Pr_{т} c} + \Pr_{т} k_1/2) y.$$

3. Построение нейтральных кривых. Подставим выражения (1.17) в граничные условия (1.5)—(1.16). После линеаризации получим систему однородных алгебраических уравнений. Из анализа этой системы следует, что $p_1 = \rho_1 = t_1 = 0$. Для остальных неизвестных имеем следующие условия:

$$f'(0) + u'(0)n_0 = 0; \tag{3.1}$$

$$f(0) = 0; \tag{3.2}$$

$$\varphi_ж(0) + t'_{жо}(0)\,n_0 = 0; \tag{3.3}$$

$$\varphi_т(0) + t'_{то}(0)\,n_0 = 0; \tag{3.4}$$

$$\varphi'_ж(0) - \frac{\lambda_т}{\lambda_ж}\varphi'_т(0) + \left[t''_{жо}(0) - \frac{\lambda_т}{\lambda_ж}t''_{то}(0)\right]n_0 = 0; \tag{3.5}$$

$$\varphi_т(-\infty) = 0; \tag{3.6}$$

$$f''(1) + \alpha^2 f(1) + [u''(1) - 2i\alpha u'(1)\,\mathrm{ctg}\,(2\beta)]n = 0; \tag{3.7}$$

$$f'(1) + u'(1)n = 0; \tag{3.8}$$

$$\varphi'_ж(1) + \left[t''_{жо}(1) - i\alpha Q\cos\beta/\lambda\right]n = 0; \tag{3.9}$$

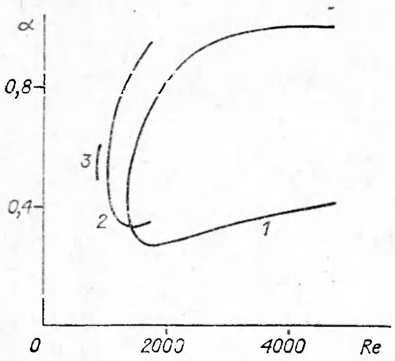
$$\varphi_ж(1) + t'_{жо}(1)\,n = 0. \tag{3.10}$$

Уравнения (3.1)—(3.10) — это система однородных алгебраических уравнений относительно десяти неизвестных C_1—C_8, n_0, n. Для существования нетривиального решения системы необходимо и достаточно, чтобы ее главный определитель равнялся 0. После оценки элементов определителя по порядку величины это условие принимает вид

$$\frac{f'_1(1)\,f_2(0) - f'_2(1)\,f_1(0)}{f'_1(1)\,f'_2(0) - f'_2(1)\,f'_1(0)} = \frac{f_3(0)}{f'_3(0)}. \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) называется вековым и служит для определения собственных значений фазовой скорости возмущений c. Отношение $f_3(0)/f'_3(0)$ выражается через затабулированную функцию Титьенса [3], левая часть уравнения (3.11) определяется с помощью разложений (2.2). Если положить мнимую часть c равной нулю, то соотношение (3.11) будет являться уравнением нейтральной поверхности, разделяющей области устойчивости и неустойчивости.

Нас интересует влияние на устойчивость параметров q и δ задачи. Задаваясь конкретным металлом и фиксируя угол падения электронов β, можно получить нейтральные кривые в координатах Re, α для различных q. На фиг. 2 такие кривые, построенные в результате численного решения уравнения (3.11), показаны для течения пленки расплавленного железа при $\beta = 5°$ (*1* соответствует 10^9 Вт/м^2, *2* — $1{,}5 \cdot 10^9$ Вт/м^2, *3* — $2 \cdot 10^9$ Вт/м^2). В качестве значений теплофизических характеристик были взяты следующие величины [4, 5]: $\rho = 7230$ кг/м^3, $c_ж = 750$ Дж/(кг·К), $c_т = 700$ Дж/(кг·К), $\lambda_ж = 10$ Вт/(м·К), $\lambda = 40$ Вт/(м·К), $L_{пл} = 2{,}7 \cdot 10^5$ Дж/кг, $L_{исп} = 6{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, $T_{пл} = 1810$ К, $T_к = 3300$ К, $\mu = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с). Значения остальных параметров, используемых в расчетах: $u_e = 25$ кВ, $T_\infty = 300$ К.



Фиг. 2

Для фиксированного q величина числа Рейнольдса однозначно определяется углом наклона массива δ. Так, концевым точкам нейтральных кривых (см. фиг. 2), полученных для $q_1 = 10^9$ Вт/м^2, $q_2 = 1{,}5 \cdot 10^9$ Вт/м^2, $q_3 = 2 \cdot 10^9$ Вт/м^2, соответствует угол наклона $\delta = 90°$, а крайним левым точкам кривых — углы $\delta_1 = 14°$, $\delta_2 = 34°$, $\delta_3 = 79°$. Это означает, что, например, при $q = 10^9$ Вт/м^2 течение будет устойчивым по отношению к бесконечно малым плоским возмущениям при наклоне, меньшем 14°. А при $q > 2{,}01 \cdot 10^9$ Вт/м^2 (для $q = 2{,}01 \cdot 10^9$ Вт/м^2 нейтральная кривая вырождается в точку) течение будет устойчивым вплоть до вертикального положения пленки.

Поступила 14 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Афанасьев Ю. В., Крохин О. Н.** Газодинамическая теория воздействия излучения лазера на конденсированные вещества.— Тр. ФИАН. Квантовая радиофизика, 1970, т. 52.
2. **Линь Цзя-цзяо.** Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
3. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.
4. **Варгафтик Н. Б.** Теплофизические свойства веществ. М.—Л.: Гос. энерг. изд., 1956.
5. **Чиркин В. С.** Теплофизические свойства материалов ядерной техники. М.: Атомиздат, 1968.

УДК 532.526.2

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ РАСПЛАВА В АМПУЛЕ

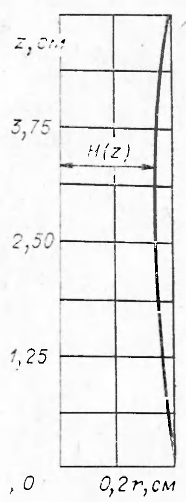
В. В. Кузнецов

(*Новосибирск*)

В настоящее время возникла задача определения распределения примеси легирующей добавки при кристаллизации в условиях пониженного тяготения. Физические особенности таких процессов рассмотрены в [1—3]. Для решения этой задачи необходимо знать поле скоростей течения расплава. В ряде работ [4, 5] предложены схемы расчета этой задачи в основном для умеренных чисел Рейнольдса и Марангони.

В данной работе предлагается асимптотическая схема стационарной термокапиллярной конвекции в цилиндрической ампуле при больших числах Рейнольдса и Марангони; такая ситуация реализуется при достаточно больших перепадах температуры вдоль боковой стенки ампулы и малой вязкости расплава. Течение состоит из совокупности пограничных слоев Прандтля и Марангони, которые сопрягаются с ядром течения. Осесимметричное циркуляционное течение в ядре рассчитано на основе схемы Прандтля — Бэтчелора. По указанной схеме произведен расчет термокапиллярной конвекции расплава в ампуле.

1. Рассматривается задача определения поля скоростей термокапиллярной конвекции расплава в цилиндрической ампуле при направленной кристаллизации в условиях отсутствия силы тяжести. Область течения изображена на фиг. 1. Объемное сжатие полупроводниковых материалов при расплавлении обусловливает наличие в ампуле пустот, которые предполагаются распределенными вдоль боковой стенки ампулы. Течение полагается ламинарным, стационарным и осесимметричным. Предположение стационарности объясняется тем, что время кристаллизации всей ампулы обычно составляет несколько часов, поэтому скорость продвижения фронта кристаллизации имеет порядок 10^{-4} см/с, что существенно меньше скорости термокапиллярной конвекции при достаточно большом перепаде температуры вдоль ампулы.



Фиг. 1

При сделанных предположениях течение описывается системой уравнений Навье — Стокса

$$uu_r + wu_z = -\frac{p_r}{\rho} + \nu\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u + u_{zz}\right), \tag{1.1}$$

$$uw_r + ww_z = -\frac{p_z}{\rho} + \nu\left(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + w_{zz}\right),$$

$$u_r + \frac{1}{r}u + w_z = 0,$$