

ОБ УСКОРЕНИИ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В СИЛЬНОМ
НЕСТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. М. Бам-Зеликович

(Москва)

Задача о нестационарном ускорении проводящего газа в канале решается совместно с задачей о разряде в электрической цепи. В отличие от имеющихся работ, в которых при совместном решении этих задач принималось, что ускоряется тонкий стужок, рассматривается случай, когда газ в процессе движения заполняет весь канал. Движение газа в канале рассматривается при этом в одномерной постановке в предположении, что время пролета частицы по каналу мало по сравнению с временем разряда и что электромагнитная сила велика по сравнению с градиентом давления.

При импульсном ускорении проводящего газа используется разряд некоторой емкости. Правильное решение задачи об ускорении газа в возникающем электромагнитном поле возможно только при совместном расчете магнитогазодинамического течения в канале и процесса разряда во всей электрической цепи, так как от течения проводящего газа в канале зависит сопротивление (переменное по времени) канала и, следовательно, протекание разряда. Само же ускорение газа зависит от возникающей в каждый момент времени разности потенциалов на электродах. До сих пор такое совместное решение задачи производилось во многих работах в предположении, предложенном в [1], о том, что течение газа в канале можно рассматривать при решении этой задачи, как движение единого узкого стужка, длиной которого можно пренебречь по сравнению с длиной канала. Между тем, как показывают эксперименты и оценки, проводящий газ в процессе ускорения во многих случаях заполняет всю длину канала, и предположение об узком стужке не выполняется даже приближенно [4,5].

1. Рассмотрим нестационарное ускорение проводящего газа в канале прямоугольного сечения, верхняя и нижняя стенки которого являются электродами, а боковые — изоляторами. Длина канала равна l , ширина — b , расстояние между электродами — h . Напряжение на электроды подается от батареи конденсаторов, имеющей суммарную емкость C и начальный заряд Q_0 , через внешнюю цепь с сопротивлением R_0 .

Решение задачи об ускорении проводящего газа в таком канале будем искать при следующих предположениях:

а) внешние магнитные поля отсутствуют, ускорение газа происходит под действием приложенного электрического и собственного магнитного поля протекающих токов. Проводимость газа $\sigma = \text{const}$. Так как большая часть тока течет вблизи начала электродов, то можно пренебречь изменением по времени индуктивности всей цепи, т. е. полагать $L = \text{const}$;

б) газ ускоряется до скоростей $\sim 5 \cdot 10^6 \div 10^7$ см/сек, так что можно пренебречь градиентом давления по сравнению с электромагнитной силой [2]. Начальная скорость газа мала по сравнению с конечной, и при расчете магнитного поля ею можно пренебречь;

в) электроды достаточно длинные и широкие, поэтому концевые эффекты можно не учитывать (в частности, считать на выходе из канала напряженность магнитного поля $H = 0$). Токи Холла пренебрежимо малы. Газ подается на входе в канал равномерно по сечению с расходом $M(t)$;

г) характерное время разряда t_0 много больше времени пролета частицы газа по каналу. Это предположение, конечно, выполняется далеко не всегда. Поэтому проведем оценку, показывающую, что в практически интересных случаях его можно принимать.

Пусть $L = 60$ см, $C = 1500$ мкф, $l = 15$ см и скорость на выходе $u_1 = 10^7$ см / сек. Тогда $t_0 = 2\pi \sqrt{LC} / c \approx 6 \cdot 10^{-5}$ сек. Время же пролета по порядку величины равно $l / u_1 = 1.5 \cdot 10^{-6}$ сек. Таким образом, отношение времени пролета частицы газа по каналу к характерному времени разряда будет порядка $2.5 \cdot 10^{-2}$.

При сделанных предположениях движение газа в канале можно рассматривать как одномерное. Кроме того, из приведенной оценки следует, что для определения связи падения напряжения V на электродах канала и суммарного тока I можно принимать распределение скорости в каждый момент времени квазистационарным.

Соответствующая система уравнений, из которой должна быть найдена связь V и I , имеет вид [2] (время входит в эти уравнения как параметр, ось x направлена по оси канала, начало координат расположено во входном сечении канала):

$$\begin{aligned} d(\rho u)/dx &= 0, \quad \rho u du/dx = jH/c \\ dH/dx &= -4\pi j/c, \quad j = \sigma(V/h - uH/c) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u — скорость, ρ — плотность газа, j — плотность электрического тока, c — скорость света в пустоте.

В начальный период движения газ занимает не всю длину канала l , а лишь некоторую часть от $x = 0$ до $x = x_1$, где x_1 — переменная по времени координата переднего фронта. Поэтому граничное условие $H = 0$ должно выполняться при $x = x_1$. После достижения в некоторый момент времени передним фронтом конца электродов газ заполняет весь канал. Начиная с этого момента времени, следует считать $H = 0$ при $x = l$.

Интегрируя третье уравнение (1.1) по x от $x = 0$ до $x = x_1$ или до $x = l$ соответственно для тех моментов времени, когда газ заполняет часть канала или весь канал, а первое и второе от нуля до x , получаем

$$\rho u = M/bh, \quad I = cbH_0/4\pi, \quad u = u_1 (1 - H^{*2}) \quad (1.2)$$

$$H^* = \frac{H}{H_0}, \quad u_1 = \frac{2\pi h I^2}{c^2 b M}, \quad I = b \int_0^{x_1} j dx \quad (1.3)$$

Здесь обозначено через H_0 значение напряженности магнитного поля в начальном сечении канала (при $x = 0$), а через u_1 значение скорости переднего фронта газа, если передний фронт еще не достиг конца электродов, или скорости в конце канала, если газ в рассматриваемый момент времени уже заполняет весь канал.

Подставляя (1.2) в последнее уравнение (1.1), учитывая (1.3) и интегрируя соответственно от нуля до x_1 или до l , найдем

$$R_1^* x_1^* = \int_0^1 \frac{dH^*}{\chi^2 (H^{*3} - H^*) + 1}, \quad x_1^* = \frac{x_1}{l}, \quad R_1^* = \frac{cbV}{hI}, \quad \chi^2 = \frac{8\pi^2 h^2 I^3}{c^4 b^2 M V} \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) дает искомую связь между разностью потенциалов на электродах V и суммарным током I . К нему следует присоединить уравнения разряда для всей цепи, которые могут быть записаны в следующем виде [3]:

$$dQ/dt = I, \quad (L/c^2) dI/dt + R_0 I + V + Q/C = 0 \quad (1.5)$$

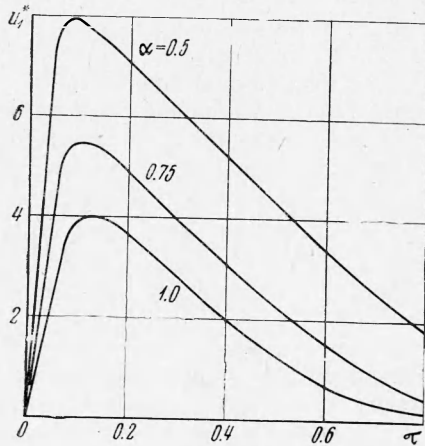
Кроме того, для начального периода движения необходимо добавить уравнение движения переднего фронта газа

$$dx_1 / dt = u_1 \quad (1.6)$$

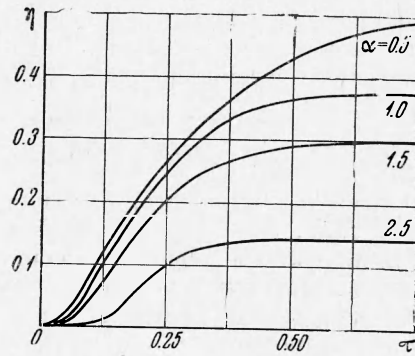
Уравнения (1.4) — (1.6) являются системой четырех уравнений для определения переменных Q , V , I и x_1 . Начальными условиями для этой системы будут

$$Q = Q_0, V = 0, I = 0, x_1 = x_{10} \text{ при } t = 0 \quad (1.7)$$

Так как соотношение (1.4) не может быть разрешено относительно искомых величин, то для определения неизвестных система (1.4) — (1.6) должна быть преобразована.



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем вместо I и V новые неизвестные функции \bar{R}_1^* и χ . Из формул (1.4) имеем

$$I^2 = (c^4 b / 8\pi^2 \sigma l h) M R_1^* \chi^2, V^2 = (c^4 h / 8\pi^2 \sigma^3 l^3 b) M R_1^{*3} \chi^2 \quad (1.8)$$

Отсюда dI/dt может быть выражено через производные по времени M , \bar{R}_1^* и χ . При этом следует заметить, что

$$x_1^* \frac{dR_1^*}{dt} = -R_1^* \frac{dx_1^*}{dt} - \frac{2}{\chi} \frac{d\chi}{dt} (R_1^* x_1^* - 2\psi), \quad \psi = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dH^*}{[\chi^2 (H^{*3} - H^*) + 1]^2}$$

Подставляя (1.3), (1.8), (1.9) в (1.5), (1.6) и вводя безразмерные переменные, получим

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{x_1^* \chi R_1^*}{4m\psi} \frac{dm}{d\tau} + \frac{\chi R_1^*}{4\psi} \frac{dx_1^*}{d\tau} - \frac{\beta x_1^* \chi R_1^* (R_0^* + R_1^*)}{2\psi} - \frac{2\pi^2 x_1^* q \sqrt{R_1^*}}{\alpha \psi \sqrt{m}}$$

$$dq/d\tau = \alpha \chi \sqrt{R_1^* m}, \quad dx_1^*/d\tau = \gamma \chi^2 R_1^*$$

$$q = Q/Q_0, \quad m = M/M_0, \quad \tau = t/t_0, \quad t_0 = 2\pi \sqrt{LC}/c \quad (1.10)$$

$$\alpha = \left(\frac{c^2 b M_0 LC}{2\sigma l h Q_0^2} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{2\pi c h}{\sigma b l} \left(\frac{C}{L} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{c \sqrt{LC}}{2\sigma l^2}, \quad R_0^* = R_0 \frac{\sigma b l}{h}$$

где M_0 — характерное значение расхода M . Граничные условия (1.7) принимают вид

$$q = 1, \quad \chi = 0, \quad x_1^* = x_{10}^* \text{ при } \tau = 0 \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.4), (1.10) с граничными условиями (1.11) может быть легко проинтегрирована численно.

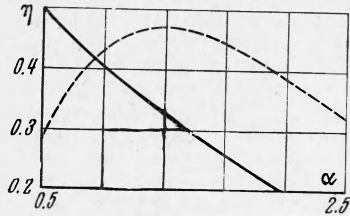
2. В частном случае, когда газ заполняет весь канал, а зависимость расхода от времени примерно соответствует эрозийной подаче рабочего тела, решение уравнений (1.4), (1.5) может быть выражено через элементарные функции. Действительно, при этом M можно считать пропорциональным суммарному току I^2 или же суммарной мощности, подводимой к газу, т. е. VI , предполагая, что на испарение идет определенная часть суммарной мощности. Если эрозия происходит только в начале канала, то расход пропорционален джоулеву тепловыделению в начальном сечении, т. е. j_0^2 . Но так как $j_0 \sim V$ (в начальном сечении скорость газа мала и $uH \ll V/h$), то в этом случае будет $M \sim V^2$. Во всех этих случаях ($M = kI^2$, $M = kIV$, $M = kV^2$) величина χ будет зависеть в той или иной степени только от отношения V/I . Но тогда из формулы (1.4) следует, что при $x_1^* \equiv 1$ будет $V/I = \text{const}$. Таким образом, $V = R_1 I$, где R_1 — постоянное сопротивление канала. Подставляя это выражение для V в (1.5) и приводя уравнения к безразмерному виду, получаем

$$\frac{dq}{d\tau} = i, \quad \frac{di}{d\tau} + \beta(R_0^* + R_1^*)i + 4\pi^2 q = 0$$

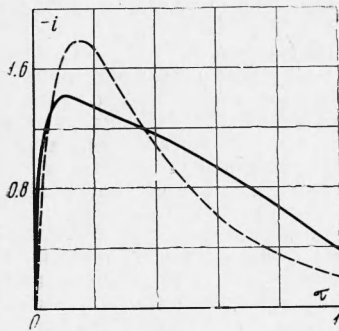
где

$$i = (2\pi\sqrt{LC}/cQ_0) I$$

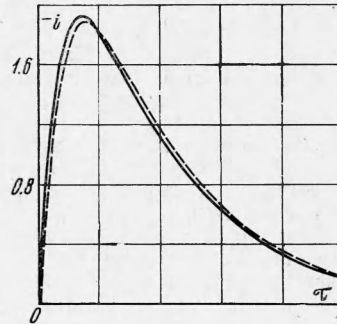
Так как коэффициенты в системе (2.1) постоянны, то решением ее являются хорошо известные кривые затухающих колебаний.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

3. Примеры расчета по формулам (1.4), (1.10) для некоторых значений параметров приведены на фиг. 1 и 2. Расчет проводился для случая, когда проводящий газ с самого начала заполняет весь канал и расход газа постоянен по времени. Значения параметров принимались равными: $l = 15 \text{ см}$, $b = 5 \text{ см}$, $h = 3 \text{ см}$, $L = 60 \text{ см}$, $\sigma = 5 \cdot 10^{12} \times \times 1/\text{сек}$, $R_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$, $C = 1500 \text{ мкф}$. Постоянный расход газа выбирался из условия, что за время $t_0 = 60 \text{ мксек}$ ускоряется масса, равная 0.001 г (размеры канала и другие параметры приняты такими, какие обычно бывают в экспериментах).

Расчет проведен для различных значений параметра α , что соответствует различным значениям Q_0 (т. е. различному начальному напряжению на батарее конденсаторов). На фиг. 1 приведены значения безразмерной скорости газа на выходе из канала $u_1^* = (4\pi\sigma l/c^2) u_1$ в зависимости от безразмерного времени τ . Из фиг. 1 видно, что, как и следует из общих физических соображений, при $M = \text{const}$ скорость газа на выходе резко неравномерна. Она быстро возрастает, достигая максимума при максимуме суммарного тока, а затем снова падает. На фиг. 2 показано для тех же значений параметров изменение суммарной кинетической энергии газа по времени. По оси ординат отложена величина

$$\eta = \left(\int_0^t \frac{Mu_1^2}{2} dt \right) \frac{2C}{Q_0^2}$$

Большой интерес представляет сравнение величины η , полученной в предположении, что газ заполняет весь канал, со значениями η , найденными исходя из предположения об ускорении тонкого сгустка плазмы [1]. В последнем случае при расчете примем, что сгусток ускоряется в канале тех же размеров, что и при непрерывной подаче газа, при той же батарее конденсаторов и начальной индуктивности цепи. Отношение dL/dx полагаем равным средней величине изменения индуктивности по длине

канала (при принятых размерах канала среднее значение $dL/dx \approx 4.5$), а массу сгустка равной всей массе, при непрерывной подаче газа за время t_0 (т. е. 0.001 с).

Результаты расчета приведены на фиг. 3. По оси ординат отложена величина η , по оси абсцисс параметр α , обратно пропорциональный начальному напряжению на батарее конденсаторов. Пунктирная кривая представляет данные, полученные в предположениях работы [1], сплошная кривая — данные расчета настоящей работы, проведенного при тех же значениях параметров, что и кривые на фиг. 2 и для $\tau = 1$.

Из фиг. 3 видно, что результаты расчета, проведенного при разных предположениях (непрерывное ускорение газа, заполняющего весь канал, и ускорение в едином сгустке) отличаются не только количественно, но и качественным видом зависимости $\eta(\alpha)$. При заполнении газом всего канала η тем больше, чем больше начальное напряжение на батарее конденсаторов (чем меньше α). При ускорении же единого сгустка имеется максимум по α , связанный с тем, что при больших начальных напряжениях сгусток быстро приобретает значительную скорость и покидает канал в начале разряда, большая часть запасенной в конденсаторах энергии остается неиспользованной.

Из приведенных на фиг. 3 данных следует, что при заполнении проводящим газом всего канала недопустимо даже для оценок рассчитывать, как это делалось в ряде работ, параметры потока (в частности η) по формулам, выведенным для случая ускорения узкого сгустка. Влияние особенностей течения проводящего газа внутри канала на процесс протекания разряда проиллюстрировано на фиг. 4. По оси абсцисс на фиг. 4 отложено безразмерное время τ , по оси ординат — взятый с обратным знаком, безразмерный ток в цепи i . Расчет проведен для канала с $l = 15$ см, $h = 3$ см, $b = 5$ см, батареи конденсаторов с $C = 1500$ мкф, $Q_0 = 2,46$ кул, сопротивления внешней цепи $R_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ ом, индуктивности $L = 60$ см и $\sigma = 5 \cdot 10^{12}$ 1/сек. Сплошной кривой на фиг. 4 показана зависимость тока разряда от времени для случая постоянного расхода массы ($M = \text{const}$), пунктирной — для $M = kI^2$, при $k \approx 10^{-27}$ сек³/см³. В обоих случаях за время $t_0 = 2\pi \sqrt{LC} / c \approx 60$ мксек ускоряется масса, равная $0,001$ г.

Из фиг. 4 видно, что от характера подачи рабочего тела существенно зависит протекание разряда. При постоянном расходе газа скорость при τ , близком к нулю, и τ , близком к единице, существенно меньше (см. фиг. 1), чем в максимуме тока, так как на ту же массу действует меньшая сила. Поэтому значительно меньше и величина против э.д.с. (величина uH/c), а ток при этом больше, чем при подаче газа по закону $M = kI^2$, когда характерная величина скорости в канале постоянна в течение всего времени разряда.

Некоторую роль в формировании процесса разряда играет начальный период, когда газ заполняет по длине еще не весь канал. На фиг. 5 показано изменение тока по времени для тех же параметров установки, что и раньше, при $M = kI^2$, но для канала $l = 30$ см и $Q_0 = 4.5$ кул. Сплошная кривая сосчитана без учета начального периода, т. е. в предположении, что проводящий газ сразу заполняет весь канал. Пунктирная кривая рассчитана с учетом постепенного заполнения канала газом. Из фиг. 5 видно, что заметное отличие в токе наблюдается только в начальном периоде, в течение времени, немного превышающего время заполнения канала газом (в рассматриваемом примере передний фронт газа доходит до конца канала при $\tau = 0.1$). Отметим, что близость кривых на фиг. 5 подтверждает правильность предположения о том, что при расчете можно течение в канале рассматривать как квазистационарное, если время пролета частицы по каналу существенно меньше характерного времени разряда.

Поступила 18 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю., Подгорный И. М., Чувати С. А. Электродинамическое ускорение сгустков плазмы. ЖЭТФ, 1957, т. 33, № 1 (7).
2. Бам-Зеликович Г. М. Одномерное неустановившееся движение проводящего газа под действием сильных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
3. Основные формулы физики. Под редакцией Д. Мензела. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
4. Демичев В. Ф., Матюхин В. Д. Изучение свойств быстро движущихся сгустков плазмы. ДАН СССР, т. 150, № 2, 1963.
5. Рущайло А. М. О тепловых потерях в импульсном ускорителе плазмы. ПМТФ, 1968, № 1.